Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2021	Bloc - filières :	

1 De l'huile chaude sur une plaque froide... *(50 %)*

Considérons la couche limite thermique incompressible laminaire d'une huile le long d'une plaque plane horizontale de longueur L dont la température est T_w. Le fluide hors de la zone de la couche limite a une température constante $T_w < T_e$ et une vitesse horizontale constante u_e. On néglige la dissipation visqueuse et le bilan d'énergie se réduit à l'expression suivante dans la couche limite :

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Les composantes de vitesse sont données par les expressions :

$$u(x,y) = u_e \ f'(\eta(x,y)) \qquad\qquad v(x,y) = u_e \ \delta'(x) \ \Big(\eta(x,y) f'(\eta(x,y)) - f(\eta(x,y)) \Big)$$

où $\eta(x,y) = \dfrac{y}{\delta(x)} = \dfrac{y}{\sqrt{\nu x / u_e}}$ est la variable de similitude et $f(\eta)$ est la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) &=& 0 \\ \\ f(0) &=& 0 \\ f'(0) &=& 0 \\ f''(0) &=& 0.332 \end{array} \right.$$

1. Définir le nombre de Prandtl.
   Calculer la valeur numérique de Prandtl pour ce problème : que peut-on en déduire ?

2. Faire un dessin du problème : la plaque est définie par $y = 0$ et $0 < x < L$.
   Y indiquer les couches limites $\delta(x)$ et $\delta_T(x)$.
   Esquisser le profil de vitesse et de température.

3. Au sein de la couche limite thermique, nous allons approcher la solution de similitude $f(\eta)$ par son développement de Taylor à l'ordre deux autour de l'origine :

   $$f(\eta) \approx \gamma \eta^2$$

   Donner la valeur de γ.
   Pourquoi est-ce que cette approximation est légitime[1] ?

4. Obtenir le problème aux conditions limites que satisfait $\theta(\eta)$ défini par :

   $$\theta(\eta(x,y)) = \frac{T(x,y) - T_w}{T_e - T_w}$$

   en remplaçant $f(\eta)$ par l'expression $\gamma\eta^2$.

[1] Si vous avez fait correctement le dessin en fonction du nombre de Prandtl, cela devrait être lumineux :-)

5. Démontrer que la solution de ce problème peut s'écrire sous la forme :

$$\theta(\eta) = \frac{\displaystyle\int_0^\eta \exp(-aPr^b s^c)\; ds}{\displaystyle\int_0^\infty \exp(-aPr^b s^c)\; ds}$$

Obtenir les valeurs numériques de a, b et c.

6. Donner l'expression du flux de chaleur à la paroi $q_w = -k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$ en fonction de $\theta'(0)$.

(**) 7. Sachant que $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^3)\; dt = 0.8929$,

démontrer que le nombre de Nusselt peut s'écrire sous la forme :

$$Nu = 0.339\ Pr^d Re^e$$

Donner les valeurs des exposants d et e.

Valeurs numériques des paramètres

ρ	900	kg/m^3
μ	0.02	kg/ms
k	0.15	W/mK
c	2200	J/kgK
L	0.5	m
T_w	10	^oC
T_e	100	^oC
u_e	1	m/s

MECA1321	Nom - prénom :	Numéro magique
Janvier 2021	Bloc - filières :	

2 Couches limites turbulentes hydrauliquement lisses *(50 %)*

En écoulements turbulents, on utilise les grandeurs moyennées dans le temps : $\overline{u}$, $\overline{T}$.
En couches limites turbulentes, la notation δ désigne l'épaisseur totale du modèle utilisé pour le profil de vitesse. La distance à la paroi est représentée de deux manières : η qui est l'adimensionnalisation basée sur l'épaisseur de la couche limite ou y^+ qui celle basée sur la vitesse de frottement.

$$\eta = \frac{y}{\delta} \qquad\qquad y^+ = \frac{y\overline{u}_\tau}{\nu}$$

1. Dans les couches limites turbulentes, est-ce que $\delta_T(x)$ et $\delta(x)$ coïncident ?
   Justifier votre réponse avec un argument physique à l'appui.

2. Obtenir la relation liant $\dfrac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_e}$ et C_f.

3. Dans la partie proche de la paroi, on considère la zone de la couche limite qui est dominée par la turbulence. En partant de $\overline{q}_t = \overline{q}_w$, en utilisant le modèle de viscosité turbulente linéaire classique pour ν_t (avec $1/\kappa = 2.61$) et en supposant que $\alpha_t = \nu_t$, obtenir l'expression :

$$\overline{T}^+(y^+) = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}(y^+)}{\overline{T}_\tau}$$

   Il faut évidemment définir correctement $\overline{T}_\tau$.
   La constante d'intégration sera $A = C + 13(Pr^{2/3} - 1)$ avec $C = 4.1$ utilisée pour $\overline{u}^+(y^+)$.

4. Obtenir ensuite le profil composite qui est valable pour toute la partie dominée par la turbulence :

$$\overline{T}^+(\eta) = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}(\eta)}{\overline{T}_\tau} = \Big(\text{profil proche paroi}\Big) + E\,\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(\alpha\,\eta)\right)$$

   avec $E = 2.85$ et $\alpha = 1.166$ afin d'avoir une pente nulle en $\eta = 1$. (à ne pas faire ici :-)
   Pour obtenir la valeur numérique de tous les paramètres du modèle, on considérera $Re(x) = 10^7$ et les propriétés d'une huile moteur : $\nu = 2.2\ 10^{-5}$ m²/s et $\alpha = 7.4\ 10^{-8}$ m²/s.
   Les deux formules fournies ci-dessous seront ici bien utiles.

5. Obtenir finalement l'expression adimensionnelle habituelle du profil de température :

$$\theta(\eta) = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}(\eta)}{\overline{T}_w - \overline{T}_e}$$

   Ce profil est-il au dessus de, confondu avec, ou au dessous du profil $\dfrac{\overline{u}(\eta)}{\overline{u}_e}$?
   Pourquoi ?

Deux petites formules approchées utiles :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(x) &\simeq 0.162\,\frac{x}{[Re(x)]^{1/7}} \\ C_f(x) &\simeq \frac{0.455}{[\log(0.060\,Re(x))]^2} \end{aligned}}$$