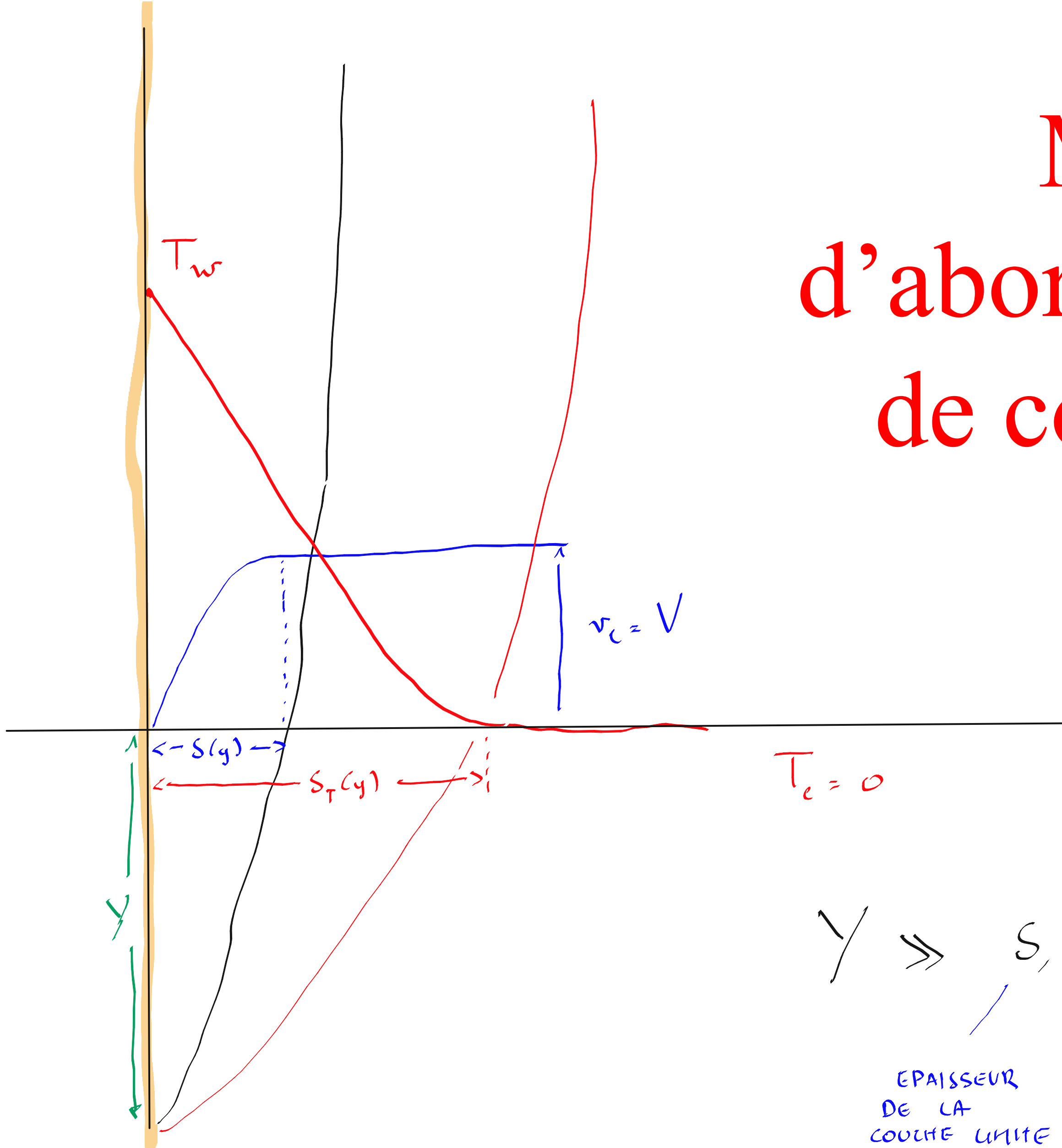
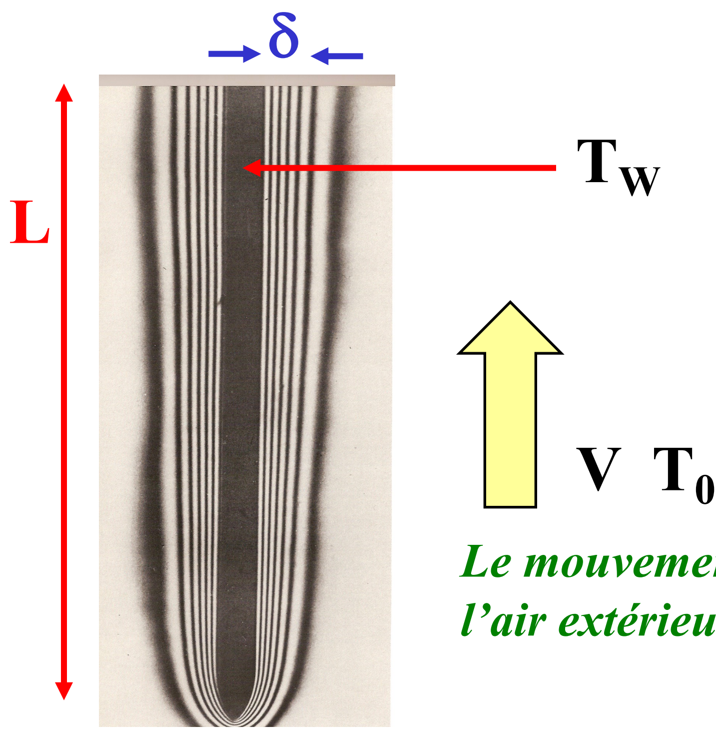
Mais, tout d'abord, un peu de convection forcée



$Y \gg \delta, \delta_T$

EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE DE VITESSE

EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE



Mais, tout d'abord, un peu de convection forcée

Le mouvement vertical de l'air extérieur est <u>forcé</u>

Problème de l'écoulement

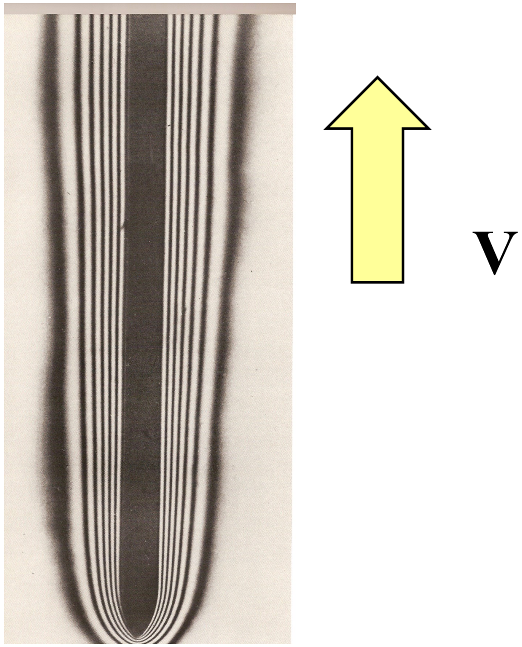
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu\, \mathbf{d} : \mathbf{d} + r + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Problème thermique

Plus facile car, il est ici possible de <u>découpler</u> le problème de l'écoulement et le problème thermique !



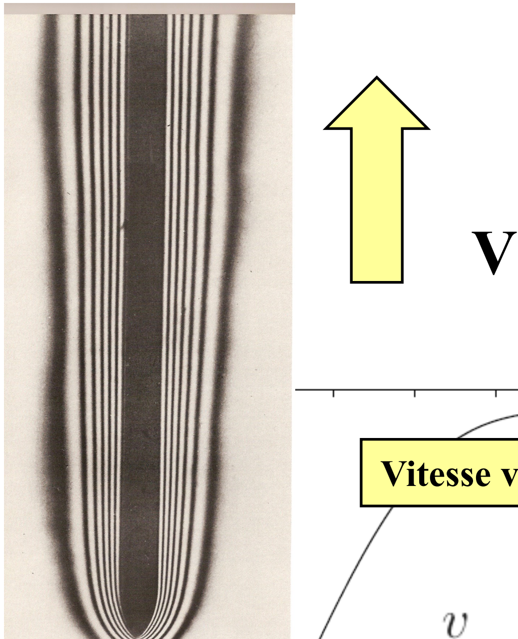
-i- problème de l'écoulement

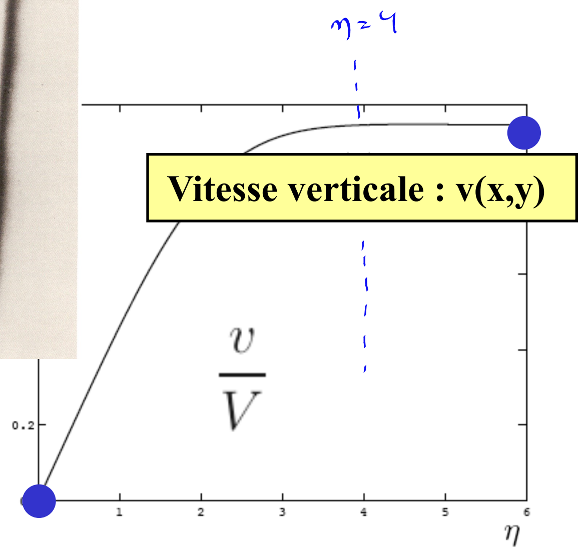
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}}$$

On introduit
une variable de similitude basée
une estimation de la couche limite

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\nu y}{V}}}$$

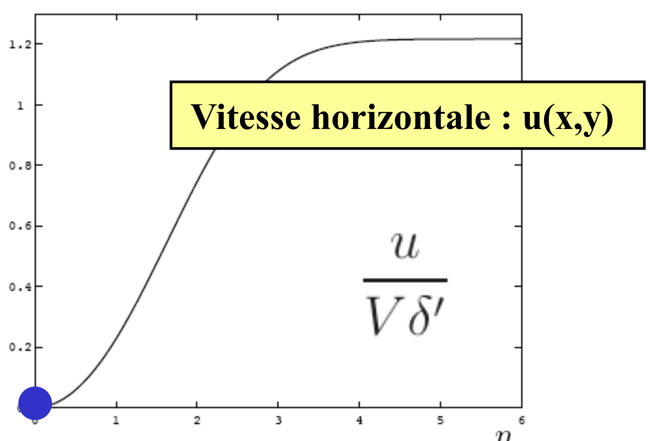
Solution de Blasius





$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

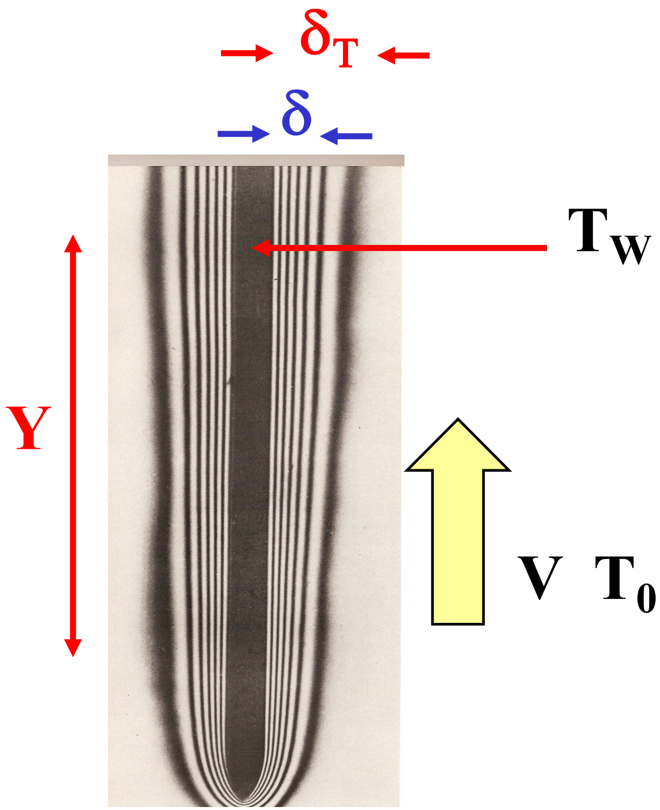
$$u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$



L'estimation de l'ordre de grandeur de la couche limite était bien adéquat !

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\nu y}{V}}}$$

-ii- problème thermique



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\delta \ll Y$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\delta_T \ll Y$$

Près de la plaque, les effets conductifs sont dominants…
C’est la zone dite de <u>couche limite thermique</u>
Loin de la plaque, la conduction est négligeable

On définit l’épaisseur thermique comme le lieu géométrique où la conduction et la convection sont du même ordre de grandeur.

$$u\,\underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{\frac{U\,\Delta T}{\delta}} + v\,\underbrace{\frac{\partial T}{\partial y}}_{\frac{V\,\Delta T}{Y}} = \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}$$

$$\frac{U}{\delta} = \frac{V}{Y}$$

$$\partial\left(\frac{V\,\Delta T}{Y}\right)$$

$$\alpha\,\frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{Y} = \frac{1}{\sqrt{Re}}}$$

$$\boxed{\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Pe}} = \sqrt{\frac{1}{Re\,Pr}}}$$

$$= \frac{V\,\cancel{\Delta T}}{Y}\,\frac{\delta_T^2}{\alpha\,\cancel{\Delta T}} = 1$$

$$\frac{\delta_T^2}{Y^2} = \frac{\alpha}{VY}$$

$$\boxed{\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{Pr}}}$$

Et δ_T ?

$$\boxed{u\frac{\partial T}{\partial x}}+\boxed{v\frac{\partial T}{\partial y}}=\boxed{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}+\boxed{\cancel{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}}$$

Lieu où l'ordre de la convection et de la conduction sont identiques

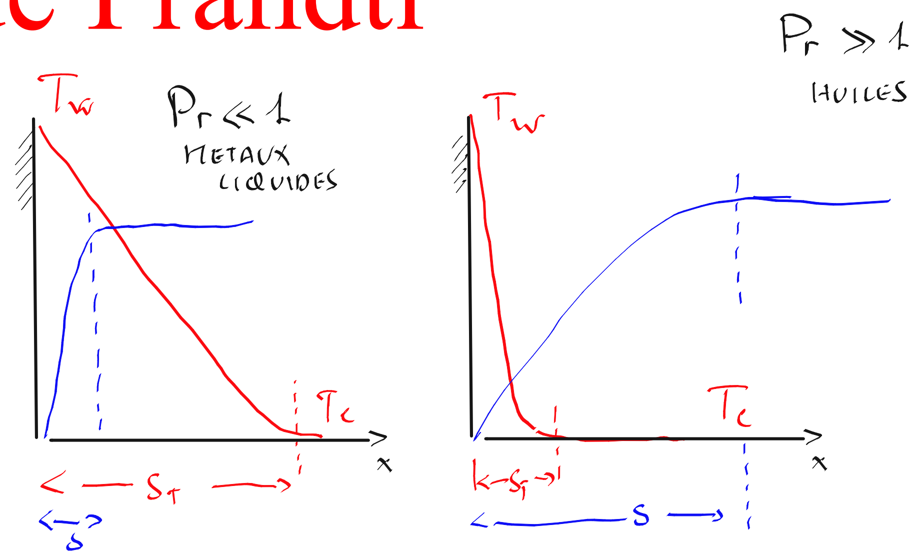
$$\frac{\boxed{\text{Convection}}}{\boxed{\text{Conduction}}}=\frac{V\Delta T/Y}{\alpha\Delta T/\delta_T^2}=\underbrace{\frac{VY}{\alpha}}_{Pe_Y}\frac{\delta_T^2}{Y^2}=1$$

Et δ_T ?

$$\frac{\delta_T}{Y}=\sqrt{\frac{1}{Pe_Y}}=\sqrt{\frac{1}{Pr\,Re_Y}}$$

Epaisseurs de couches limites et le nombre de Prandtl

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{Pr}}$$



En fait, c'est uniquement l'ordre de grandeur…
Lorsqu'on calcule la vraie épaisseur pour Blasius, c'est plutôt un exposant 1/3 !
Car l'ordre de grandeur de vitesse est un peu surestimé en prenant U !

Métaux liquides	**Pr << 1**
Gaz	**Pr = 0.7**
Eau	**Pr = 2… 7**
Huiles	**Pr >> 1**

Attention : Prantl est une fonction de la température (davantage pour les liquides que pour les gaz) !

Soyons un peu plus général : et la dissipation visqueuse ?

Problème de l'écoulement

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

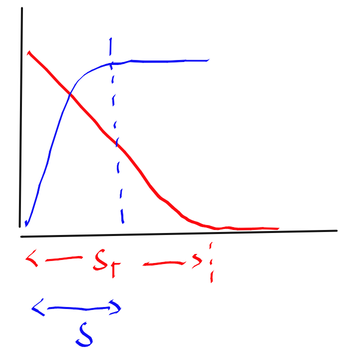
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Problème thermique

Eckert : dissipation visqueuse ?

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



$$\frac{\nu}{c}\frac{V^2}{\delta^2} \qquad\qquad \alpha\frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

DIFFUSION CONDUCTION THERMIQUE

$$= \frac{\nu}{c}\frac{V^2}{\delta^2}\frac{\delta_T^2}{\alpha\,\Delta T} = \underbrace{\frac{\nu}{\alpha}}_{P_r}\underbrace{\frac{\delta_T^2}{\delta^2}}_{\frac{1}{P_r}}\underbrace{\frac{V^2}{c\,\Delta T}}_{E_c} = E_c$$

Eckert : dissipation visqueuse ?

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \boxed{\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \boxed{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Dissipation visqueuse $\mathcal{O}\left(\frac{\nu V^2}{c\delta^2}\right)$

Conduction $\mathcal{O}\left(\frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}\right)$

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\nu V^2}{\alpha c \Delta T}\underbrace{\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2}_{Pr^{-1}} = \frac{V^2}{c\Delta T} = Ec$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d’un fluide !

Energie cinétique

Energie interne

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

Couches limites identiques

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

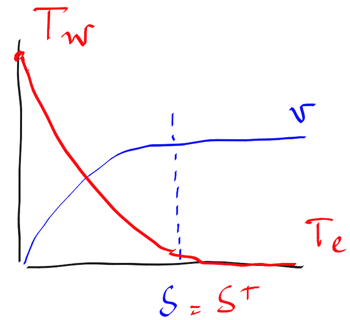
$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

Dissipation visqueuse négligeable

Quatre cas possibles !

$$\boxed{\begin{array}{lcl} Pr & = & 1 \\ Ec & \ll & 1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} Pr & = & 1 \\ Ec & \not\ll & 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} Pr & \neq & 1 \\ Ec & \ll & 1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} Pr & \neq & 1 \\ Ec & \not\ll & 1 \end{array}}$$



$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Les équations d'énergie et de quantité de mouvement expriment les mêmes opérateurs différentiels pour la température et la vitesse verticale !

$$\boxed{\begin{array}{lcl} Pr & = & 1 \\ Ec & \ll & 1 \end{array}}$$

$$T = Av + B$$

Si, si, c'est aussi simple !

Relation de Crocco

$Pr = 1$ $Ec \ll 1$	$Pr = 1$ $Ec \not\ll 1$
$Pr \neq 1$ $Ec \ll 1$	$Pr \neq 1$ $Ec \not\ll 1$

$$cT + \frac{v^2}{2} = Av + B$$

On a les mêmes opérateurs différentiels pour l'énergie interne totale et la vitesse verticale !

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$v\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = v\left[\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]$$

$$c\left[u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right] = c\left[\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}v\frac{\partial v}{\partial x}$$

Relation de Crocco

$$cT + \frac{v^2}{2} = Av + B$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left[cT + \frac{v^2}{2}\right] + v\frac{\partial}{\partial y}\left[cT + \frac{v^2}{2}\right] = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[cT + \frac{v^2}{2}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{v^2}{2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$v\left[\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = v\left[\cancel{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right]$$

$$c\left[\cancel{u\frac{\partial T}{\partial x}} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right] = c\left[\cancel{\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \cancel{\nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}\right]$$

$$\begin{array}{l} Pr = 1 \\ Ec \ll 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Pr = 1 \\ Ec \not\ll 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Pr \neq 1 \\ Ec \ll 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Pr \neq 1 \\ Ec \not\ll 1 \end{array}$$

$$f f'' + f''' = 0$$

ν

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}$$

On procède comme pour Blasius !

$$Pr\ f\theta' + \theta'' = 0$$

Solution de similitude

$$\boxed{\begin{array}{l} Pr \neq 1 \\ Ec \ll 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{x}{\sqrt{\frac{2 g \nu}{V}}} \qquad \Theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}}$$

$$f f'' + f''' = 0$$

$$Pr\, f\, \Theta' + \Theta'' = 0$$

$$\Theta(0) = 0$$

$$\Theta(\eta \to \infty) = 1$$

$$\underbrace{\exp(g)\, \underbrace{Pr\, f}_{g'}\, \Theta' + \exp(g)\, \Theta''}_{\left(\exp(g)\, \Theta'\right)' = 0} = 0$$

$$\exp(g)\, \Theta' = A$$

$$\Theta' = A \exp(-g)$$

$$\Theta = A \int_0^{\eta} \exp(-g) + B$$

$$Pr\ f\theta' + \theta'' = 0$$

Calcul de la solution de similitude

$$\Theta = A \int_0^{\eta} \exp(-g) + B$$

$$g' = Pr\, f$$

$$g(\eta) = Pr \int_0^{\eta} f(\xi)\, d\xi$$

$$\Theta(\eta) = A \int_0^{\eta} \exp(-g(\xi))\, d\xi + B$$

$$\boxed{\Theta(\eta) = \frac{\int_0^{\eta} \exp\left[-Pr \int_0^{\xi} f(\zeta)\, d\zeta\right] d\xi}{\int_0^{\infty} \cdots\cdots}}$$

$$Pr\ f\theta' + \theta'' = 0$$

Calcul des deux constantes

$Pr = 1$, $Ec \ll 1$	$Pr = 1$, $Ec \not\ll 1$
$Pr \neq 1$, $Ec \ll 1$	$Pr \neq 1$, $Ec \not\ll 1$

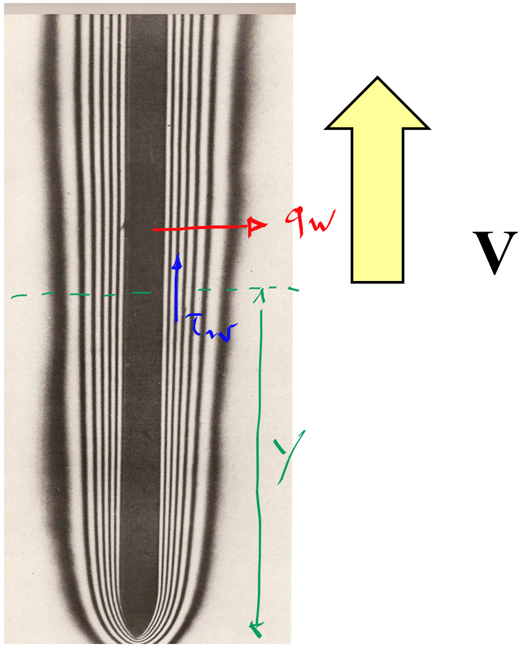
$$\boxed{\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}}$$

Le cas le plus général (et donc aussi le plus probable !)

$$u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pas de solution analytique…



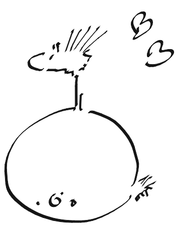
$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$= \mu V \underbrace{\left. f'' \right|_{\eta=0}}_{0,4696} \frac{1}{\delta} \qquad \sqrt{\frac{V}{2\nu y}}$$

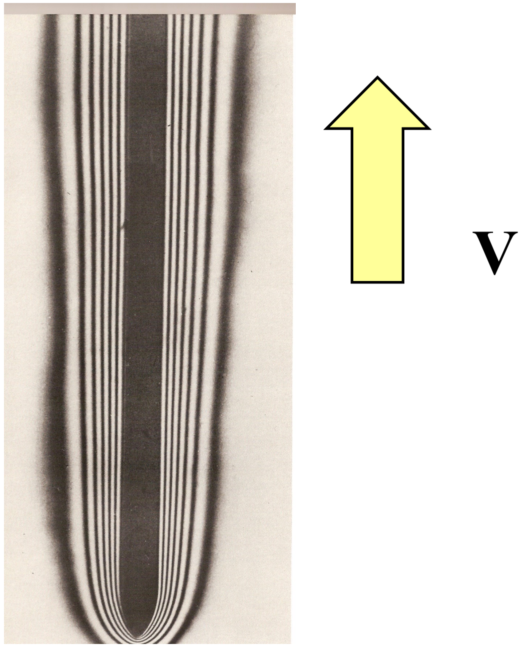
$$= 0,332 \sqrt{\frac{\mu^2 V^3}{\nu y}} \qquad \sqrt{\frac{\nu^{\cancel{2}} \rho^2}{\cancel{\nu}} \frac{V^4}{y V}}$$

$$= \rho \frac{V^2}{2} \, 0,664 \underbrace{\sqrt{\frac{\nu}{V y}}} \qquad \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = 0,664 \; Re^{-1/2}}$$



Calcul de la force de trainée



$$q_w = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$= -k\,(T_e - T_w)\,\underbrace{\Theta'\big|_{\eta=0}}_{\simeq\, 0.332\sqrt{2}\,P_r^{1/3}}\;\frac{1}{\delta}, \qquad \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{V}{2\nu y}}$$

VALABLE si $P_r > 0.01$

$$= -k\,(T_e - T_w)\; 0.332\,\sqrt{\frac{V}{\nu y}}\;P_r^{1/3}$$

$$= -\rho c V\,(T_e - T_w)\; 0.332\;\underbrace{\underbrace{\frac{k}{\rho c}}_{\alpha}\;\underbrace{\sqrt{\frac{V}{V^2 \nu y}}}_{\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\nu}{V y}}}}_{P_r^{-1}\,R_e^{-1/2}}\;P_r^{1/3}$$

$$\boxed{S_t = \frac{-q_w}{\rho c V (T_e - T_w)} = 0.332\;P_r^{-2/3}\;R_e^{-1/2}}$$

Calcul du flux de chaleur

$$C_f = 2\, P_r^{2/3}\, S_t$$

FORCE LOCALE
DE FROTTEMENT
ADIMENSIONNALISÉE

FLUX DE
CHALEUR LOCAL
ADIMENSIONNALISÉ

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = 0{,}664\ R_e^{-1/2}}$$

$$\boxed{S_t = \frac{-q_w}{\rho c V (T_e - T_w)} = 0.332\ P_r^{-2/3}\ R_e^{-1/2}}$$

Analogie de Reynolds