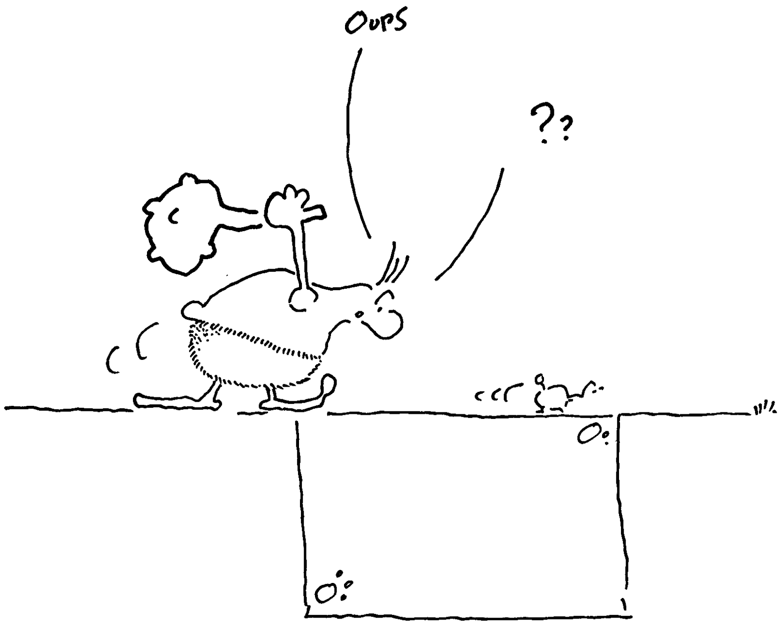
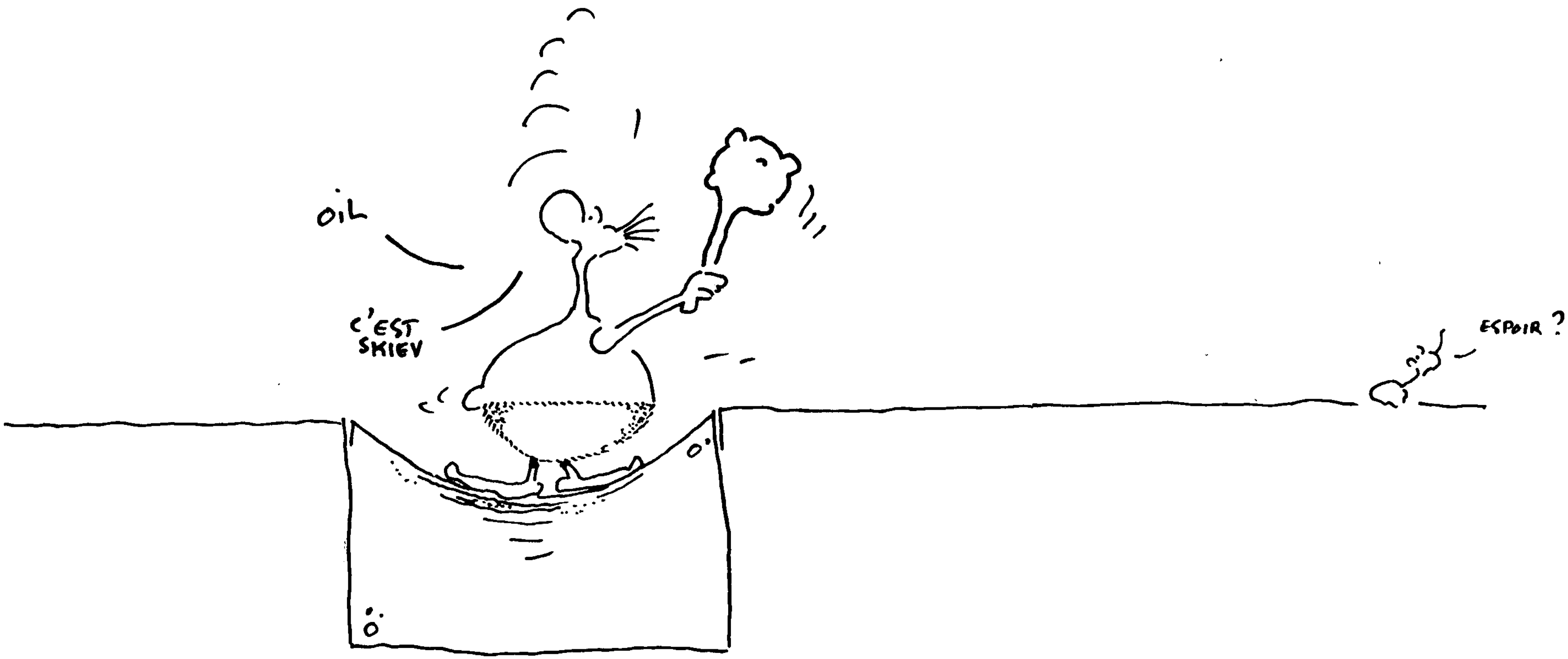
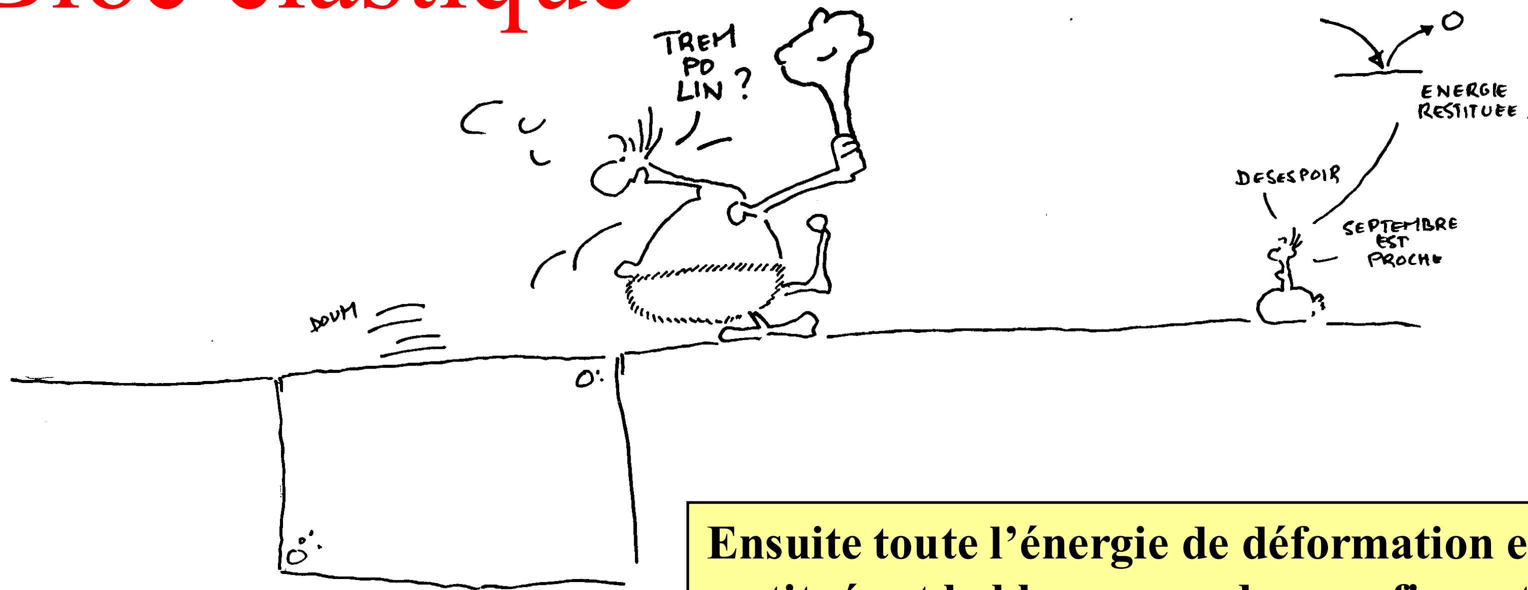
Elastique ou visqueux ?





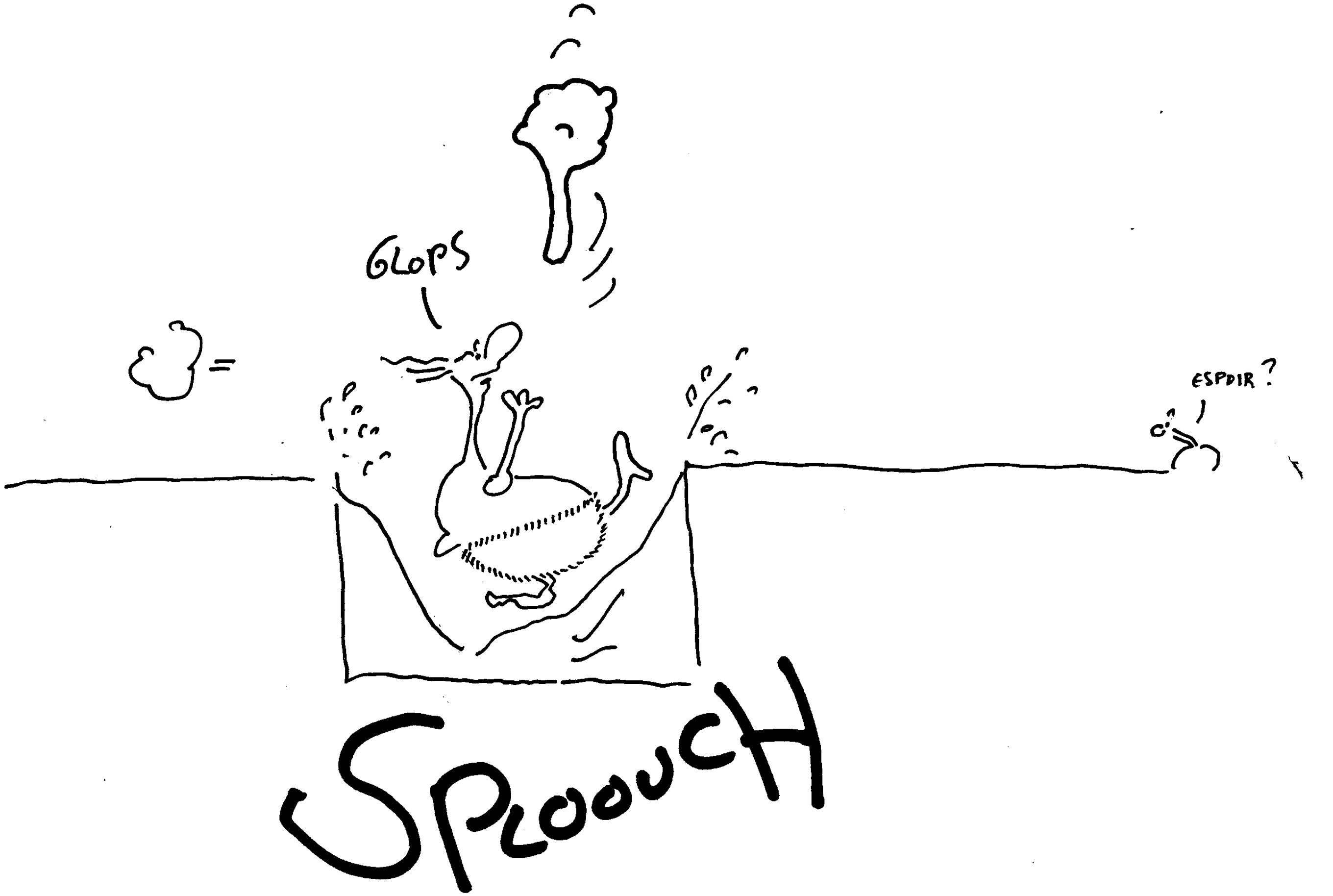
Le bloc exerce une force proportionnelle au déplacement exercé par le monstre.
Une énergie de déformation y est stockée…

Bloc élastique



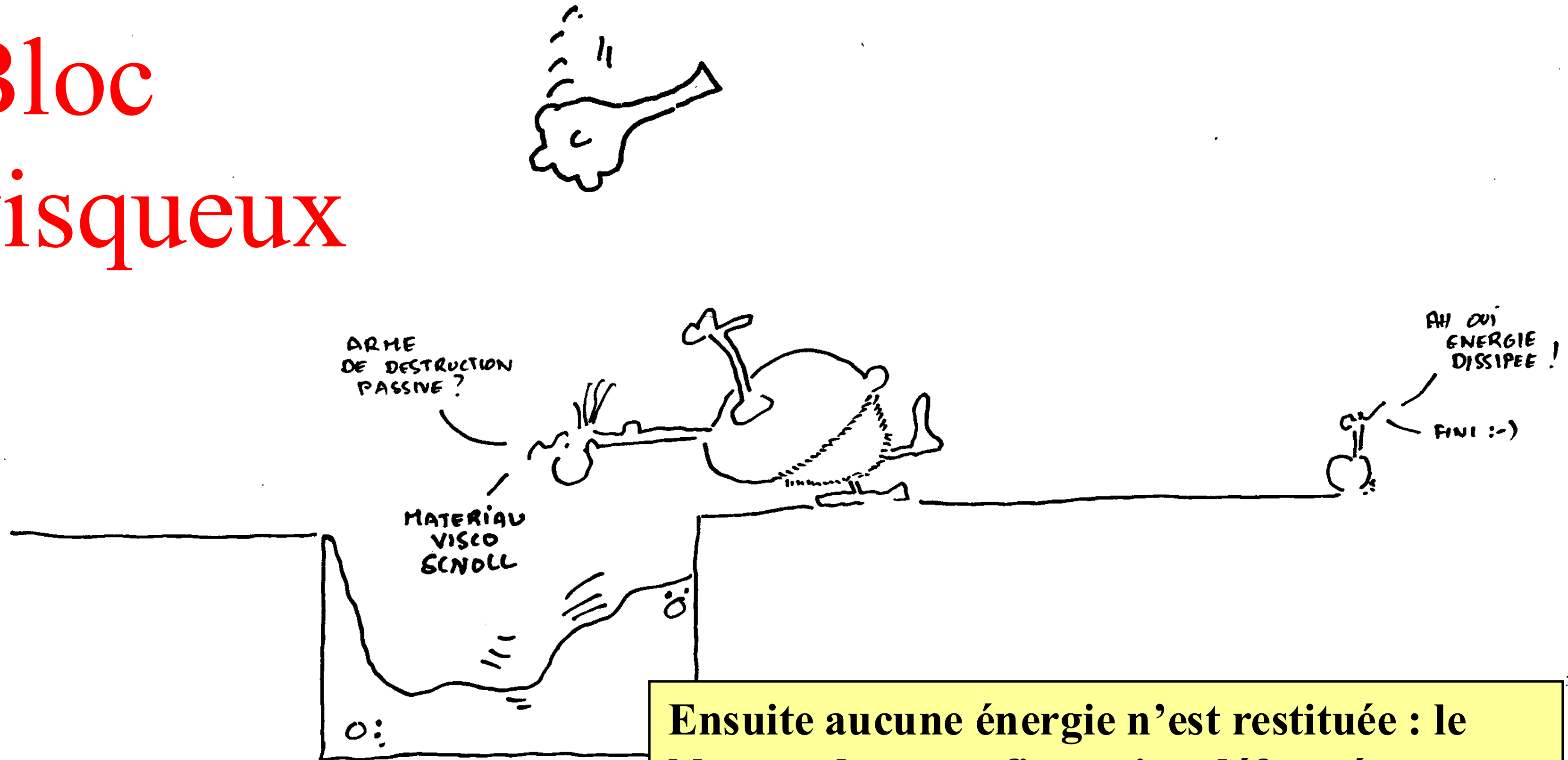
Ensuite toute l'énergie de déformation est restituée et le bloc reprend sa configuration initiale.
Le bloc s'est souvenu parfaitement de sa configuration initiale : il s'agit d'un matériau à mémoire parfaite.

Le bloc a le comportement d'un ressort !



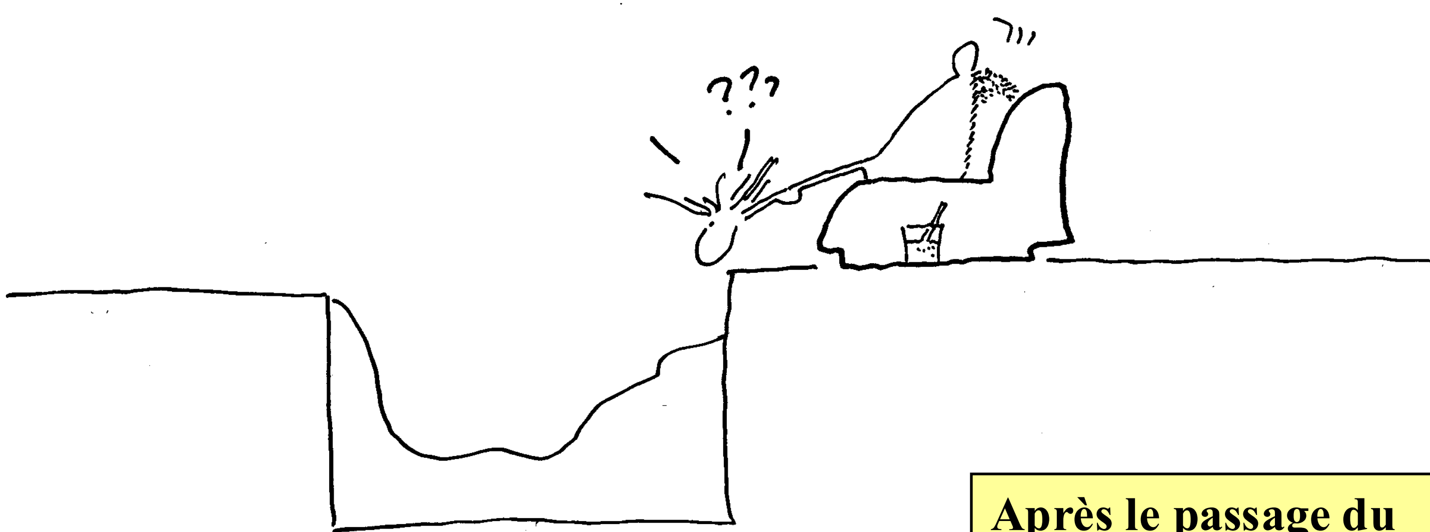
Le bloc exerce une force proportionnelle au taux de déformation
Une énergie y est dissipée en chaleur…

Bloc visqueux



Ensuite aucune énergie n'est restituée : le bloc garde sa configuration déformée.
Le bloc a parfaitement oublié sa configuration initiale : il s'agit d'un matériau à mémoire nulle.

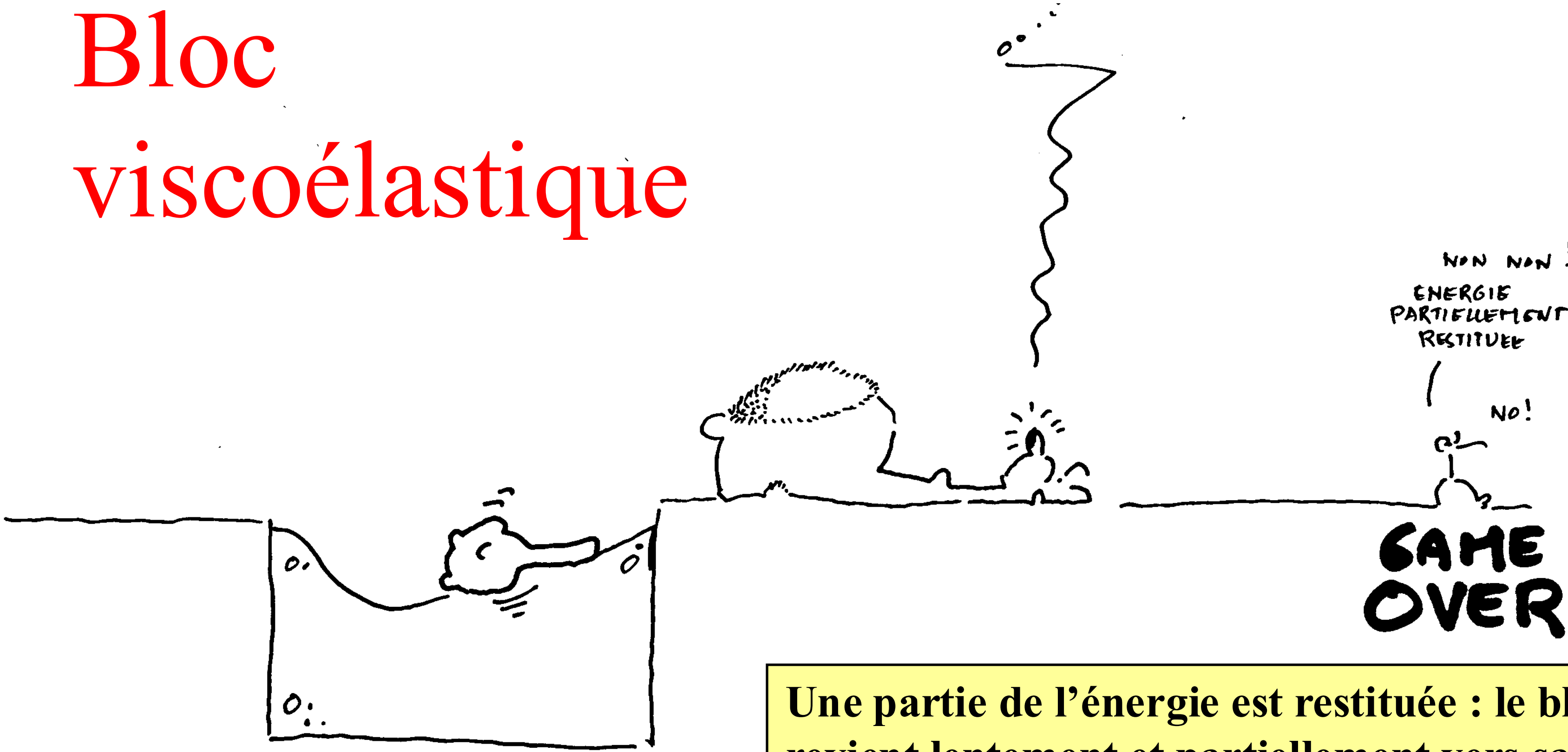
Le bloc a le comportement d'un amortisseur !
On parle aussi de comportement plastique (plasticine !)



Après le passage du monstre…
le bloc garde sa configuration déformée pour toujours.

On parle aussi de comportement plastique (plasticine !)
Notons que le plastique usuel a plutôt un comportement élastique.

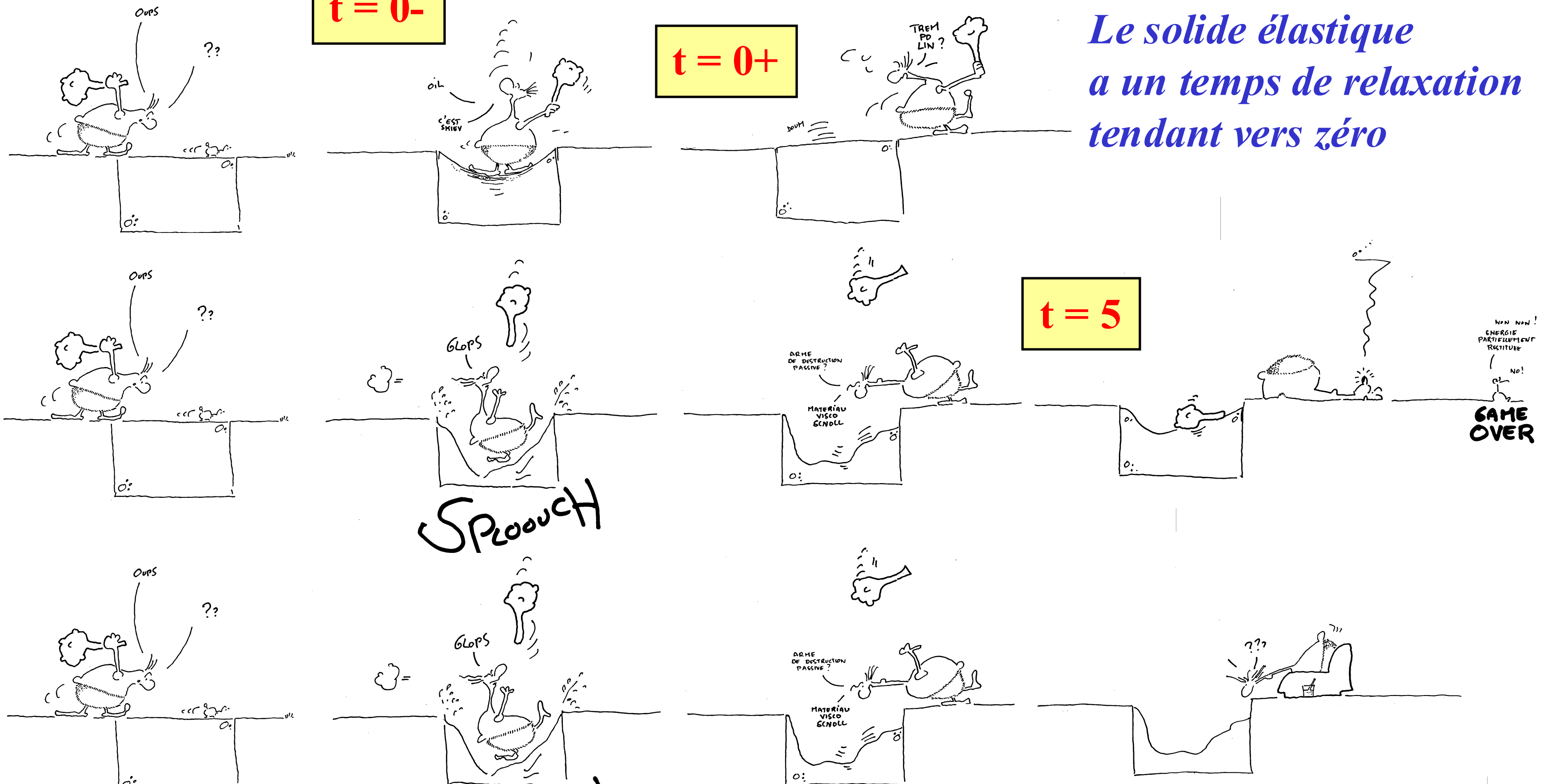
Bloc viscoélastique



Une partie de l'énergie est restituée : le bloc revient lentement et partiellement vers sa configuration initiale.
Le bloc se souvient mieux du passé récent que du passé lointain : il s'agit d'un matériau à mémoire évanescente.

Tous les matériaux sont viscoélastiques…
Ils ont juste des temps de relaxation très différents.

Temps de relaxation



t = 0-

t = 0+

Le solide élastique
a un temps de relaxation
tendant vers zéro

t = 5

Le fluide visqueux newtonien a un temps de relaxation tendant vers l'infini

t = 100000000000000

Ni le temps de relaxation, ni le pourcentage d'énergie dissipée n'est une constante pour un matériau !

En particulier, cela dépend des sollicitations que le matériau doit subir et en particulier de la fréquence de celles-ci !

Les lois de comportement (*constitutive laws*) basées sur des expériences permettent de caractériser le comportement d'un matériau qui subit des sollicitations.

Et le thermique…

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

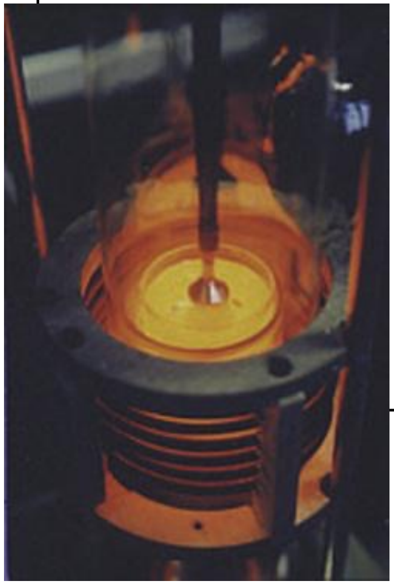
Etape 1

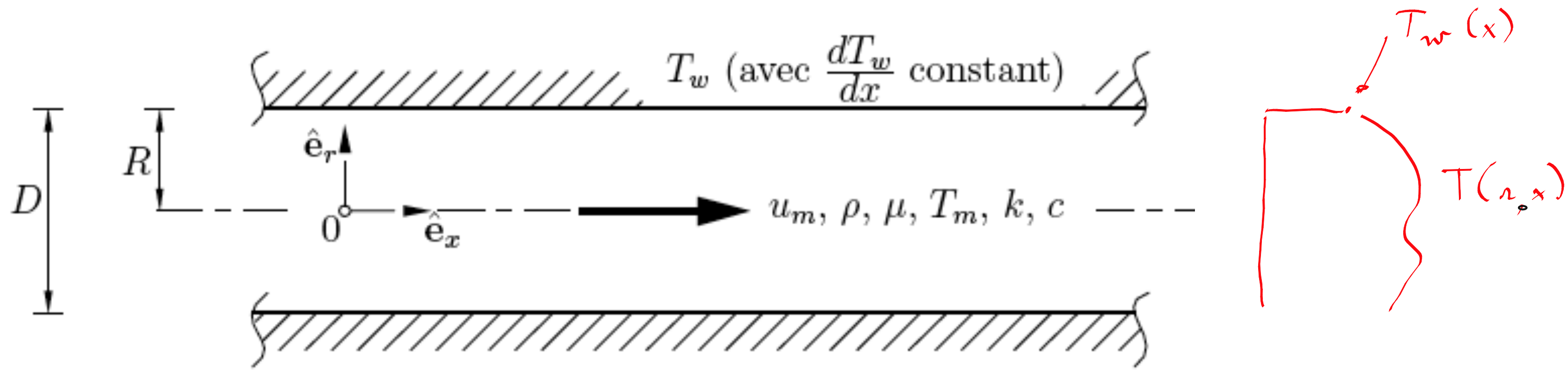
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned}$$

Etape 2

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k \nabla^2 T,$$

Une fois la dynamique de l'écoulement connue, on peut ensuite résoudre le problème thermique…



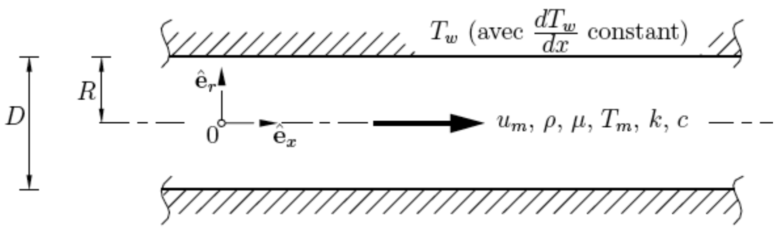


$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(T - T_w) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la coonduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

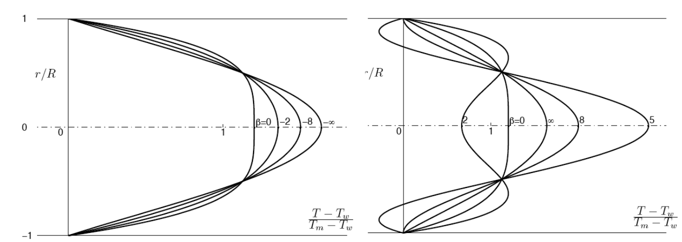


T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}(T - T_w)\right) + 16\,\mu \frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w)\right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8} \frac{\rho\, c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T_w linéaire

Un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre deux effets !

$$\beta = \rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, \frac{R^2}{\mu\, u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\beta\, \boxed{\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

Effets de convection
Transport de l'énergie

Le petit frère de Re : Péclet !

DIFFUSION DE LA QUANTITE DE MVT

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \rho(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v} = \mu \underset{\sim}{\nabla}^2 \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{\nabla} p$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \qquad \rho c(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla}) T = 2\mu\, \underset{=}{d} : \underset{=}{d} + k \underset{\sim}{\nabla}^2 T$$

TRANSPORT

DIFFUSION DE PUISSANCE

$$Re = \frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\rho\, U^2/L}{\mu\, U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

$$Pe = \frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\rho c\, U \Delta T/L}{k\, \Delta T / L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{c\mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Le petit frère de Reynolds : Péclet

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\underbrace{\boxed{\rho c(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})T}}_{\mathcal{O}(\rho c U \Delta T / L)} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + \underbrace{\boxed{k\boldsymbol{\nabla}^2 T}}_{\mathcal{O}(k \Delta T / L^2)}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

$$Pe = \frac{\boxed{\text{Energie transportée}}}{\boxed{\text{Energie diffusée}}} = \frac{\rho c U \Delta T / L}{k \Delta T / L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

Oui : c'est bien le petit frère !

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla} p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvementc

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Péclet

caractérise le transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide !

$$Pe = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$$

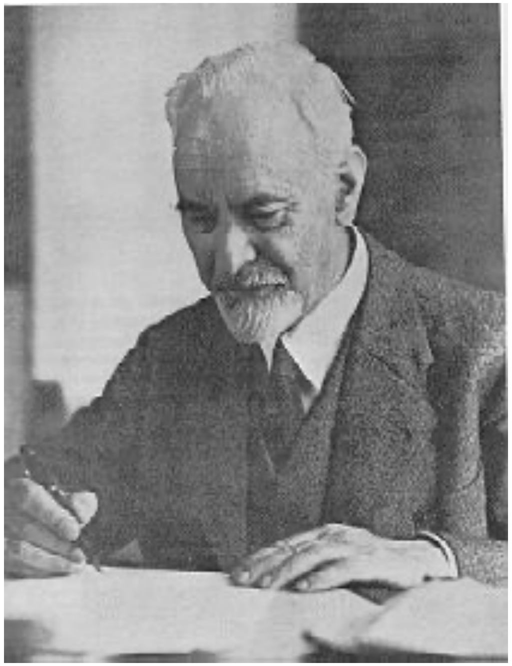
Born: 10 Feb 1793 in Besancon, France

Died: 6 Dec 1857 in Paris, France

$$\frac{\text{Puissance transportée}}{\text{Puissance diffusée}}$$

à savoir !

Nombre de Prandtl



Born: 1875 in Freising, Germany

Died: 1953 in Gottingen, Germany

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

caractérise un fluide !

Peclet = Effets de convection / effets de conduction

Reynold = Effets d'inertie / effets de viscosité

à savoir !

Le nombre adimensionnel sans nom !

$$\beta = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu U_m}$$

$$\underbrace{\rho(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v}}_{} = \mu \underset{\sim}{\nabla}^2 \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{\nabla} p$$

$$\underbrace{\rho c(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla}) T}_{\text{TRANSPORT}} = \underbrace{2\mu\, \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}}_{\text{DISSIPATION VISQUEUSE}} + \underbrace{k \underset{\sim}{\nabla}^2 T}_{\text{DIFFUSION}}$$

$$\rho c U \Delta T / L \qquad \mu U^2/L^2 \qquad k \Delta T / L^2$$

$$Ec = \frac{\overbrace{\rho U^2/L}^{\text{FORCE}} \;\; \overbrace{U}^{\text{VITESSE}}}{\underbrace{\rho c U \Delta T / L}_{\text{PUISSANCE}}} = \frac{U^2}{c \Delta T} = \frac{\text{ENERGIE CINETIQUE}}{\text{ENERGIE INTERNE}}$$

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\mu U^2/L^2}{k \Delta T/L^2} = \underbrace{\frac{\mu U^2}{k \Delta T}}_{Ec \;\; Pr}$$

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \beta = \frac{\rho c U \Delta T / L}{\mu U^2/L^2} = \frac{\rho c \Delta T L}{\mu U} = \underbrace{\frac{\rho U L}{\mu} \; \frac{c \Delta T}{U^2}}_{Re / Ec}$$

$$E_c = \frac{\overbrace{\rho U^2/L}^{\text{FORCE}} \;\; \overbrace{U}^{\text{VITESSE}}}{\underbrace{\rho c U \Delta T / L}_{\text{PUISSANCE}}} = \frac{U^2}{c\,\Delta T} = \frac{\text{ENERGIE CINETIQUE}}{\text{ENERGIE INTERNE}}$$

Et notre ami Eckert !

Une grande famille !

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T \quad \mathcal{O}(\rho c U\Delta T/L)} = \boxed{2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) \quad \mathcal{O}(\mu U^2/L^2)} + r + \boxed{k\boldsymbol{\nabla}^2 T \quad \mathcal{O}(k\Delta T/L^2)}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

$$Pe = \frac{\textcolor{red}{\blacksquare}}{\textcolor{green}{\blacksquare}} \qquad Pr\ Ec = \frac{\textcolor{blue}{\blacksquare}}{\textcolor{green}{\blacksquare}} \qquad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{\textcolor{red}{\blacksquare}}{\textcolor{blue}{\blacksquare}}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c\Delta T} = \frac{U^2}{c\Delta T}$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d’un fluide !

$$\frac{\textbf{Energie cinétique}}{\textbf{Energie interne}}$$

Transferts de chaleur stationnaires

$$\rho c(\mathbf{v}\cdot\nabla)T = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T$$

Nombre de Reynolds : Re

Nombre de Péclet : Pe

Nombre de Prandtl : Pr

$Nu = \dfrac{q_w}{k_f\ \Delta T/2R}$

$C_f = \dfrac{\tau_w}{\rho U^2/2}$

Nombre d'Eckert : Ec

Nombre de Nusselt : Nu

Nombre de Biot : Bi

Coeff de frottement : C_f

Nombre de Stanton : St

$Bi = \dfrac{q_w}{k_s\ \Delta T/L}$

Pertes de charges : λ

$St = \dfrac{q_w}{\rho c U \Delta T}$

Nombre de Nusselt

Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

caractérise une condition d'interface !

$$\frac{\text{Flux de chaleur à la paroi}}{\text{Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement}}$$

Nombre de Biot

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

caractérise une condition d'interface !

Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

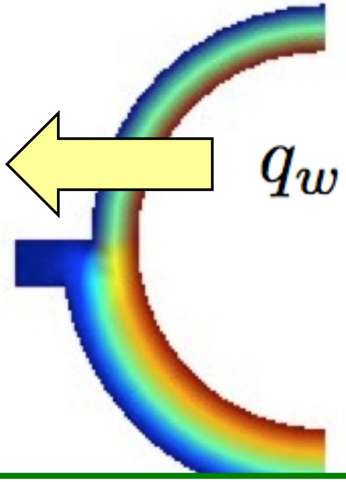
$$\frac{\textbf{Flux de chaleur à la paroi}}{\textbf{Flux de chaleur diffusé dans le solide}}$$

Le Nusselt et le Biot de l'ex-tuyau en plomb de ma salle de bain :-)

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

Ecoulement de l'air dans la salle de bain

Flux conductif de l'air !



Ecoulement de l'eau dans le tuyau !

Flux conductif de l'eau chaude

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

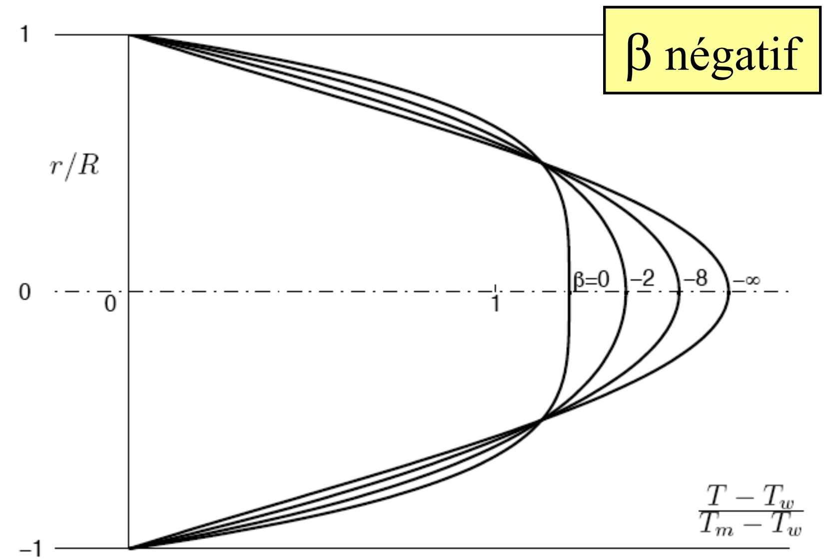
$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

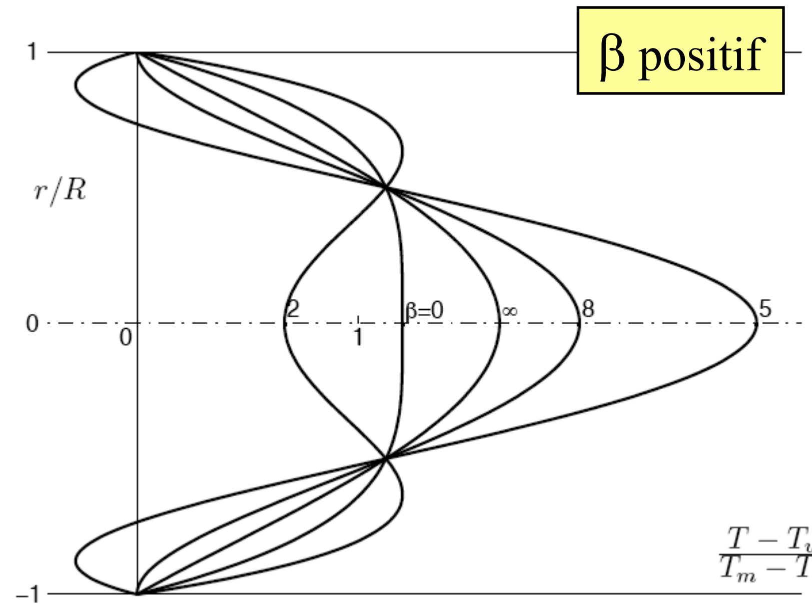
Conduction thermique dans le tuyau : tension thermiques (thermoélasticité !)

Flux conductif dans le plomb

A mi-rayon,
la température
est indépendante
de la valeur
de β !

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{9}{8} \qquad \text{en} \qquad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$



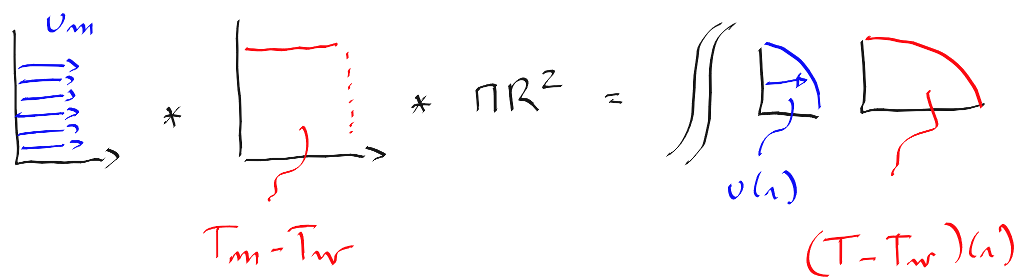


La température moyenne qui n'est pas une moyenne usuelle

$$\int_0^1 \eta - \eta^3 - \eta^5 + \eta^7 \, d\eta = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right]$$

$$= \frac{12 - 6 - 4 + 3}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\pi R^2 u_m (T_m - T_w) = 2 \pi R^2 \, 2 u_m \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\int_0^1 (1-\eta^2)(1-\eta^4)\, \eta \, d\eta - \frac{B}{8} \int_0^1 (1-\eta^2)(3 - 4\eta^2 + \eta^4)\, \eta \, d\eta \right]$$



$$\int_0^1 3\eta - 4\eta^3 + \eta^5 - 3\eta^3 + 4\eta^5 - \eta^7$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \frac{1}{8} = \frac{72 - 48 + 8 - 36 + 32 - 6}{48} = \frac{32 - 10}{48}$$

$$= \frac{22}{48} = \frac{11}{24}$$

Température moyenne

$$u_m \, \pi R^2 \, (T_m - T_w) = 2\pi \, R^2 \, \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \, 2 \, u_m \left[\boxed{\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(1-\eta^4)\,\eta \, d\eta}_{=\frac{10}{48}}} - \frac{\beta}{8} \boxed{\underbrace{\int_0^1 (1-\eta^2)\,(3-4\eta^2+\eta^4)\,\eta \, d\eta}_{=\frac{22}{48}}} \right]$$

$$T_m - T_w \quad = \quad \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$

Cup mixing temperature

Flux de chaleur à la paroi

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\beta\,\boxed{\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Bigg|_{r=R} - \frac{1}{8}\beta\left(-4\left(\frac{2r}{R^2}\right)\Bigg|_{r=R} + \left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Bigg|_{r=R}\right)\right]\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\frac{4}{R} - \frac{1}{8}\beta\left(-\frac{8}{R}+\frac{4}{R}\right)\right]\right]$$

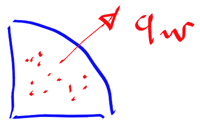
$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$

Flux de chaleur dissipé ?

$$q_w = \frac{\mu v_m^2}{2R}\left[8-\beta\right]$$

$$\boxed{\beta = 0}$$

$$q_w = \frac{4\mu v_m^2}{R}$$



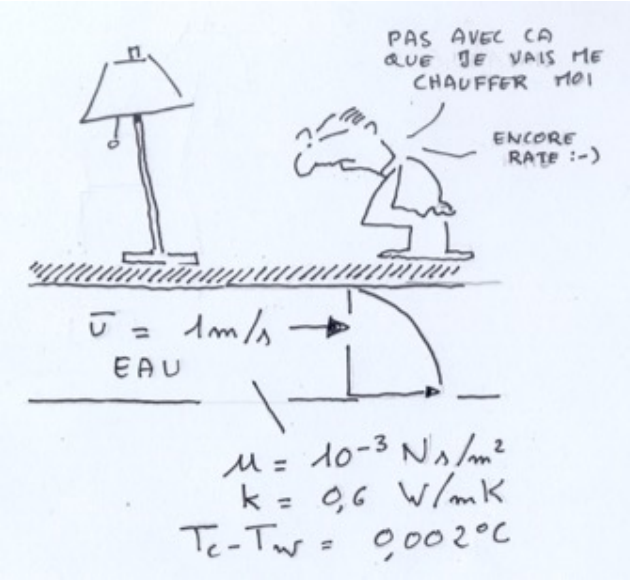
PUISSANCE DISSIPEE

$$\overset{dS}{}$$

$$= 2\pi \int_0^R \mu\,(2v_m)^2\left(\frac{2r}{R^2}\right)^2 r\,dr$$

$$= 2\pi\,\frac{16\mu v_m^2}{R^4}\underbrace{\int_0^R r^3\,dr}_{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}}$$

$$= 2\pi R\,\underbrace{\frac{4\mu v_m^2}{R}}_{q_w}$$



$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

$$q_w = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R} = 4\,k\,\frac{(T_c - T_w)}{R}$$

C'est la chaleur générée par dissipation visqueuse qui s'échappe par la paroi du tuyau !

Flux de chaleur à la paroi
T_w constante

$$\boxed{q_w = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}}$$

Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

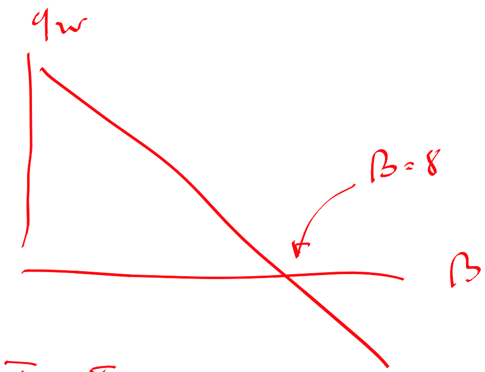
$$\boxed{T_m - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\;\frac{5}{6}}$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}\;\frac{k}{\mu\, {u_m}^2}\;\frac{6}{5}\;\frac{2R}{k} = \frac{48}{5} = 9.6$$

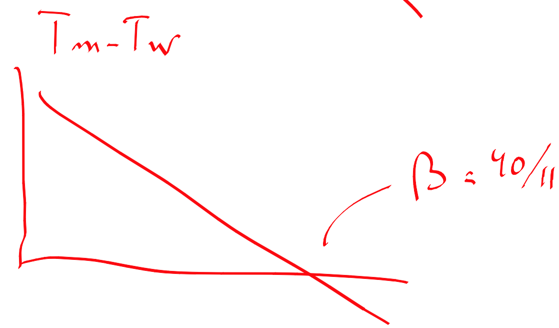
T_w constante
Nombre de Nusselt

$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$



Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$T_m - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right]$$



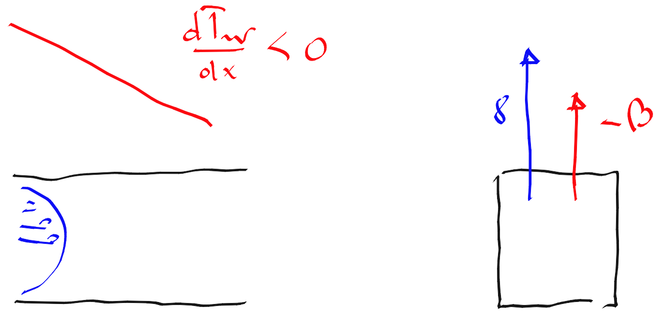
L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

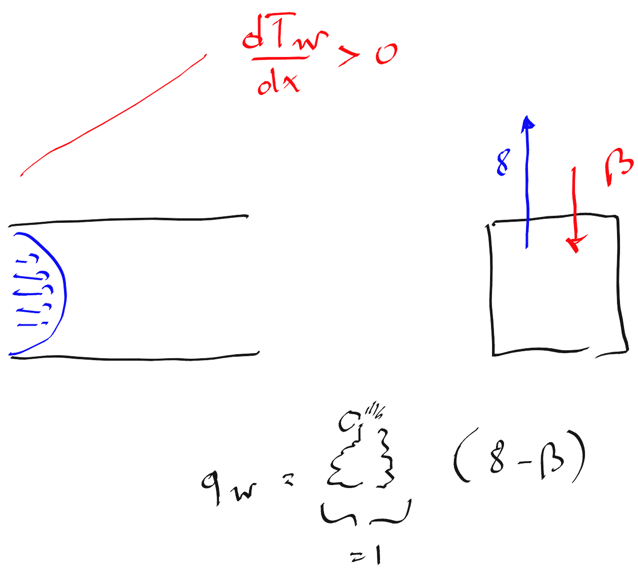
$$Nu = \frac{\left(8 - \beta\right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right)}$$

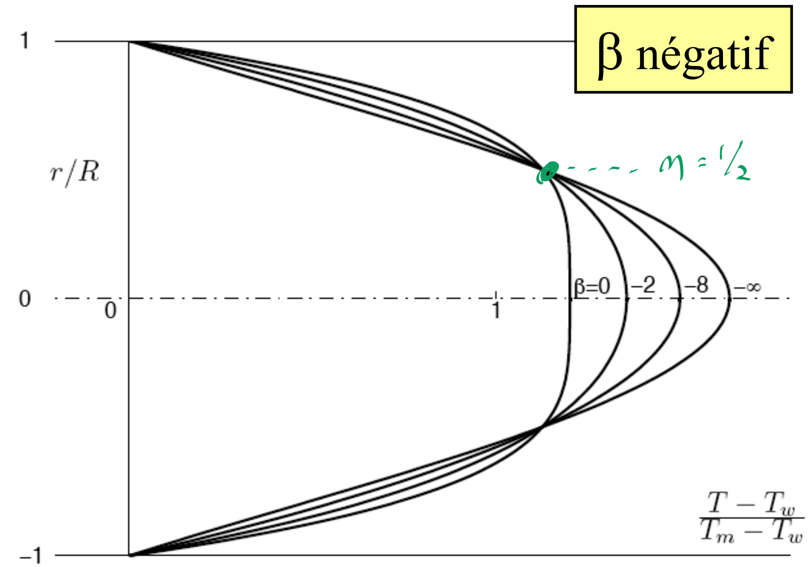
T_w linéaire

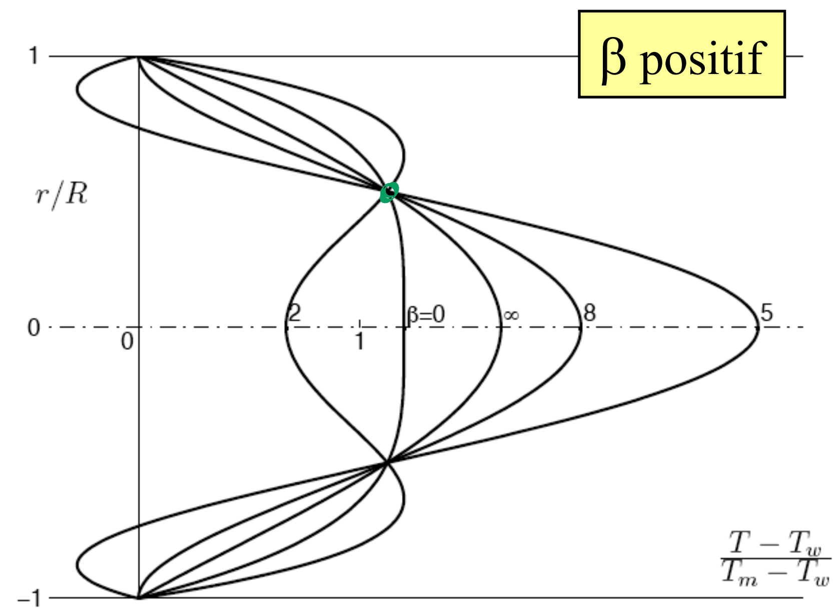
Nombre de Nusselt

Comprendre
la solution analytique !





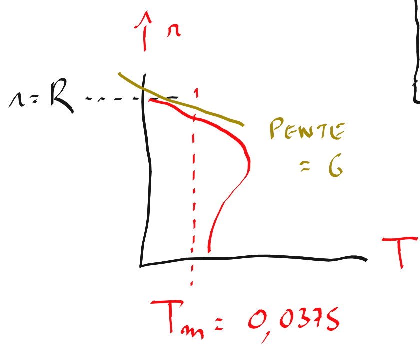


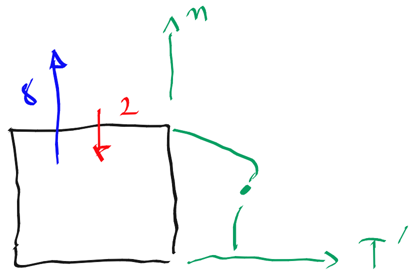


$T' = T / T_m$

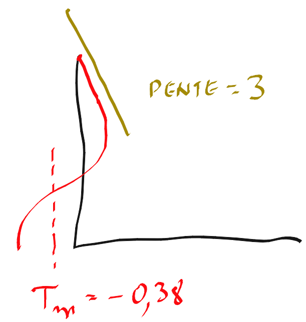
$\boxed{T_w = 0 \;\; ;-)}$

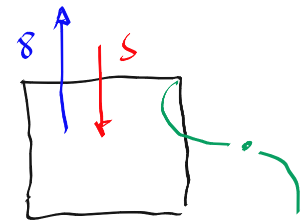
$\boxed{\beta = 2}$





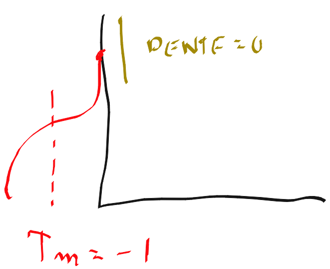
$\boxed{\beta = 5}$

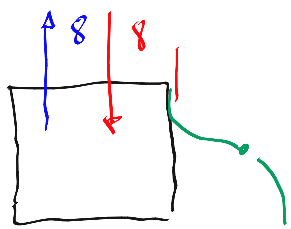




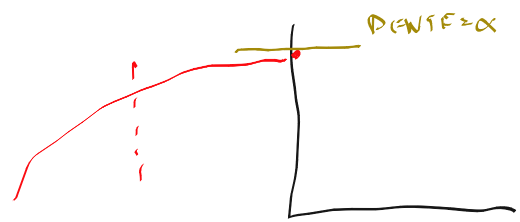
ADIABATIQUE

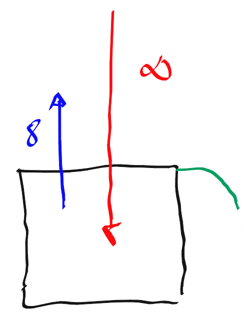
$\boxed{\beta = 8}$





$\boxed{\beta = \infty}$

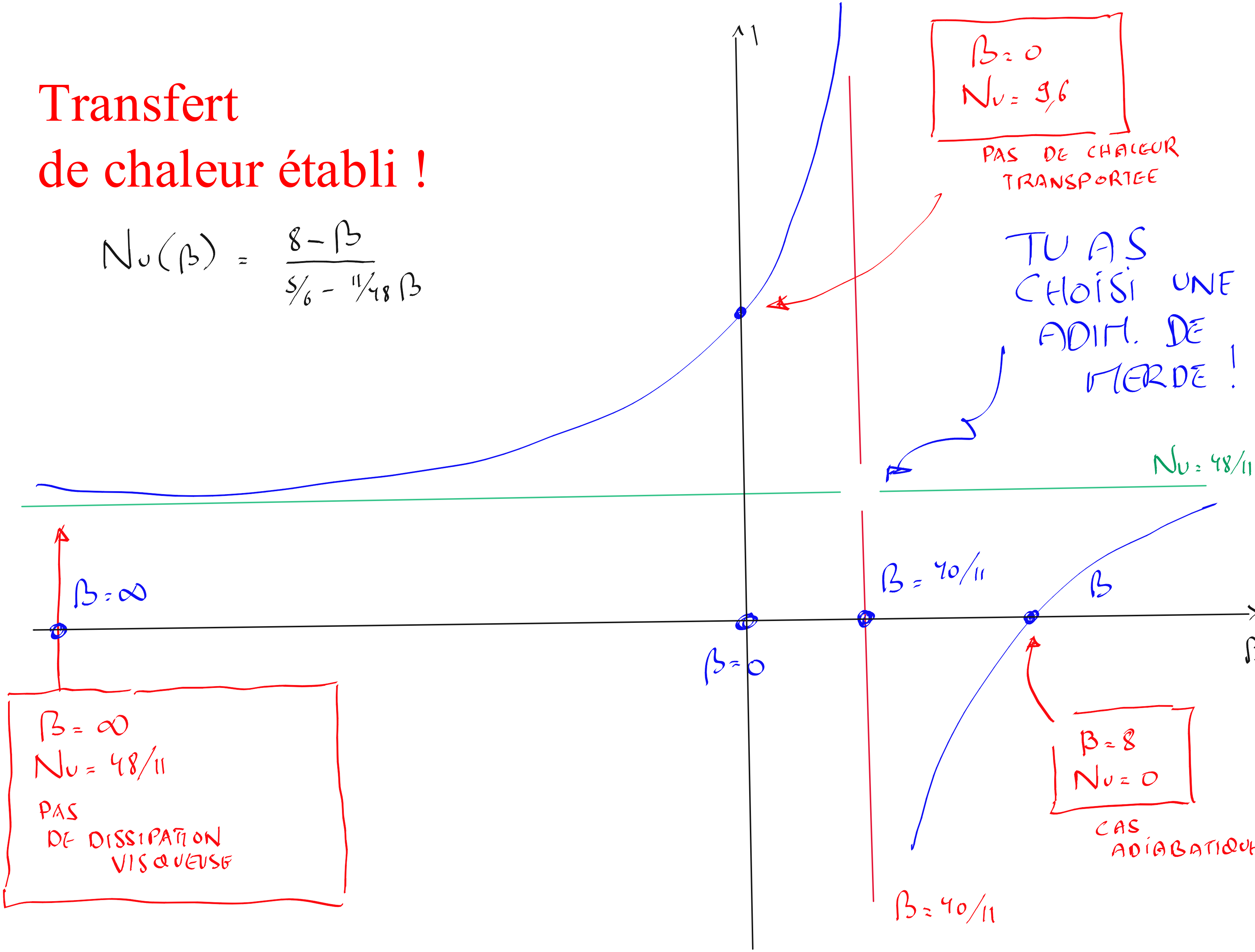


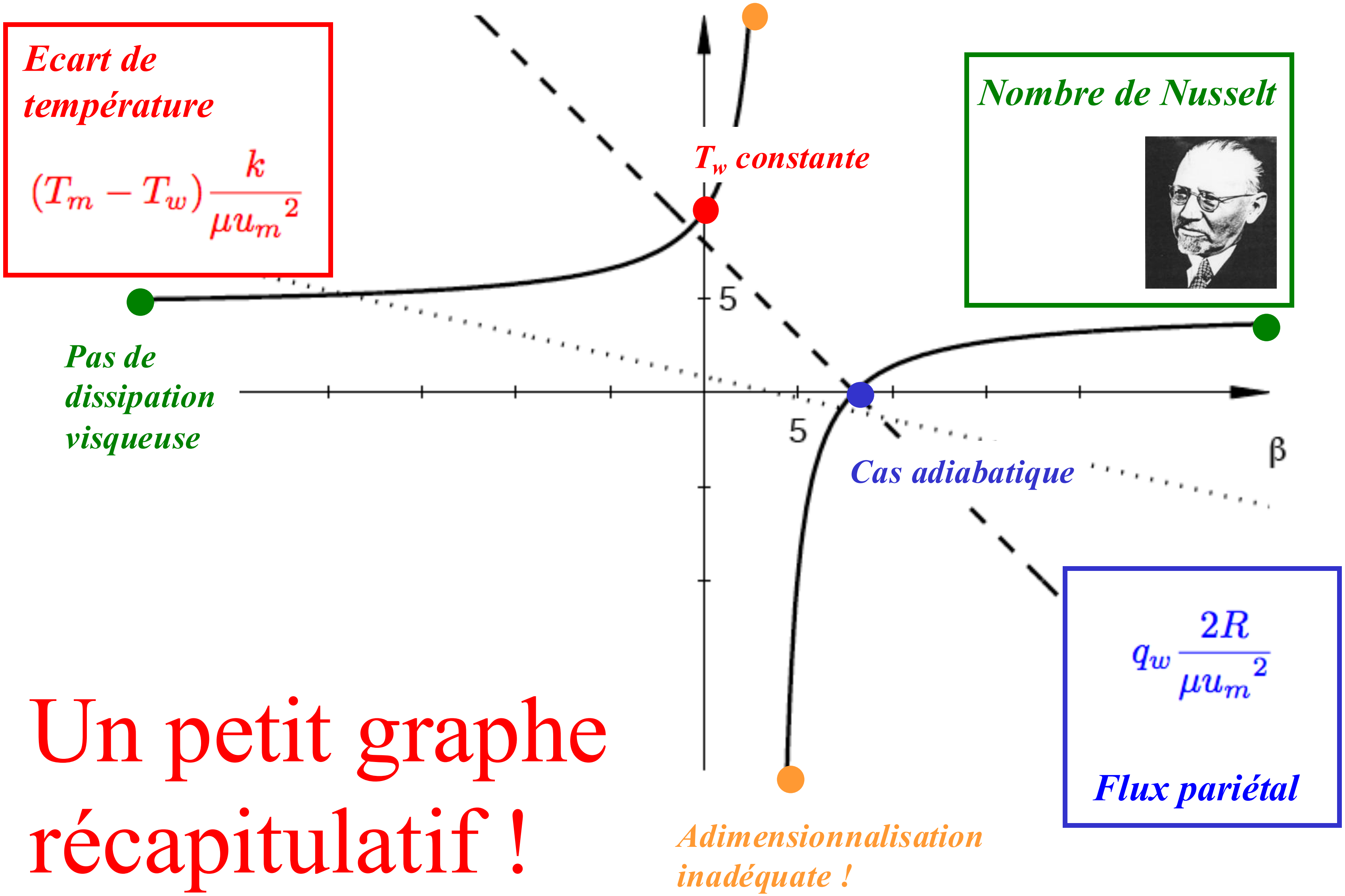


$T_m = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \\ 1 \end{matrix} \right\} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$

Transfert de chaleur établi !

$$Nu(\beta) = \frac{8-\beta}{5/6 - 11/48\,\beta}$$





Un petit graphe récapitulatif !