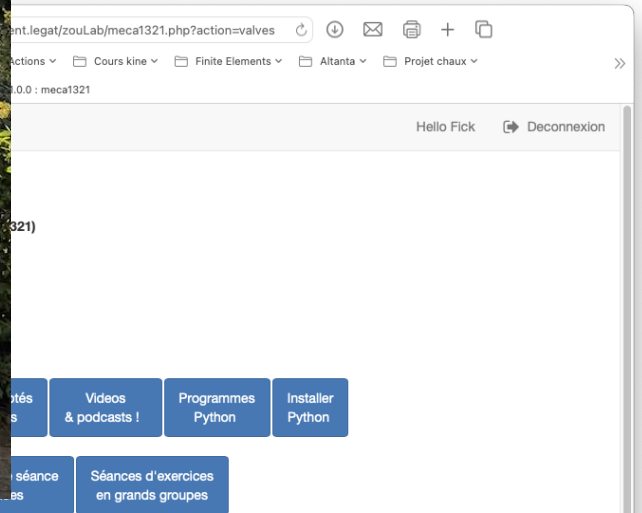


L'équipe didactique :-)



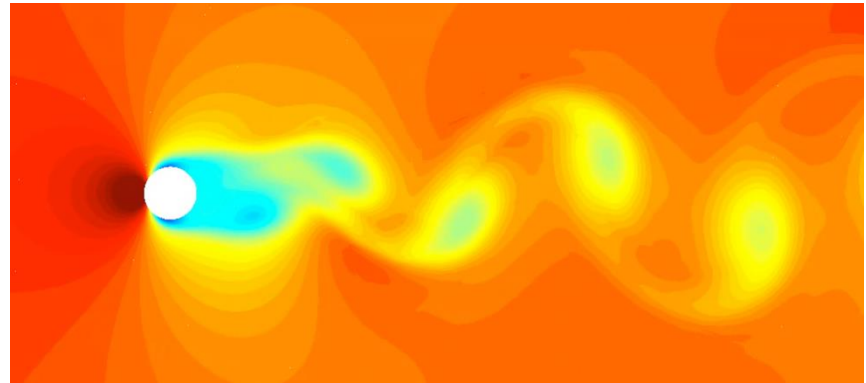
Premières activités :-)

Le premier cours aura lieu en présentiel le mercredi 18 septembre 2024 à 10h45 dans l'auditoire SUD19. Il y aura une séance d'exercices pendant la première semaine : vous avez deux plages horaires possibles : le mercredi à 16h30 dans le SUD11 et le jeudi à 10h45 dans le BARB92. **Il faut évidemment choisir une unique plage horaire : il est possible que la séance du jeudi (plus populaire) soit dédoublée ou qu'un troisième créneau horaire soit défini si vous avez une proposition coordonnée à nous faire !**

Bonne rentrée à tous et toutes !

(2024-09-11 15:48:48)

Tout ce dont vous avez rêvé à propos des fluides...



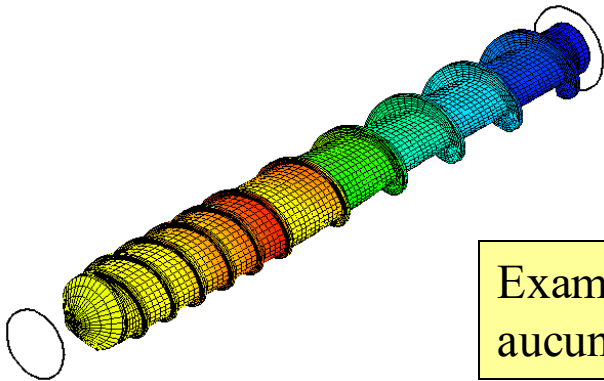
Equations de conservation et de comportement (VL)

Ecoulements et transferts laminaires (VL)

Théorie de la lubrification (VL)

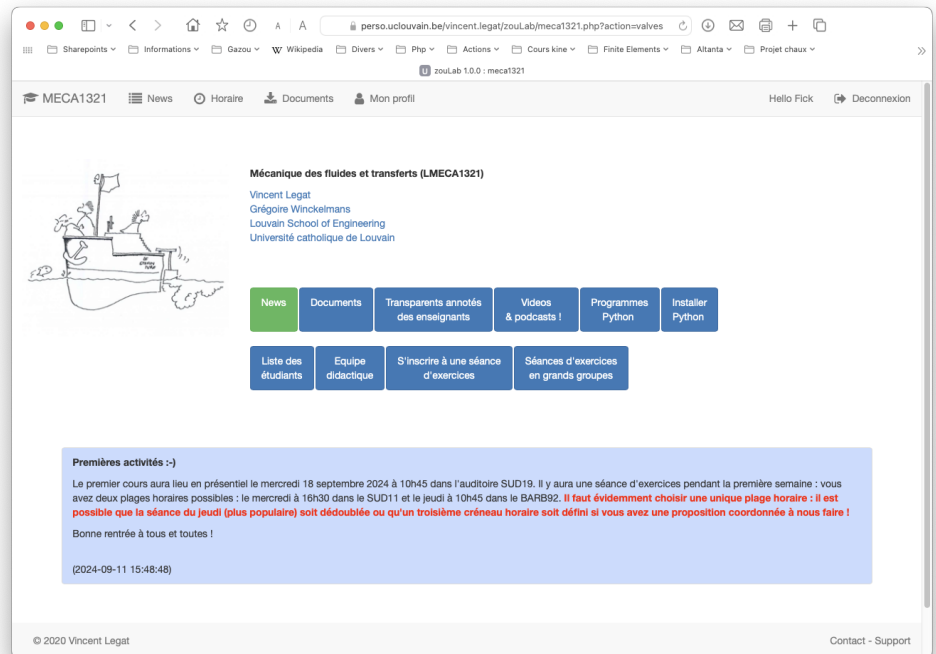
Couches limites - convection forcée et naturelle (VL)

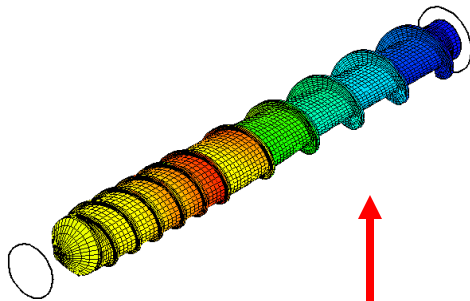
Ecoulements et transferts turbulents (GW)



Examen d'exercices à livre fermé sans
aucun document ou formulaire !

Les enseignants :-)





La mécanique des milieux continus...

Construction
d'un **modèle** pour **prédire** l'évolution
d'un milieu **continu**

Equations aux dérivées partielles

Equations de conservation
Equations de comportement

Conditions aux limites

Conditions frontières
Conditions initiales

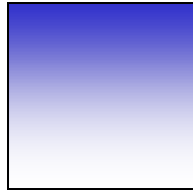
MASS
QUANTITÉ
ENERGIE

DE MVT

MOMENT
DE CA
QUANTITE
DE MVT

Dynamique moléculaire de l'air

3.5 litres d'air
 10^{23} molécules



Construction
d'un **modèle** pour **prédire** l'évolution
d'un milieu **continu**

La prédiction avec la dynamique
moléculaire est tout-à-fait
impossible pour des écoulements
complexes



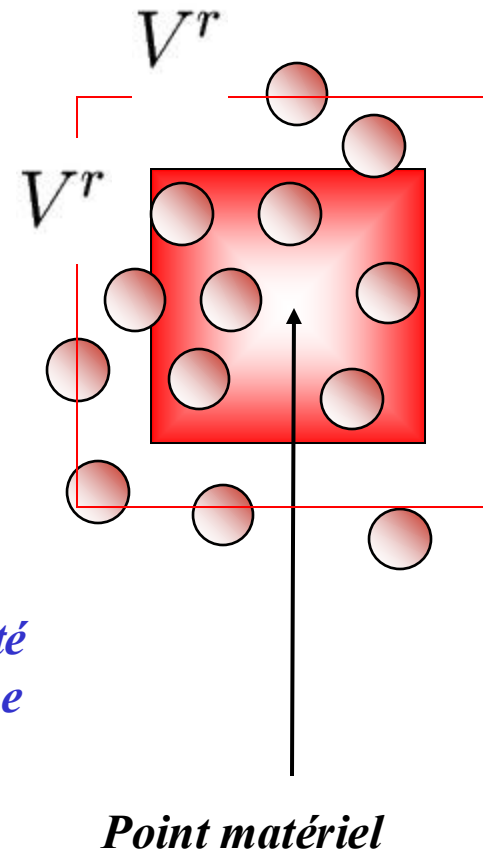
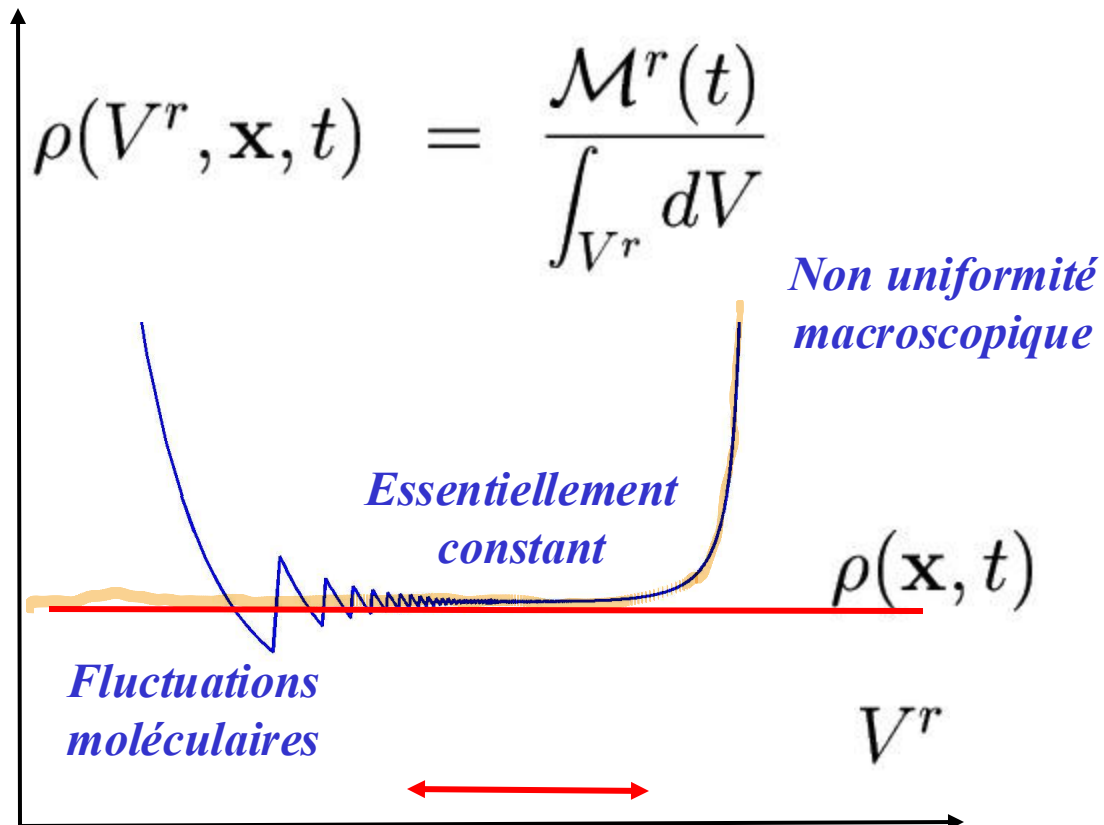
Ordinateur

10^{10} opérations par seconde
 10^{13} secondes ou 100.000 années
juste pour référencer une fois chaque molécule



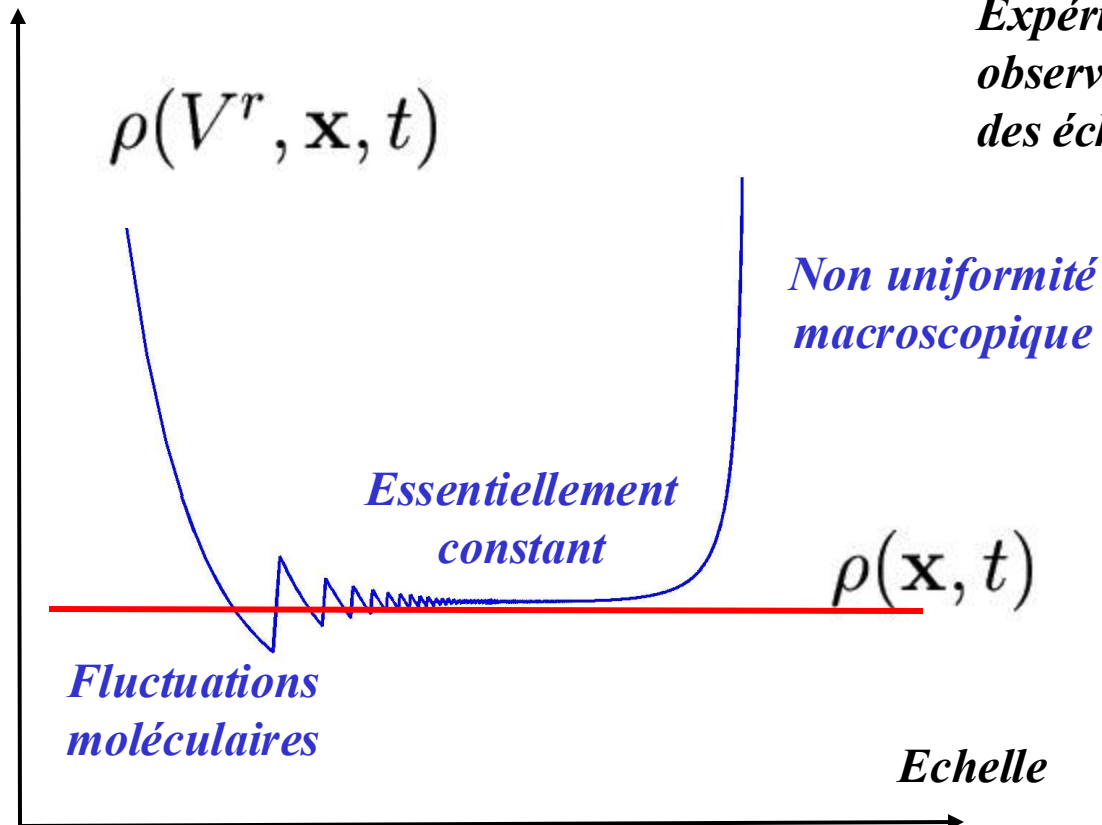
Hypothèse du modèle continu

La densité obtenue comme une moyenne...

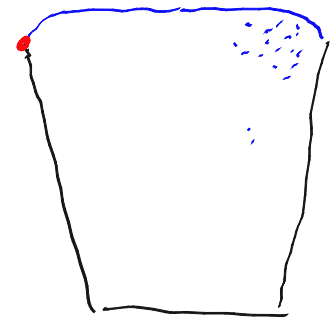


Hypothèse des milieux continus

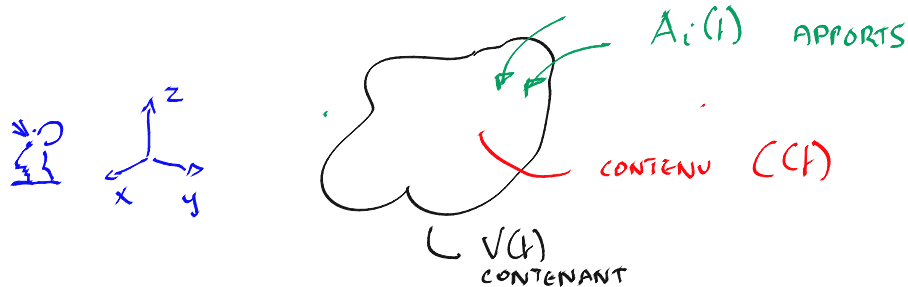
Le comportement de nombreux systèmes est essentiellement le même que si on supposait qu'ils étaient parfaitement continus.



Expérimentalement, on observe bien une séparation des échelles, typiquement 10^{15}



Lois de conservation...

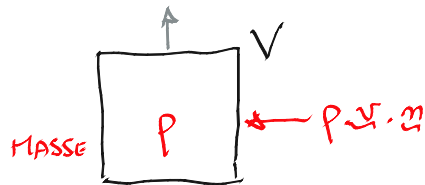


$$\frac{d}{dt} C(t) = A_1(t) + A_2(t)$$

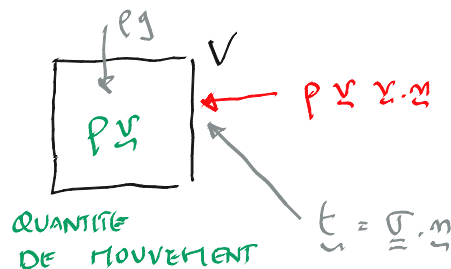
ρ
 $\rho \underline{v}$

SONT OBTENUES
 COMME DES
 MOYENNES
 SUR
 UN
 VOLUME
 REPRESENTATIF

$\underline{v} \triangleq \frac{\rho \underline{v}}{\rho}$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$



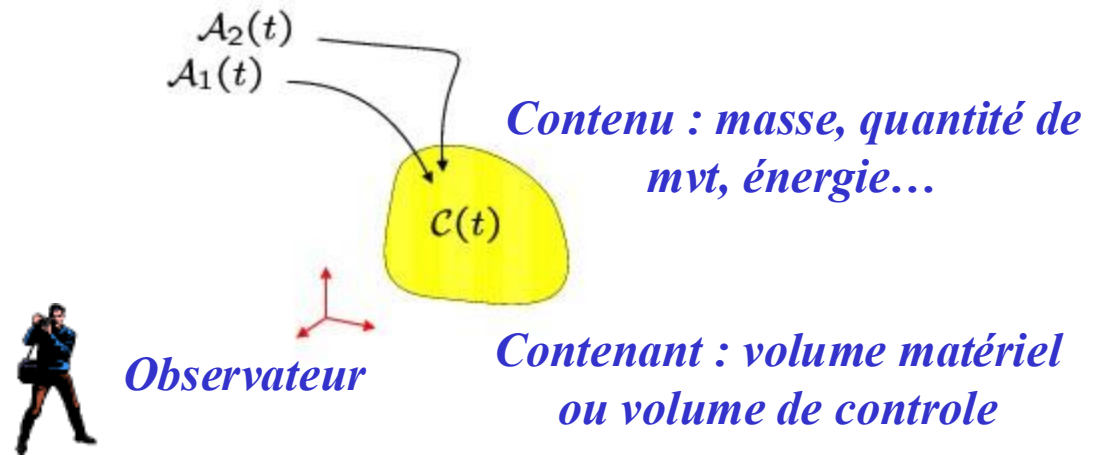
$$\frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) = \nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{g}$$

... bilan comptable !

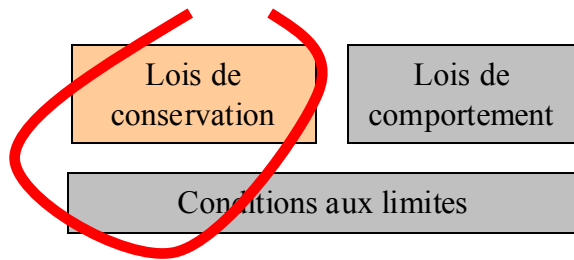
Lois de conservation

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \dots$$

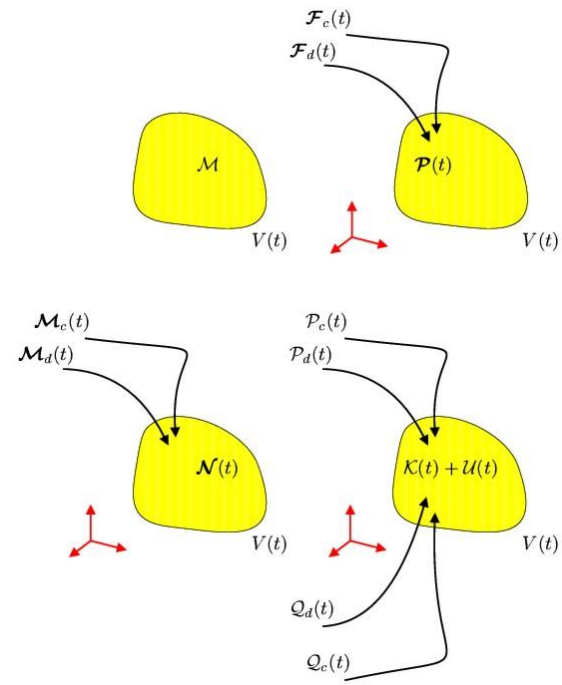
Apports extérieurs



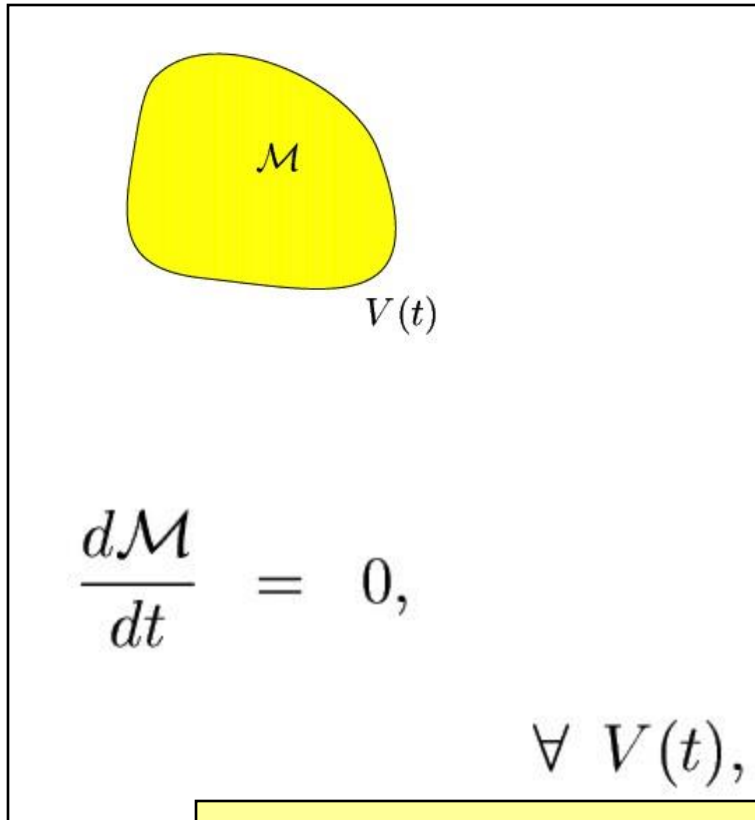
Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.



*Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.*

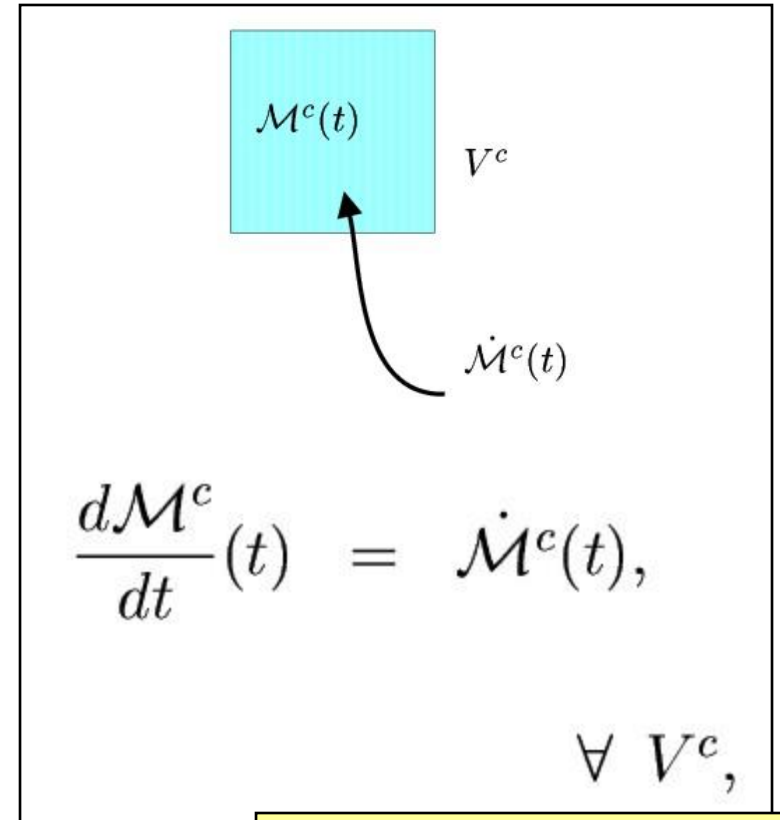


Formes globales de la conservation de la masse



Volume matériel

Ensemble de points matériels en mouvement se déplaçant à une vitesse macroscopique $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$



Volume de controle

Ensemble de points eulériens

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i$$

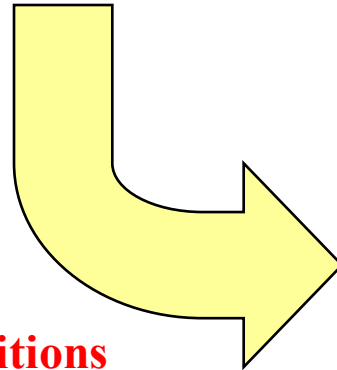
Conservation de la masse

Forme globale

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \quad \forall V(t),$$

*satisfaite pour une certaine classe de systèmes,
à tout instant*

$$\mathcal{M} = \int_{V(t)} \rho dV$$



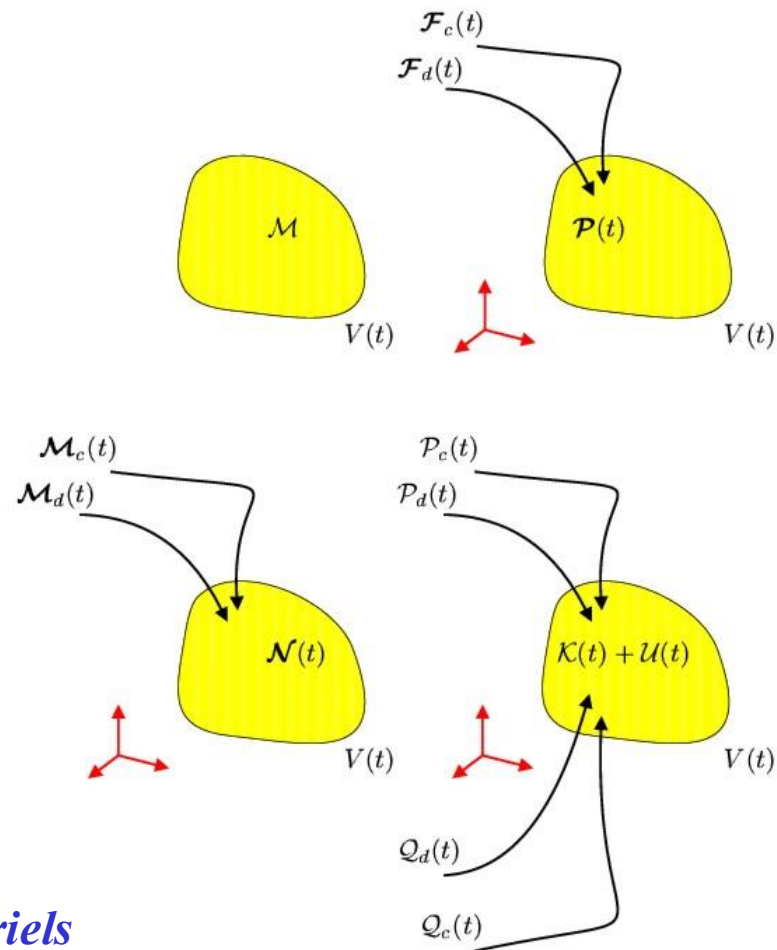
**sous certaines conditions
de continuité..**

Forme locale

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

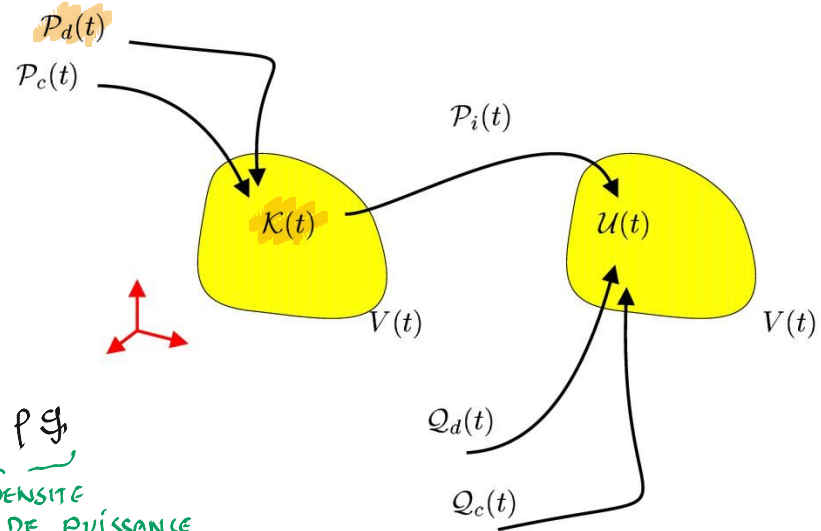
satisfaite en tout point et à tout instant

Toutes les lois de conservation, en un clin d'oeil...



*Forme globale
pour des volumes matériels*

Théorème de l'énergie mécanique



$$\underbrace{\underline{v} \cdot p \frac{D\underline{v}}{Dt}}_{\text{VARIATION TEMPORELLE DE LA DENSITE D'ENERGIE CINETIQUE}} = \underbrace{\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}}_{\text{DENSITE DE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE}} + \underbrace{\underline{v} \cdot p \underline{g}}_{\text{DENSITE DE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE}}$$

VARIATION
TEMPORELLE
DE LA DENSITE
D'ENERGIE CINETIQUE

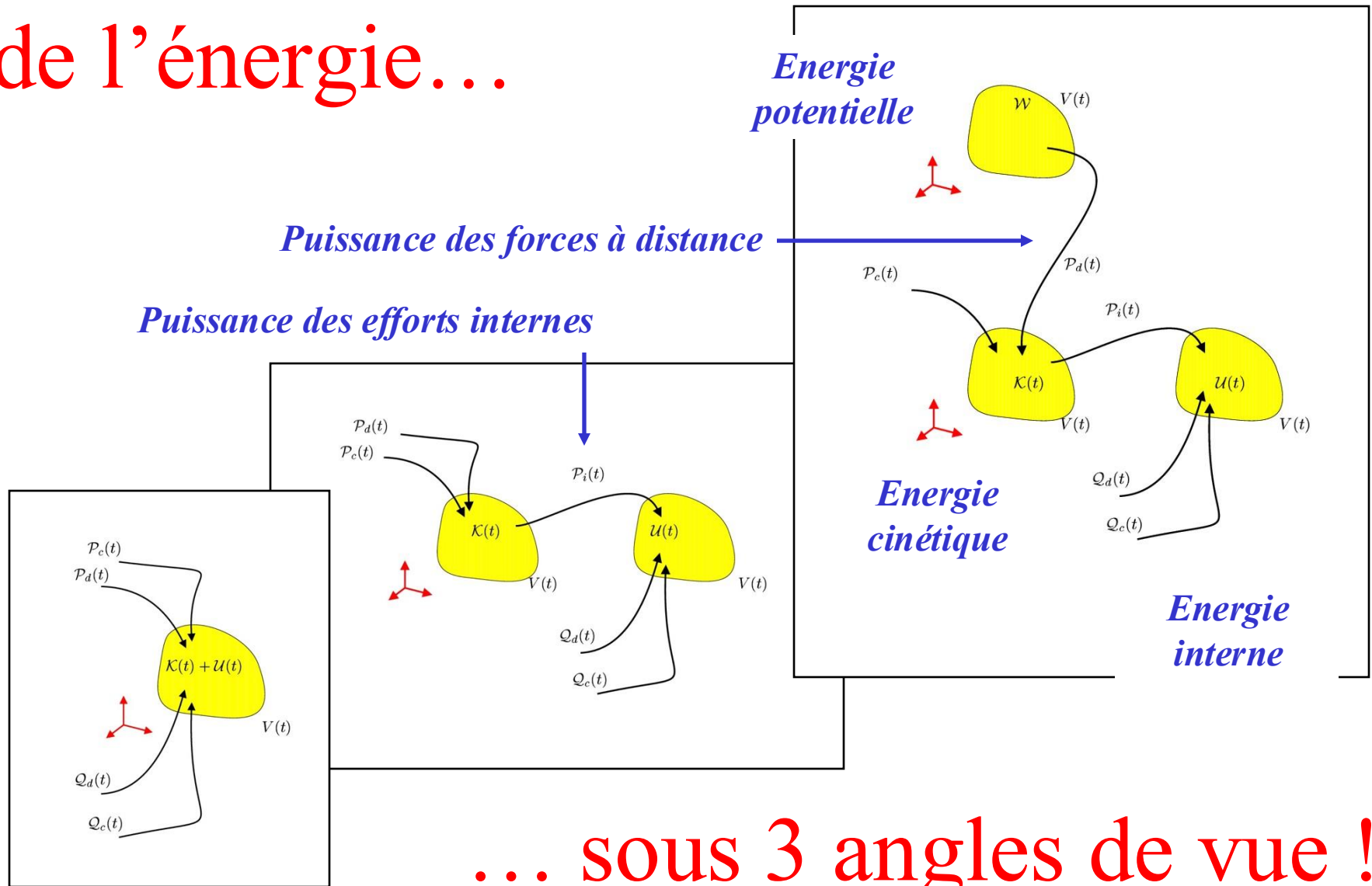
$$= \underbrace{\underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}})}_{\text{DENSITE DE PUISSANCE DES FORCES DE CONTACT}} - \underbrace{(\underline{\nabla} \underline{v}) : \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}_{\text{DISSIPATION VISQUEUSE}}$$

$$- \underbrace{(\underline{\nabla} \underline{v} + \underline{\nabla} \underline{v}^T) : \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}_{\text{ANTI SYM}} - \underbrace{(\underline{\nabla} \underline{v} - \underline{\nabla} \underline{v}^T) : \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}_{\text{SYM}}$$

$$P_i = \int_{V(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, d\Omega$$

DISSIPATION
VISQUEUSE

Conservation de l'énergie...



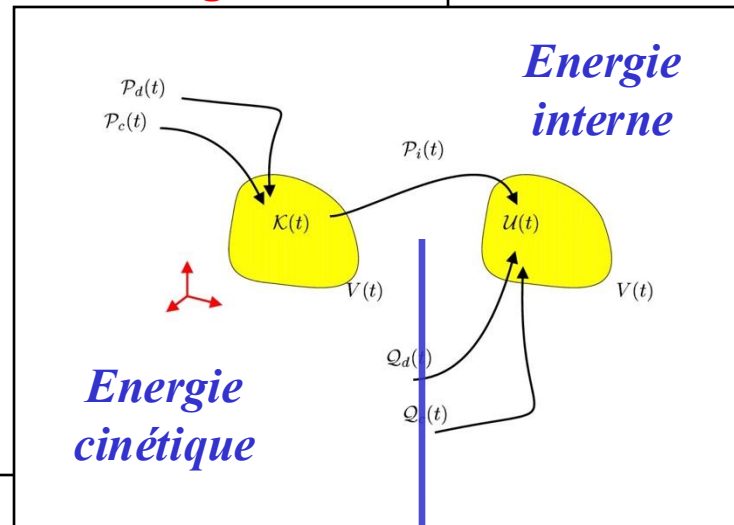
... sous 3 angles de vue !

Puissance des efforts internes

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie interne

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \sigma : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

Formes globales



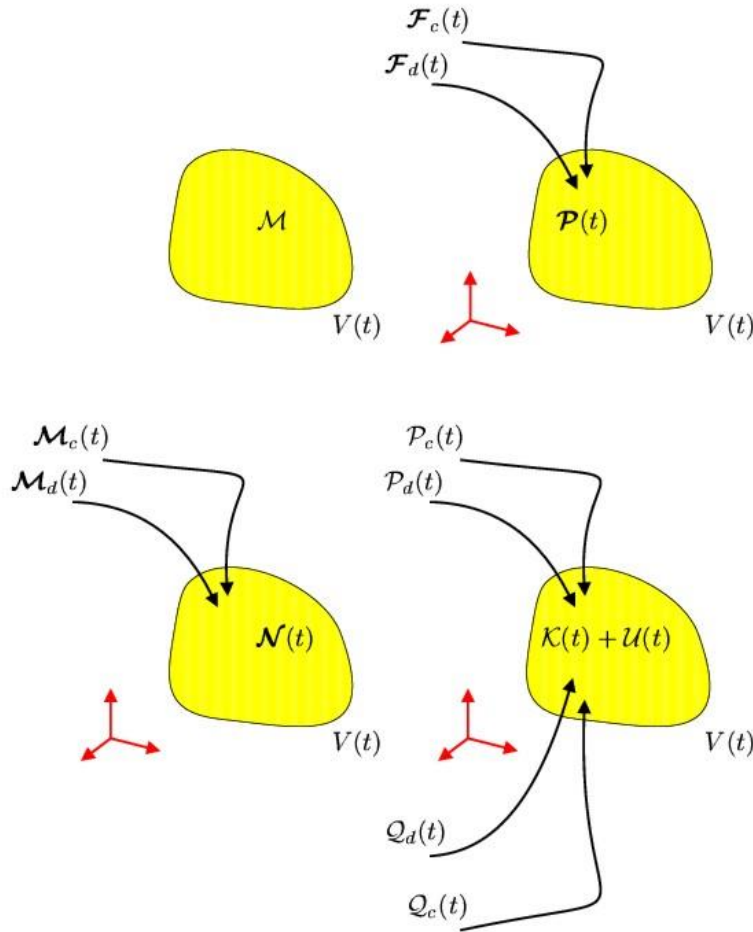
$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \sigma : \mathbf{d}$$

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie cinétique

Puissance des efforts internes

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_{V(t)} \sigma : \mathbf{d} dV$$

Comment retrouver les équations locales ?

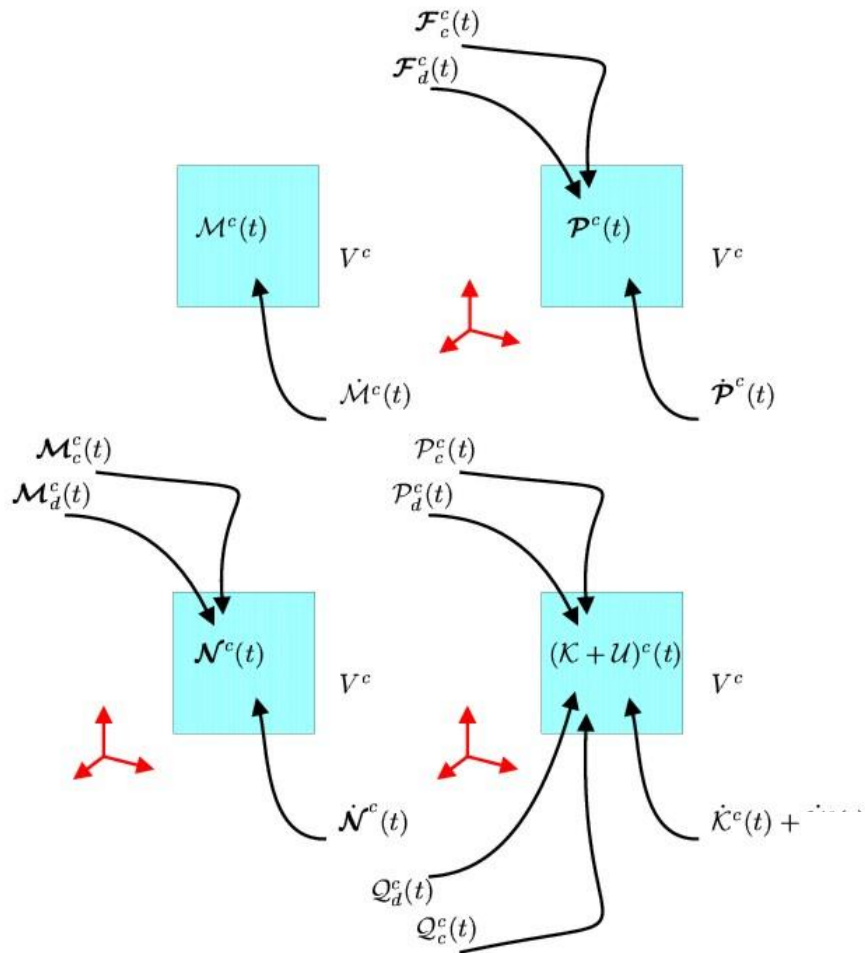


$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q},$$

Comment retrouver les équations locales ?



TENSEUR DE CAUCHY

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}.$$

FLUX DE CHALEUR

Deux formes locales strictement équivalentes !

$t(n) = \sigma^T \cdot n$ $\sigma = \sigma^T$ $q(n) = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{---} \mathcal{L}}}{q} \cdot n$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$ $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g}$ $\rho \frac{DU}{Dt} = \sigma : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$
---	---

*Forme locale
dite non-conservative*

*Forme locale
dite conservative*

$t(n) = \sigma^T \cdot n$ $\sigma = \sigma^T$ $q(n) = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{---} \mathcal{L}}}{q} \cdot n$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ $\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g}$ $\frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) = \sigma : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$
---	---

Trois nouveaux acteurs dans notre modèle !

Pression

$$\sigma = -p\delta + \tau$$

Tenseur des extra-contraintes

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Enthalpie

Un peu d'algèbre

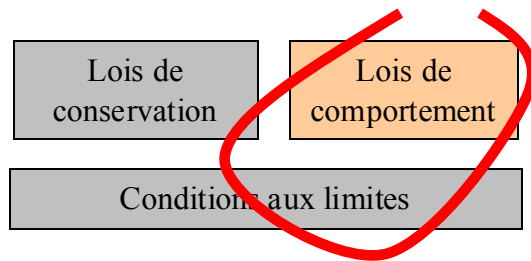
$$H = U + \frac{p}{\rho}$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \rho \left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) \\ &= \rho \frac{DU}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.\end{aligned}$$

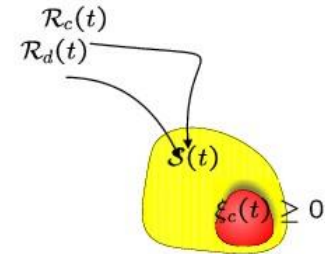


$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0}.\end{aligned}$$

Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.



*Second principe de la thermodynamique,
Modèle du fluide visqueux newtonien*



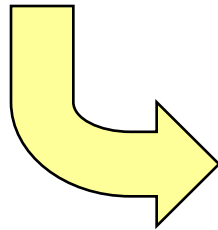
Les équations de comportement ne peuvent pas être écrites n'importe comment !
Il faut respecter certaines règles !

En particulier, il faut les écrire afin que le **second principe de la thermodynamique** soit toujours satisfait.

Quelques jolis tenseurs pour construire notre modèle...

$$\nabla \mathbf{v} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right)}_{\mathbf{d}} + \left(\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \right)$$

*Tenseur des taux de
déformation*



$$\mathbf{d} = \underbrace{(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3}}_{\mathbf{d}^s} + \underbrace{(\mathbf{d} - (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3})}_{\mathbf{d}^d}$$

*Partie sphérique du
tenseur des taux de
déformation*

*Partie déviatoire du
tenseur des taux de
déformation*

*Viscosité de
volume*

*Viscosité de
cisaillement*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p, T)\boldsymbol{\nabla}T, \quad \text{Conductibilité
thermique}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \hat{\rho}(p, T), \\ H &= \hat{H}(p, T), \\ S &= \hat{S}(p, T).\end{aligned}$$

L'équation de comportement pour
l'entropie n'est utile que pour vérifier que
le second principe est bien satisfait !

$$TdS = dH - \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{pd\rho}{\rho^2},$$

$$k \geq 0,$$

$$\kappa \geq 0,$$

$$\mu \geq 0.$$

Contraintes à
respecter
pour satisfaire
Clausius-Duhem

Modèle du fluide visqueux newtonien

Quelques ordres de grandeur

TABLE 2.3.1 / The Viscosity of Some Familiar Materials at Room Temperature

<i>Liquid</i>	<i>Approximate Viscosity (Pa·s)</i>
Glass	10^{40}
Molten glass (500°C)	10^{12}
Asphalt	10^8
Molten polymers	10^3
Heavy syrup	10^2
Honey	10^1
Glycerin	10^0
Olive oil	10^{-1}
Light oil	10^{-2}
Water	10^{-3}
Air	10^{-5}

Adapted from Barnes et al. (1989).

$$\sigma = -p\delta + 3\hat{\kappa}(p, T)d^s + 2\hat{\mu}(p, T)d^d,$$

$$\mathbf{q} = -\hat{k}(p, T)\nabla T,$$

$$\rho = \hat{\rho}(p, T),$$

$$H = \hat{H}(p, T),$$

$$S = \hat{S}(p, T).$$

Le compte
est bon !

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	$\mathbf{v}$	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	σ	6
constitution pour le flux calorifique	$\mathbf{q}$	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

Remarque : si une équation de comportement pour l'enthalpie est donnée... on en déduit automatique l'énergie interne et vice-versa.

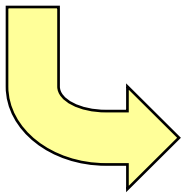
$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Modèle de gaz idéal

$$\hat{\rho}(p, T) = \frac{p}{R_* T}$$

Constante du gaz

Un exemple
d'équation d'état pour
la masse volumique



Ecoulements compressibles

Propagation des sons au sein de l'air : c'est un effet de la compressibilité de l'écoulement.

Caractérisation par le nombre de Mach

Presque comme en thermo...

*Concentration molaire
[mole/m³]*

$$\boxed{\rho} = \boxed{c} \boxed{M}$$

*Masse volumique
[kg/m³]*

*Masse molaire
[kg/mole]*

$$pV = nRT$$

$$c = \frac{n}{V}$$

$$c = \frac{p}{RT}$$

Constante des gaz

$$R = 8.314 [J/moleK]$$

$$\rho = \frac{p}{R_* T}$$

Constante du gaz

$$R_{*,air} = \frac{R}{M_{air}} = 287 [m^2/s^2K]$$

$$\hat{H}(p, T)$$

Et la relation
d'état pour
l'enthalpie ⁽¹⁾ ?

$$\hat{H}(p, T) = \left[\frac{\partial H}{\partial T} \right] T + \frac{\partial H}{\partial p} p = U(p, T) + \frac{p}{\rho(p, T)}$$

*Chaleur massique à
pression constante*

$$= \left(\left[\frac{\partial U}{\partial T} \right] - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) T + \left(\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \right) p$$

*Chaleur massique à
volume constant*

$$\beta \triangleq -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{T}$$

*Coefficient de
dilatation
thermique*

$$\gamma \triangleq \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{p}$$

*Coefficient de
compressibilité*

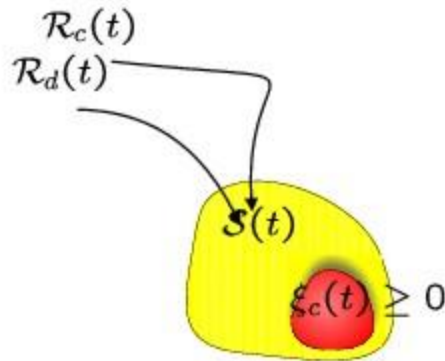
(1) ou l'énergie interne

Il s'agit
donc de définir
une équation d'état pour la
chaleur massique à pression
constante et ...

*Chaleur massique à
pression constante*

$$c_p(p, T) \triangleq \frac{\partial \hat{H}}{\partial T}$$

$$f(p, T) \triangleq \frac{\partial \hat{H}}{\partial p}$$



On ne peut pas écrire
n'importe comment
ces relations d'état !

Second principe de la thermodynamique

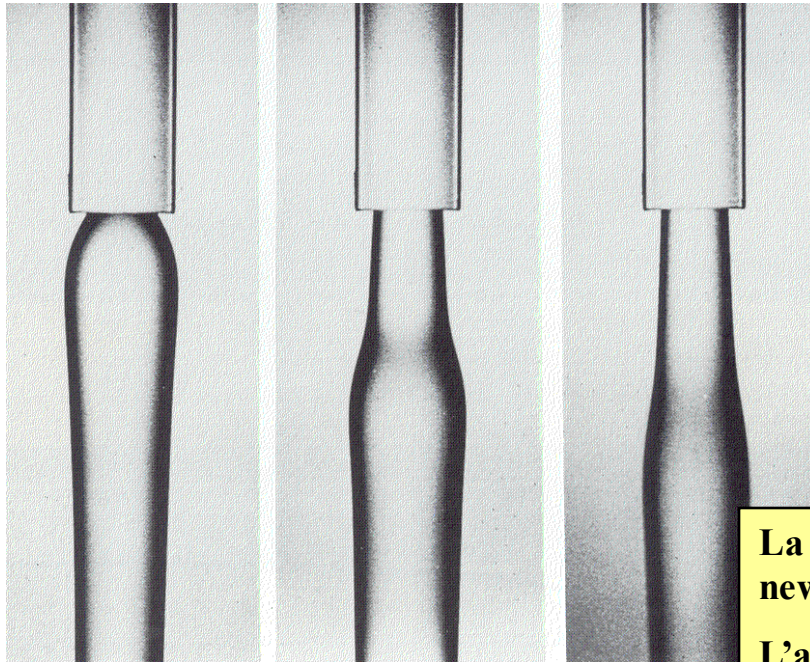
$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \nabla T,$$

Inégalité de Clausius-Duhem : $\rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DU}{Dt} \geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T$

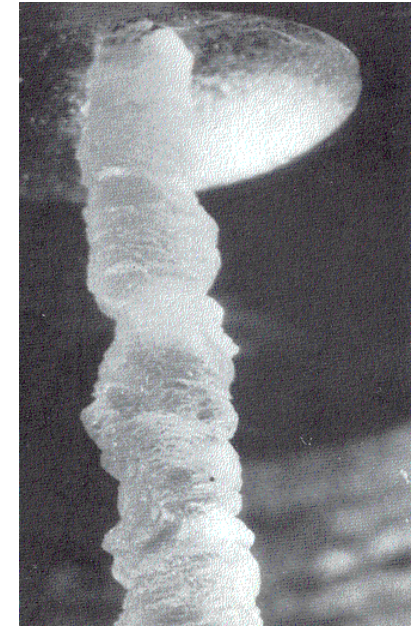
Il faut respecter certaines règles !

En particulier, il faut les écrire afin que le *second principe de la thermodynamique* soit toujours satisfait.

De tels gonflement de jets
sont imprévisibles avec ce
modèle newtonien



(Giesekeus, Rheologica Acta, 68)

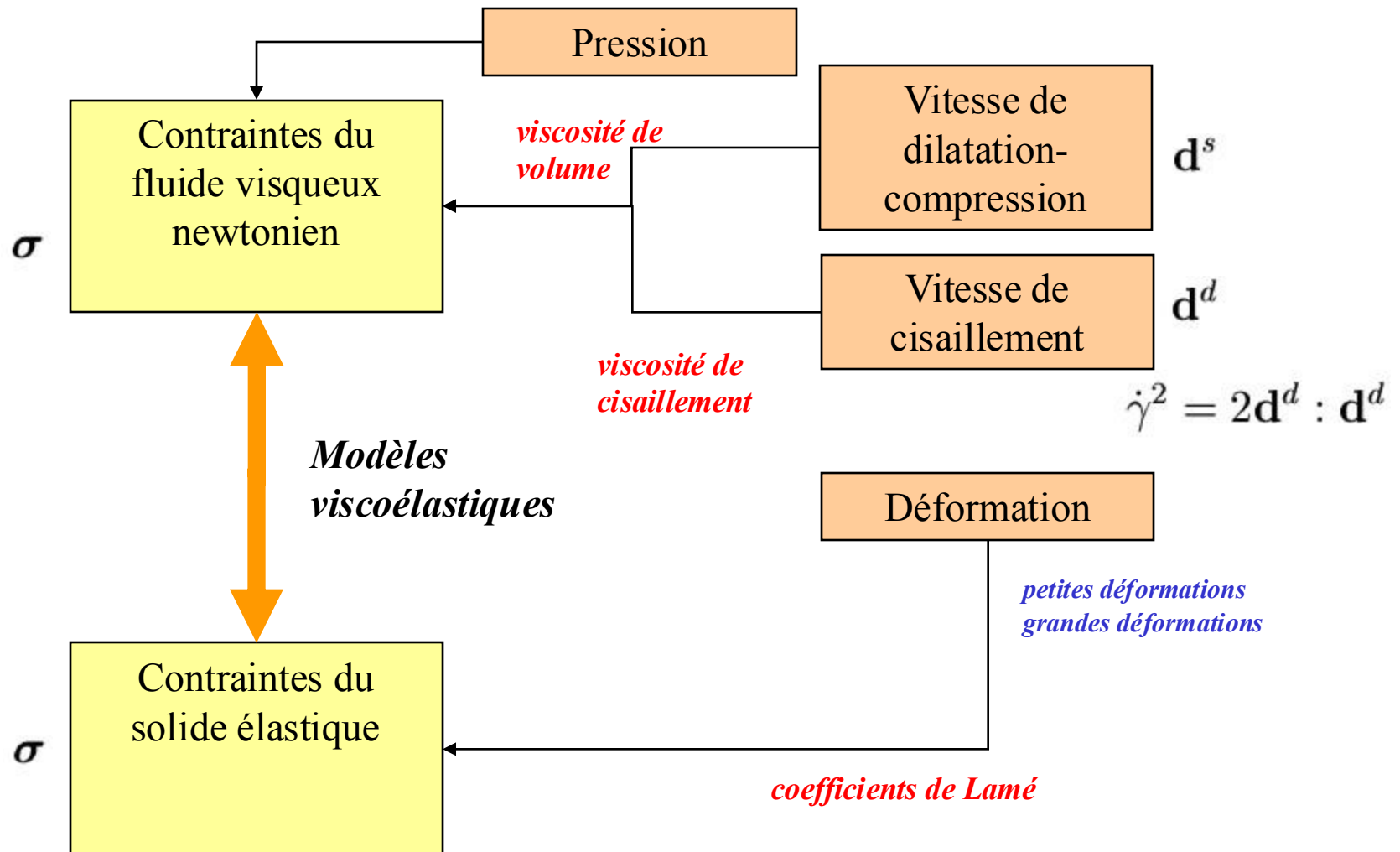


(Piau, JNNFM, 90)

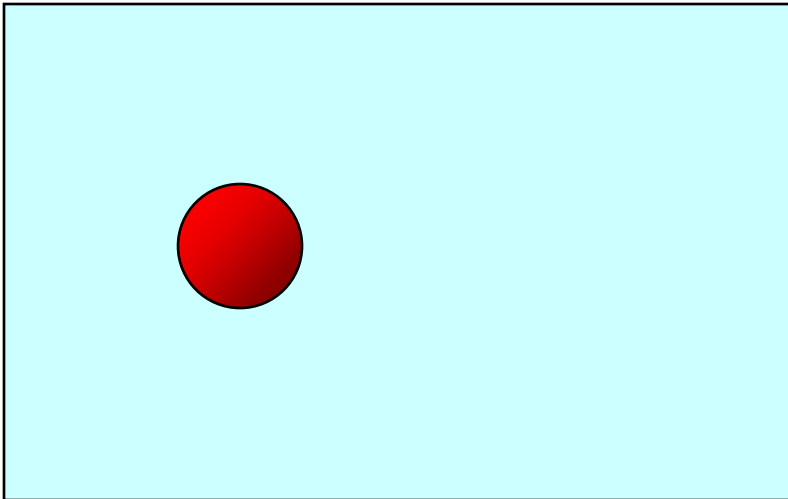
La plupart de fluides réels NE SONT PAS des fluides newtoniens...

L'air et l'eau sont toutefois newtoniens et constituent les fluides les plus largement répandus...

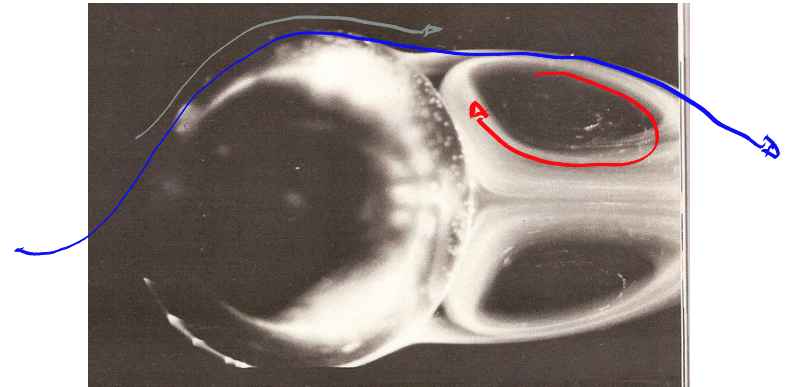
Rhéologie : la science du monde magique des équations de comportement...



Evaluer la force de trainée à
partir d'une mesure du profil de
vitesses en aval...



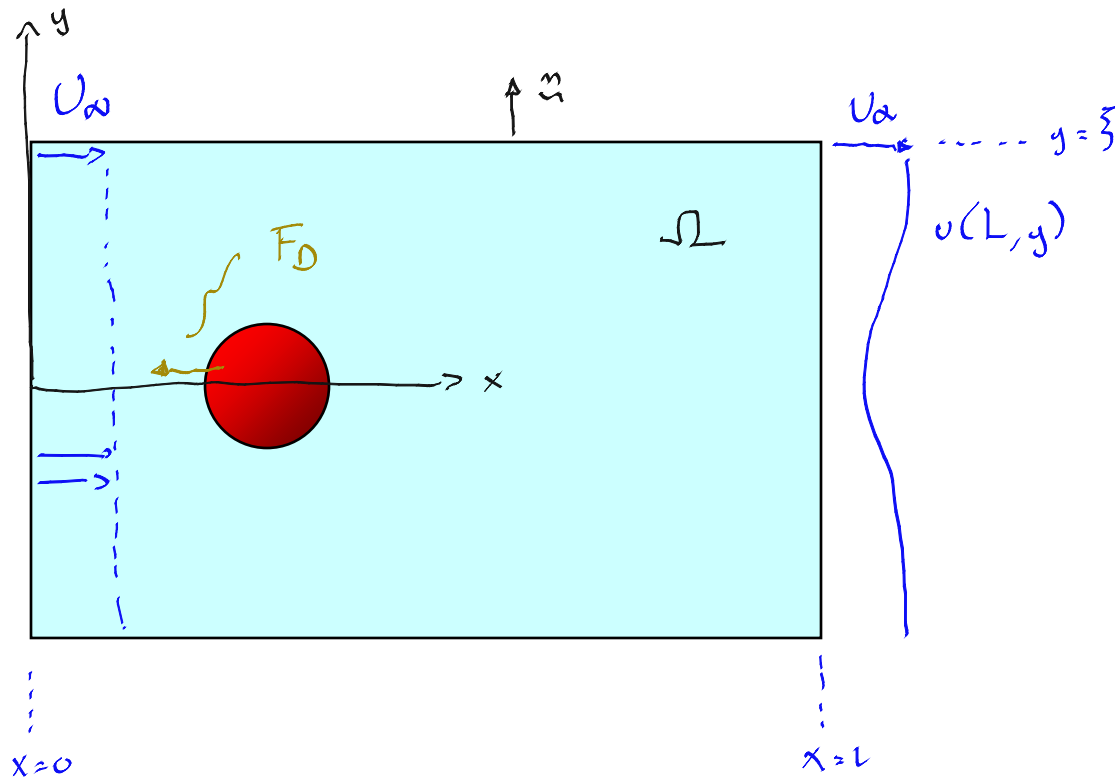
Volume de controle
Ensemble de points eulériens



Taneda 1956

(from An Album of Fluid Motion, Van Dyke)

Volume de contrôle

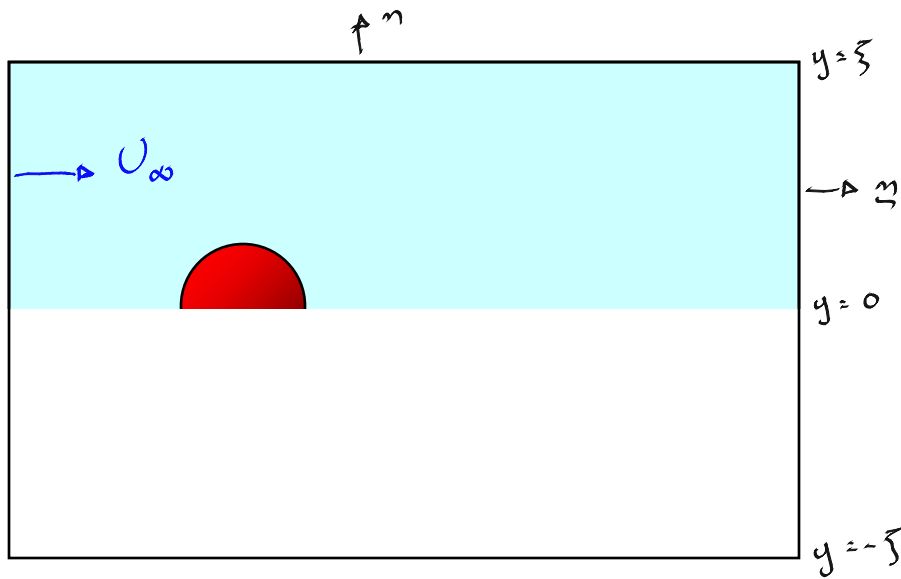


ÉCOULEMENT
2D
STATIONNAIRE
INCOMPRESSIBLE
HORIZONTAL

$$\vec{v} = u \hat{e}_x + v \hat{e}_y$$

FORCE
EXERCÉE
SUR LE FLUIDE
PAR
LE CYLINDRE

$$\int_{\partial\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} = -F_D$$



$$\int_{\partial\Omega} p u \cdot n = -F_D$$

$$2 \left[- \int_0^{\xi} p U_{\infty}^2 + \int_0^{\xi} p u^2 + \int_0^L p U_{\infty} v \, dx \right]$$

$$-F_D = 2p \int_0^{\xi} u^2 - u U_{\infty} \, dy$$

$$p U_{\infty} \int_0^L \int_0^{\xi} \frac{\partial v}{\partial y} \, dy \, dx$$

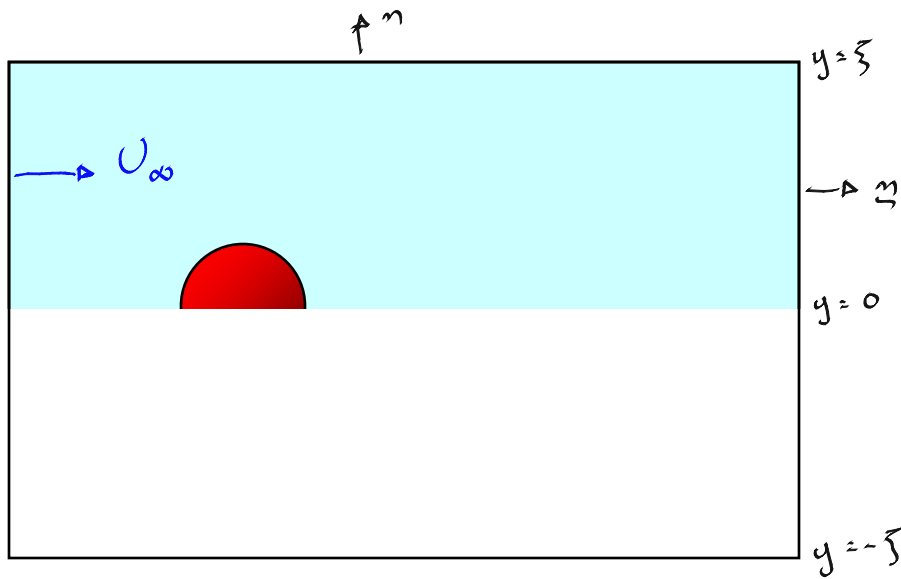
CONSERV
LOCALE
DE
LA MASSE

$$p U_{\infty} \int_0^L \int_0^{\xi} - \frac{\partial u}{\partial x} \, dx \, dy$$

$$U_{\infty} - u$$

OPTION 1

Bilan de la quantité de
mouvement horizontale !



$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} p u \cdot \vec{n}}_{= -F_D} = -F_D$$

$$2 \left[-\int_0^{\xi} p U_{\infty}^2 + \int_0^{\xi} p u^2 + \underbrace{\int_0^L p U_{\infty} v \, dx}_{U_{\infty} \int_0^L p v \, dx} \right]$$

$$-F_D = 2p \int_0^{\xi} u^2 - u U_{\infty} \, dy$$

$$\underbrace{\int_0^{\xi} p U_{\infty} - \int_0^L p v}_{U_{\infty} \int_0^L p v \, dx}$$

CONSERVATION
GLOBALE
DE LA
MASSE

OPTION 2

Bilan de la quantité de
mouvement horizontale !

$$-F_D = 2\rho \int_0^{\xi} v^2 - v U_\infty dy$$

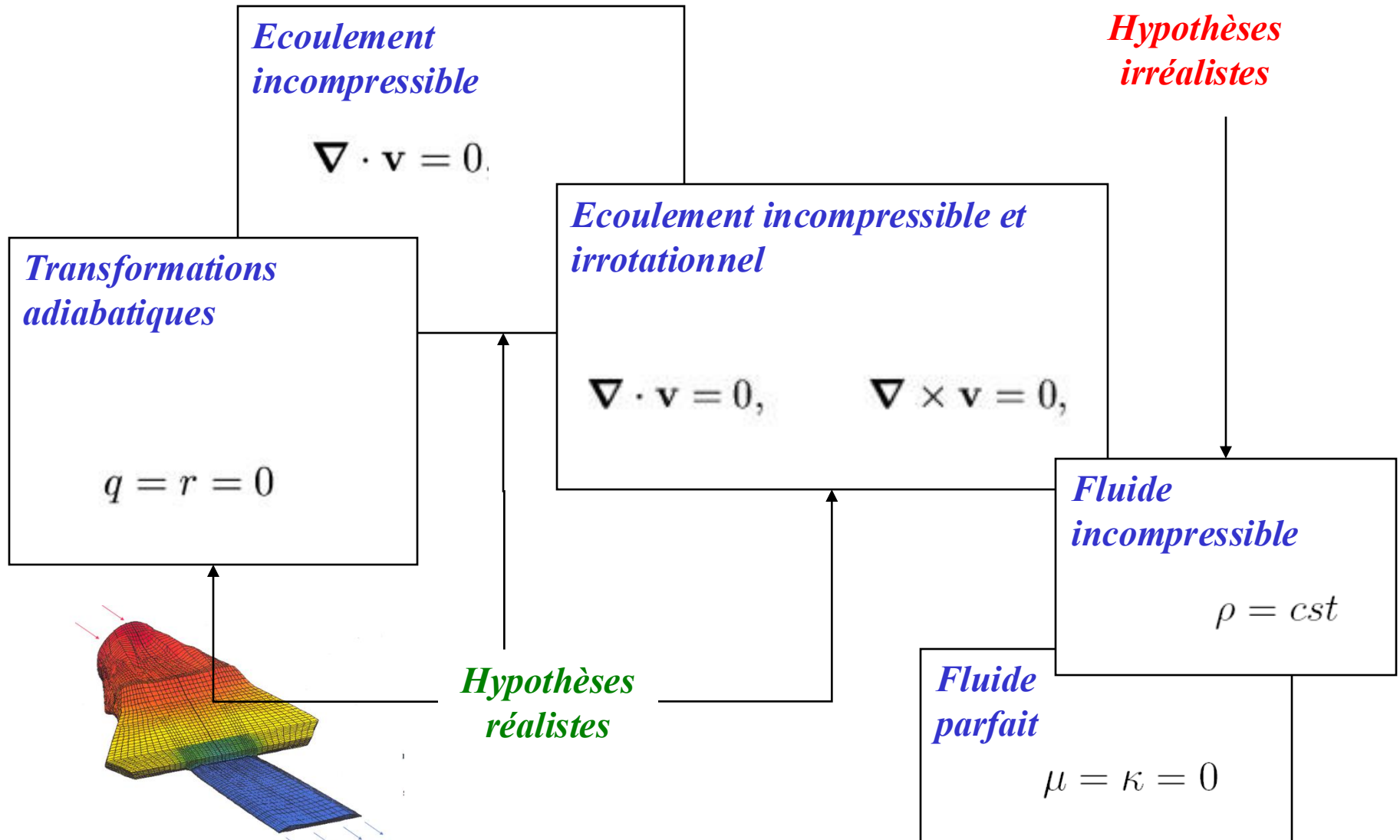
$$\frac{F_D}{2\rho U_\infty^2} = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{v}{U_\infty}}_{[m]} \left(1 - \frac{v}{U_\infty}\right) dy$$

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Et zou, la force de trainée !

Simplifications usuelles...



Donc, simplifions...

Dans un écoulement incompressible, il n'y a pas de raison de distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante.

On écrit simplement le symbole c !

$$\sigma(p, \mathbf{v}) = -p\delta + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$$

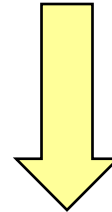
$$\mathbf{q}(T) = -k\nabla T$$

$$U(T) = cT$$

*Fluide newtonien
à paramètres
matériels constants*

*Ecoulement
incompressible*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$



Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \nabla^2 T,$$

**Ecoulement incompressible d'un
fluide visqueux newtonien à
paramètres constants.**

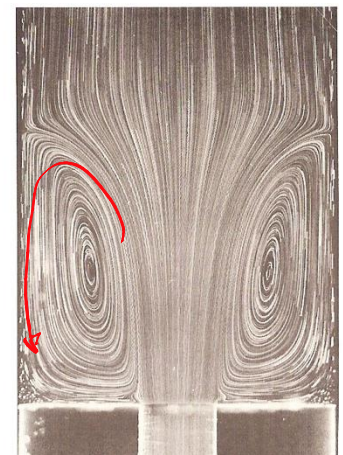
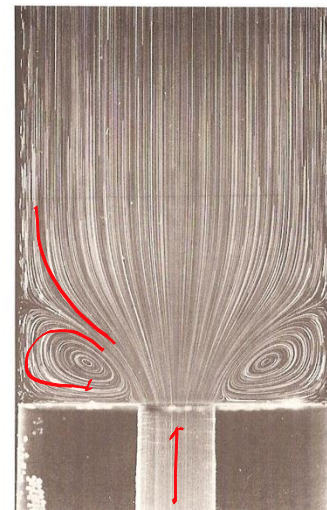
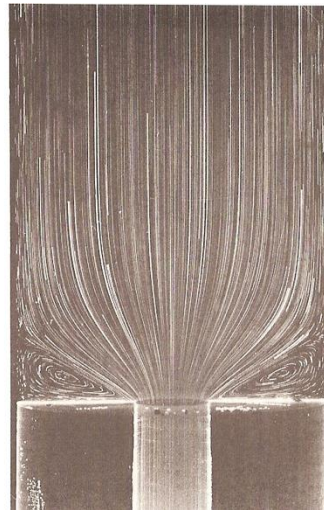
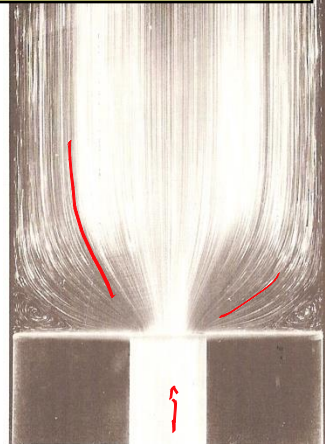
Ecoulements incompressibles stationnaires

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$Re = 5.7 \cdot 10^{-4}$



$Re = 1.25 \cdot 10^{-2}$

(Boger, Hur, Binnington, JNFM 1986)