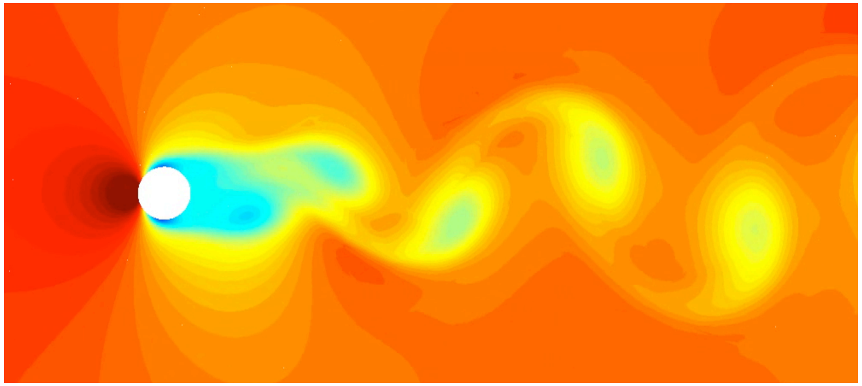
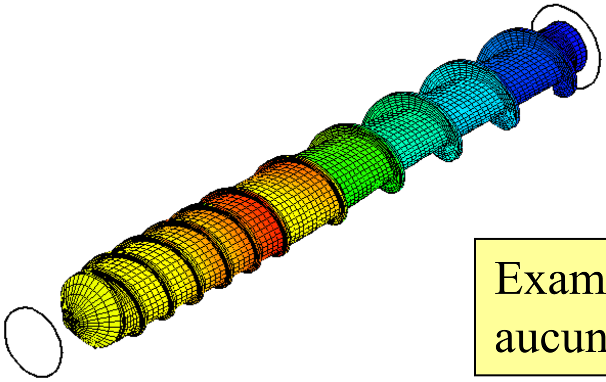
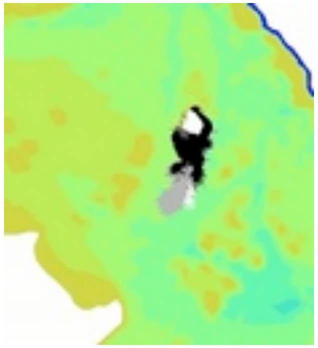
MECA1321 : tout ce dont vous avez rêvé à propos des fluides newtoniens...



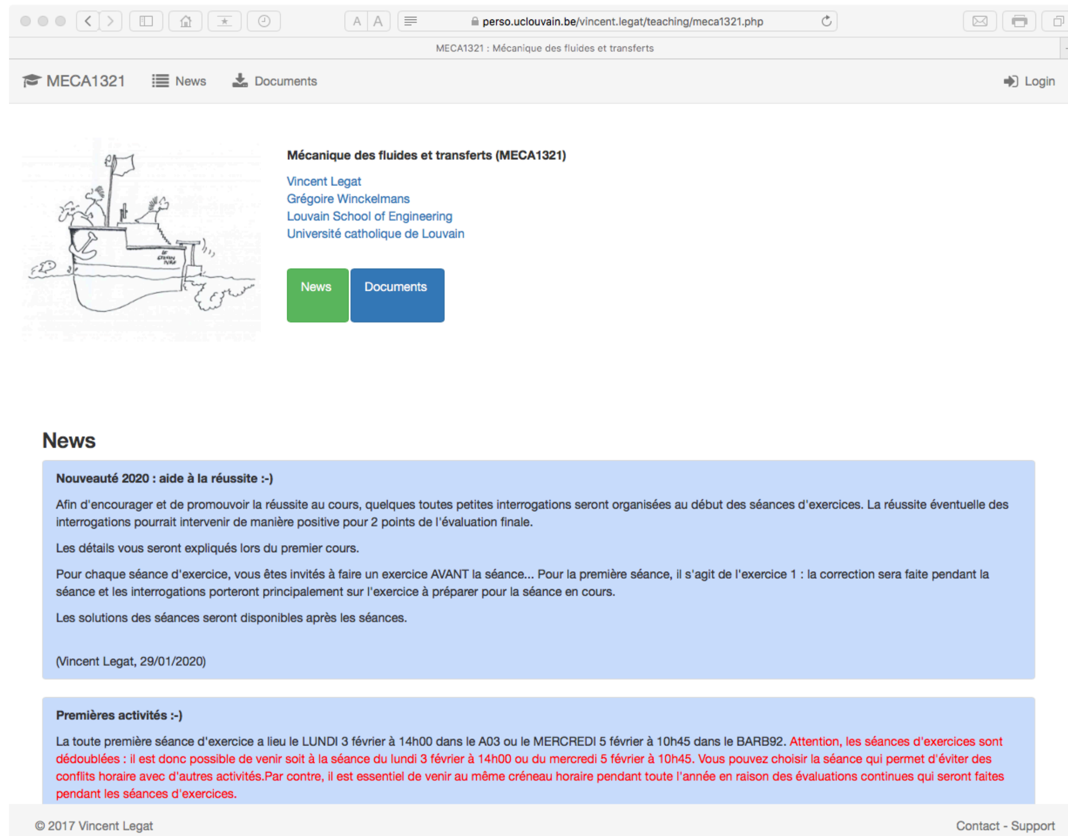
Equations de conservation et de comportement (VL)
Ecoulements et transferts laminaires (VL)
Théorie de la lubrification (VL)
Couches limites - convection forcée et naturelle (VL)
Ecoulements et transferts turbulents (GW)



Examen d'exercices à livre fermé sans aucun document ou formulaire !



Equipe enseignante :-)



perso.uclouvain.be/vincent.legat/teaching/meca1321.php

MECA1321 : Mécanique des fluides et transferts

MECA1321 News Documents Login

Mécanique des fluides et transferts (MECA1321)

Vincent Legat
Grégoire Winckelmans
Louvain School of Engineering
Université catholique de Louvain

News Documents

News

Nouveauté 2020 : aide à la réussite :-)

Afin d'encourager et de promouvoir la réussite au cours, quelques toutes petites interrogations seront organisées au début des séances d'exercices. La réussite éventuelle des interrogations pourrait intervenir de manière positive pour 2 points de l'évaluation finale.

Les détails vous seront expliqués lors du premier cours.

Pour chaque séance d'exercice, vous êtes invités à faire un exercice AVANT la séance... Pour la première séance, il s'agit de l'exercice 1 : la correction sera faite pendant la séance et les interrogations porteront principalement sur l'exercice à préparer pour la séance en cours.

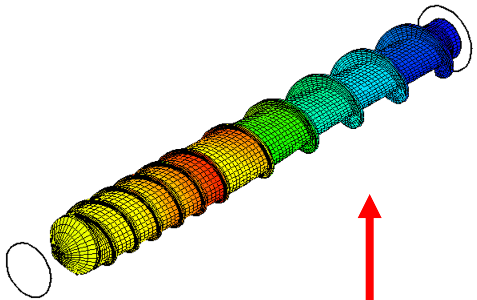
Les solutions des séances seront disponibles après les séances.

(Vincent Legat, 29/01/2020)

Premières activités :-)

La toute première séance d'exercice a lieu le LUNDI 3 février à 14h00 dans le A03 ou le MERCREDI 5 février à 10h45 dans le BARB92. Attention, les séances d'exercices sont dédoublées : il est donc possible de venir soit à la séance du lundi 3 février à 14h00 ou du mercredi 5 février à 10h45. Vous pouvez choisir la séance qui permet d'éviter des conflits horaire avec d'autres activités.Par contre, il est essentiel de venir au même créneau horaire pendant toute l'année en raison des évaluations continues qui seront faites pendant les séances d'exercices.

© 2017 Vincent Legat Contact - Support



La mécanique des milieux continus…

Construction
d’un modèle pour prédire l’évolution
d’un milieu continu

Equations aux dérivées partielles

- Equations de conservation
- Equations de comportement

Conditions aux limites

- Conditions frontières
- Conditions initiales

Construction
d'un modèle pour prédire l'évolution
d'un milieu continu

Dynamique moléculaire de l'air

3.5 litres d'air
10^{23} molécules

La prédiction avec la dynamique moléculaire est tout-à-fait impossible pour des écoulements complexes

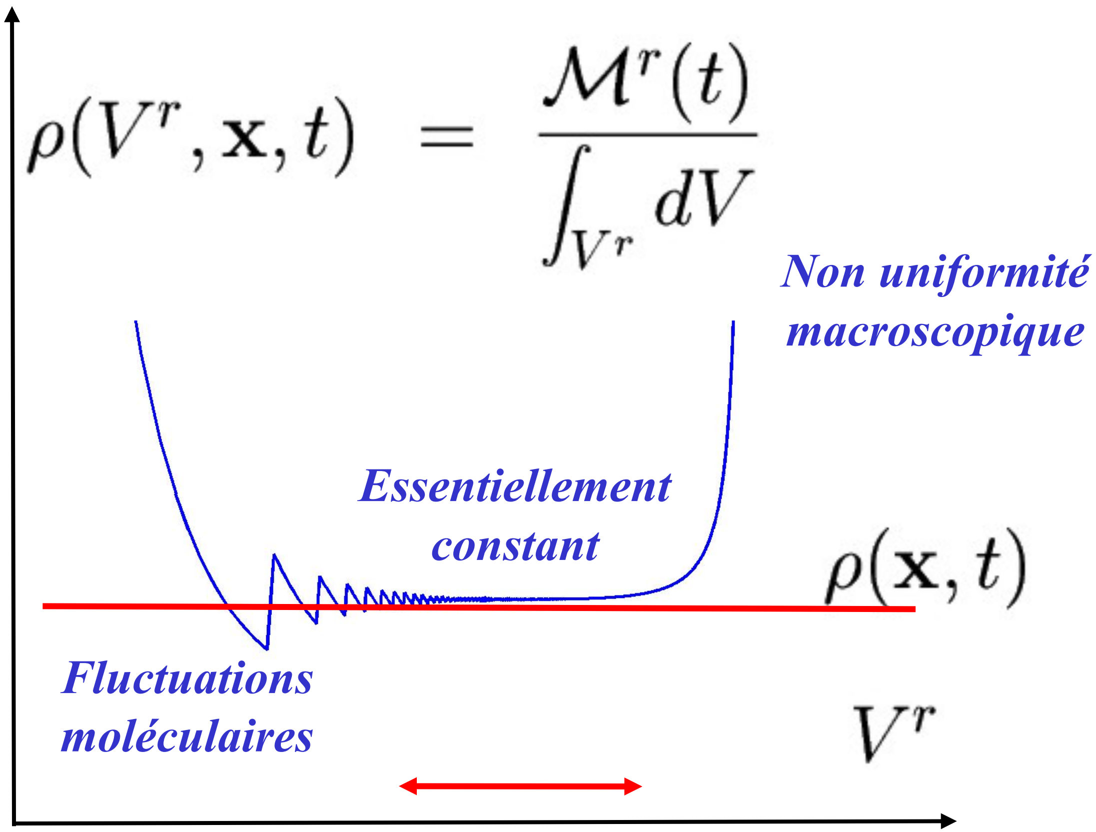
Ordinateur

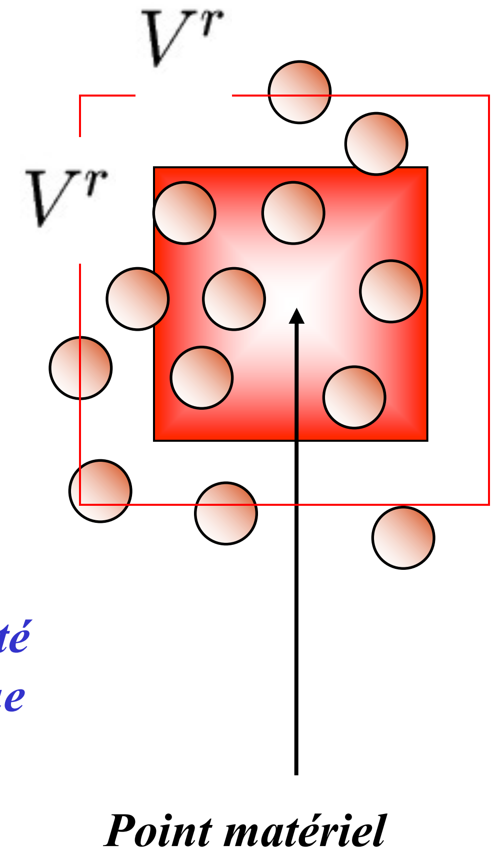
10^{10} opérations par seconde
10^{13} secondes ou 100.000 années
juste pour référencer une fois chaque molécule

Hypothèse du modèle continu

La densité obtenue comme une moyenne…

$$\rho(V^r, \mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{M}^r(t)}{\int_{V^r} dV}$$

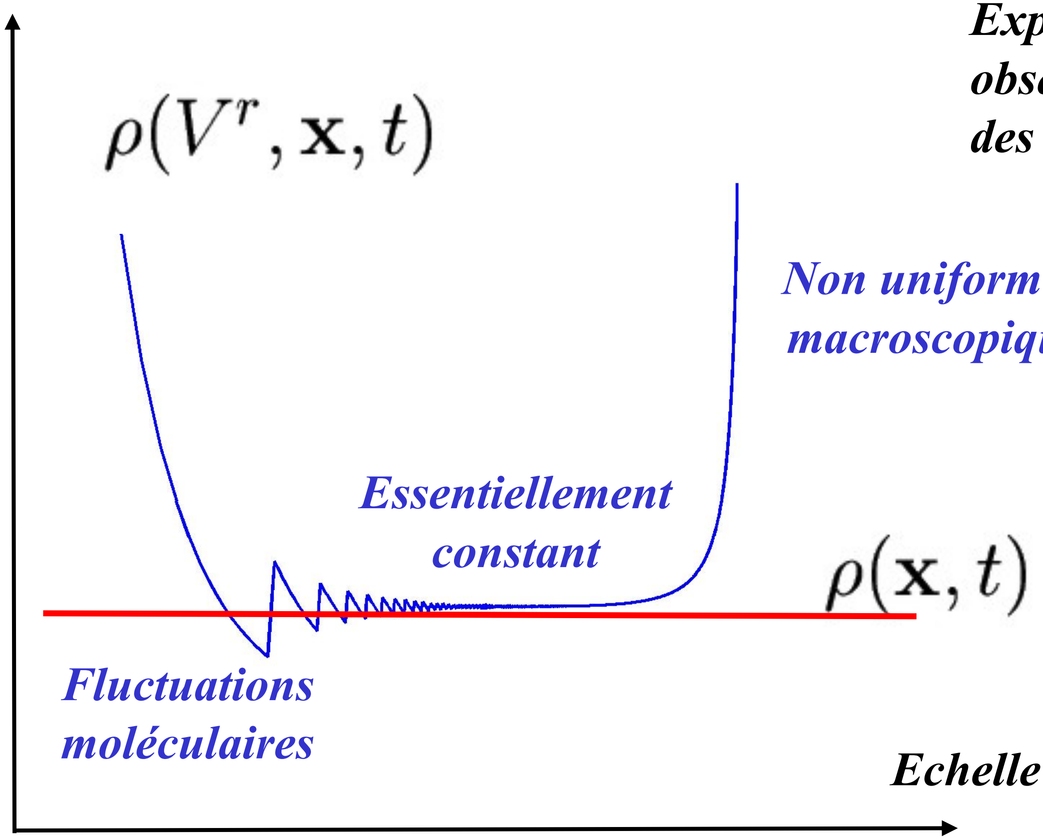




Hypothèse des milieux continus

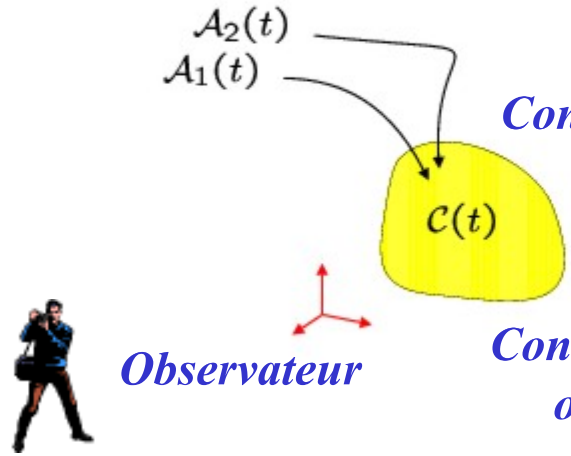
Le comportement de nombreux systèmes est essentiellement le même que si on supposait qu'ils étaient parfaitement continus.

Expérimentalement, on observe bien une séparation des échelles, typiquement 10^{15}

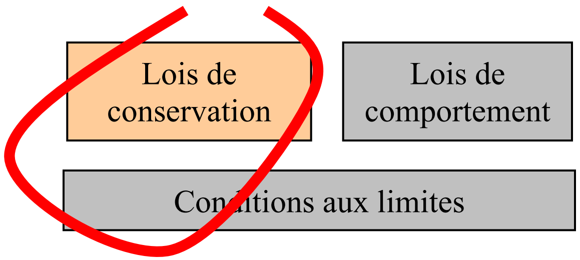


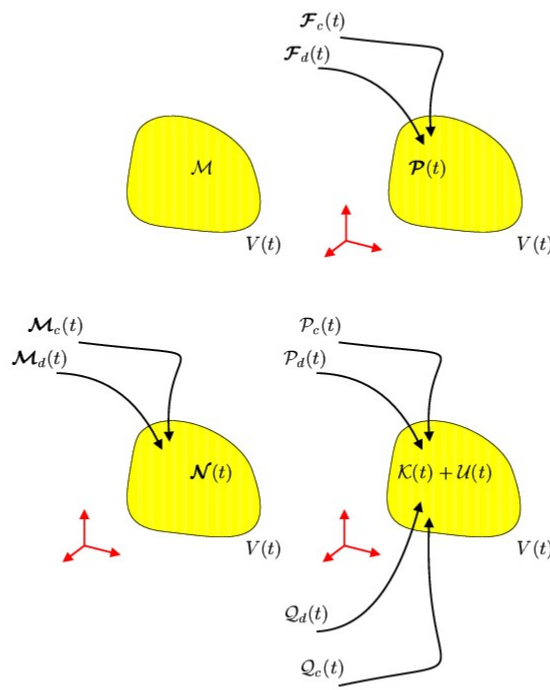
Lois de conservation

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \dots$$



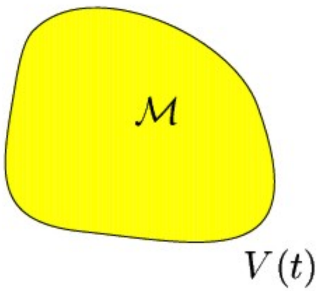
Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.





Consevation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.

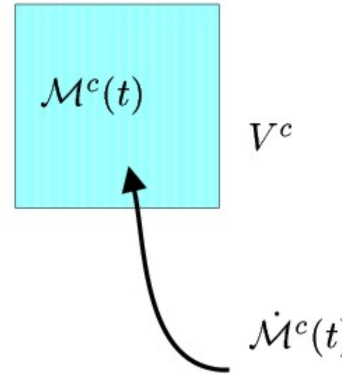
Formes globales de la conservation de la masse



$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \qquad \forall \; V(t),$$

Volume matériel

Ensemble de points matériels en mouvement se déplaçant à une vitesse macroscopique **v**(**x**,t)



$$\frac{d\mathcal{M}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{M}}^c(t), \qquad \forall \; V^c,$$

Volume de controle

Ensemble de points eulériens

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i$$

Conservation de la masse

$$\mathcal{M} = \int_{V(t)} \rho \, dV$$

Forme globale

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \qquad \forall \; V(t),$$

satisfaite pour une certaine classe de systèmes, à tout instant

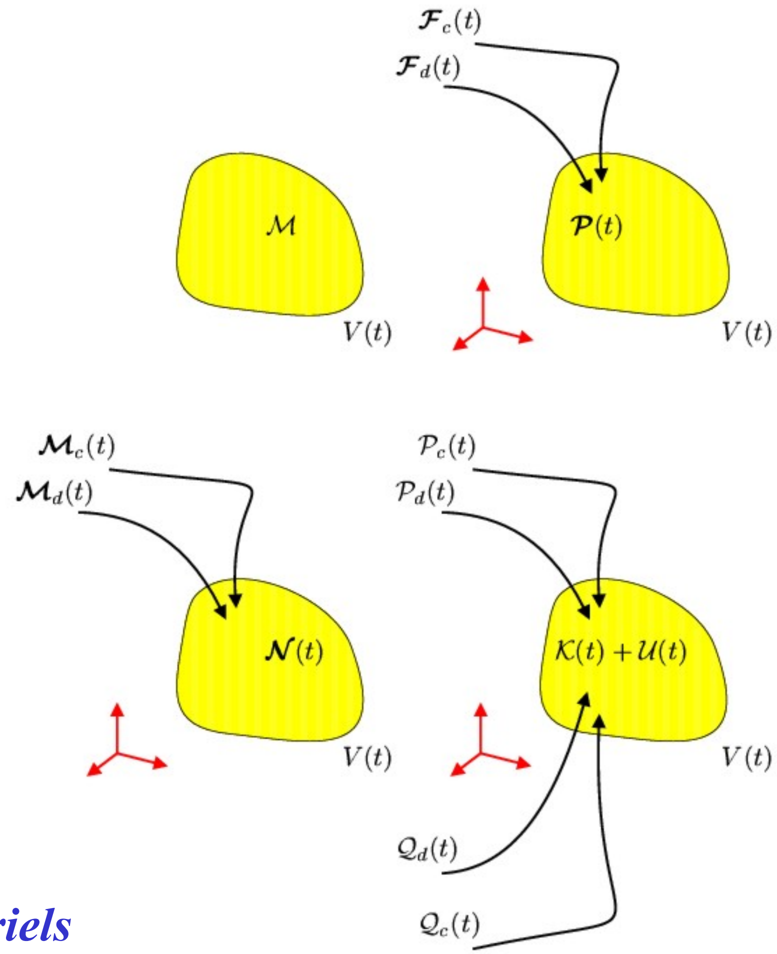
sous certaines conditions de continuité..

Forme locale

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

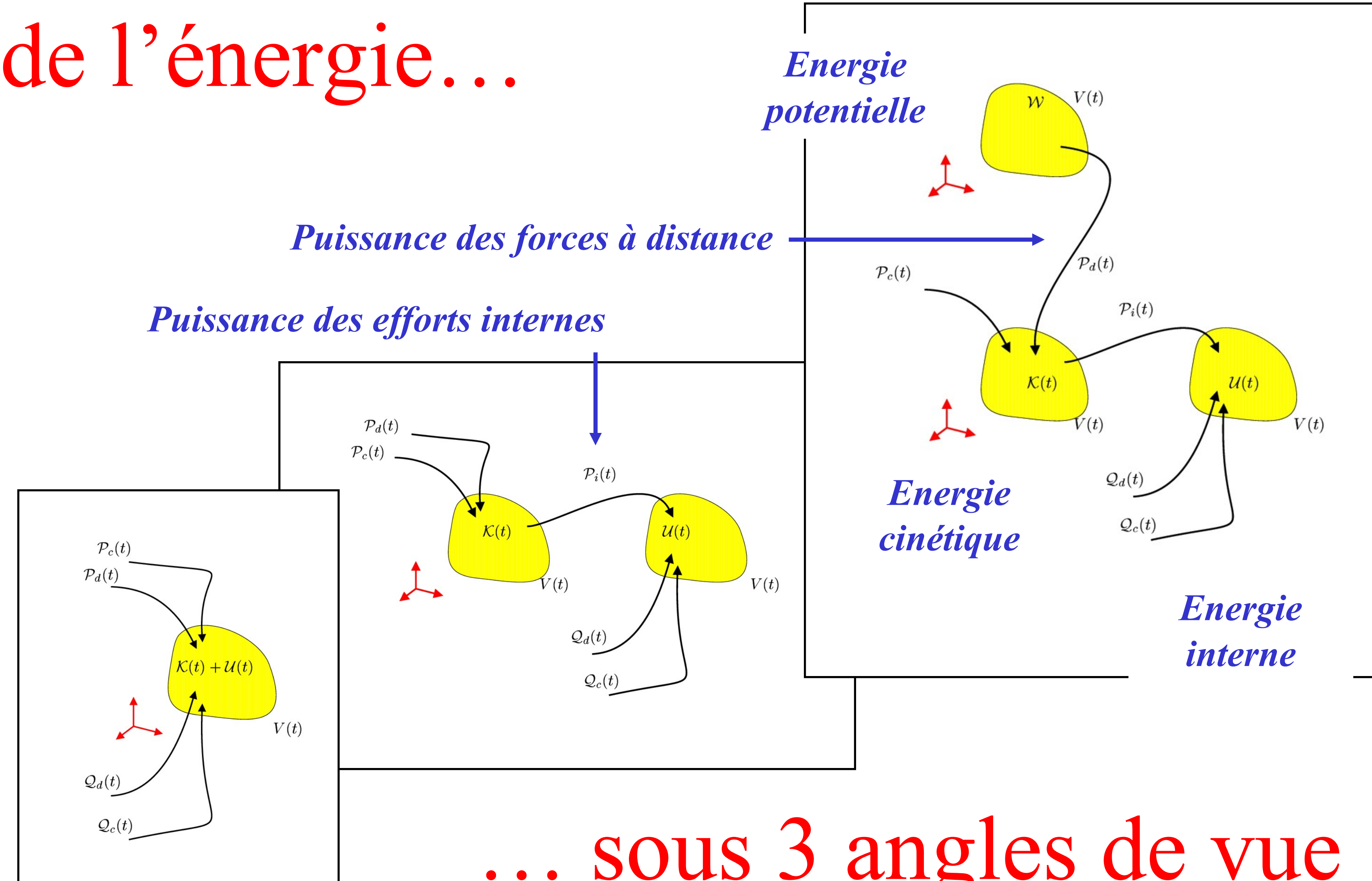
satisfaite en tout point et à tout instant

Toutes les lois de conservation, en un clin d'oeil…



Forme globale
pour des volumes matériels

Conservation de l’énergie…



… sous 3 angles de vue !

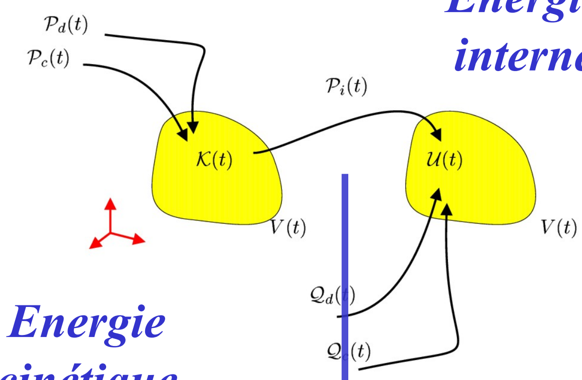
Puissance des efforts internes

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie interne

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}$$

Formes globales

Energie interne



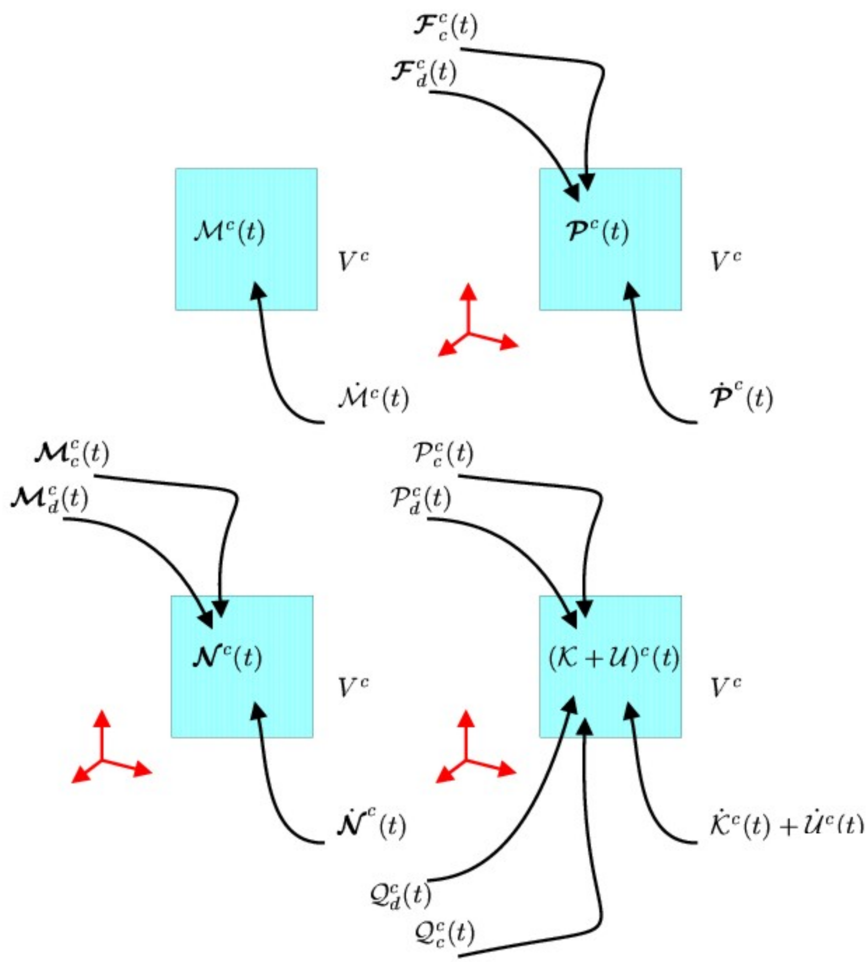
Energie cinétique

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$$

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie cinétique

Puissance des efforts internes

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dV$$



Comment retrouver les équations locales ?

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\
\frac{\partial (\rho U)}{\partial T} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{v} U) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q}.
\end{aligned}
$$

…dont on peut déduire des formes locales

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\ q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \rho \frac{DU}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} \end{aligned}$$

Forme locale dite non-conservative

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\ q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\ \frac{\partial (\rho U)}{\partial T} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} U) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} \end{aligned}$$

Forme locale dite conservative

Trois nouveaux acteurs dans notre modèle !

Pression

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$$

Tenseur des extra-contraintes

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Enthalpie

Un peu d'algèbre

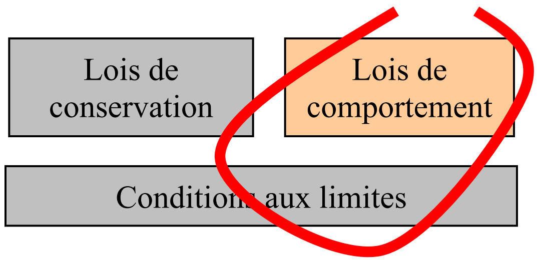
$$H = U + \frac{p}{\rho}$$

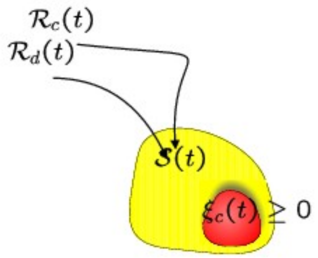
$$\begin{aligned}
\rho\frac{DH}{Dt} &= \rho\left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}\right) \\
&= \rho\frac{DU}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}.
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
\rho\frac{DH}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}, \\
&= -p\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}, \\
&= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v}\right)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.





Second principe de la thermodynamique,
Modèle du fluide visqueux newtonien

Les équations de comportement ne peuvent pas être écrites n'importe comment !
Il faut respecter certaines règles !
En particulier, il faut les écrire afin que le second principe de la thermodynamique soit toujours satisfait.

Quelques jolis tenseurs pour construire notre modèle…

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)\right)}_{\mathbf{d}} + \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)\right)$$

Tenseur des taux de déformation

$$\mathbf{d} = \underbrace{(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})\frac{\boldsymbol{\delta}}{3}}_{\mathbf{d}^s} + \underbrace{(\mathbf{d} - (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})\frac{\boldsymbol{\delta}}{3})}_{\mathbf{d}^d}$$

Partie sphérique du tenseur des taux de déformation

Partie déviatoire du tenseur des taux de déformation

Viscosité de volume

Viscosité de cisaillement

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\boxed{\hat{\kappa}(p,T)}\mathbf{d}^s + 2\boxed{\hat{\mu}(p,T)}\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\boxed{\hat{k}(p,T)}\boldsymbol{\nabla}T, \\
\rho &= \hat{\rho}(p,T), \\
H &= \hat{H}(p,T), \\
S &= \hat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

Conductibilité thermique

$$
TdS = dH - \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{pd\rho}{\rho^2},
$$

$$
\begin{aligned}
k &\geq 0, \\
\kappa &\geq 0, \\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Contraintes à respecter pour satisfaire Clausius-Duhem

L'équation de comportement pour l'entropie n'est utile que pour vérifier que le second principe est bien satisfait !

Modèle du fluide visqueux newtonien

Quelques ordres de grandeur

TABLE 2.3.1 / The Viscosity of Some Familiar Materials at Room Temperature

Liquid	*Approximate Viscosity (Pa·s)*
Glass	10^{40}
Molten glass (500°C)	10^{12}
Asphalt	10^{8}
Molten polymers	10^{3}
Heavy syrup	10^{2}
Honey	10^{1}
Glycerin	10^{0}
Olive oil	10^{-1}
Light oil	10^{-2}
Water	10^{-3}
Air	10^{-5}

Adapted from Barnes et al. (1989).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\widehat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\widehat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\widehat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla}T, \\
\rho &= \widehat{\rho}(p,T), \\
H &= \widehat{H}(p,T), \\
S &= \widehat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

Le compte est bon !

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	$\mathbf{v}$	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$	6
constitution pour le flux calorifique	$\mathbf{q}$	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

Remarque : si une équation de comportement pour l'enthalpie est donnée… on en déduit automatique l'énergie interne et vice-versa.

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Un exemple d'équation d'état pour la masse volumique

Modèle de gaz idéal

$$\boxed{\widehat{\rho}(p,T) \;=\; \frac{p}{R_* T}}$$

Constante du gaz

Ecoulements compressibles

Propagation des sons au sein de l'air : c'est un effet de la compressibilité de l'écoulement.
Caractérisation par le nombre de Mach

Presque comme en thermo…

Concentration molaire [mole/m³]

$$\boxed{\rho} = \boxed{c}\boxed{M}$$

Masse volumique [kg/m³]

Masse molaire [kg/mole]

$$pV = nRT$$

$$c = \frac{n}{V}$$

$$c = \frac{p}{RT}$$

Constante des gaz

$$\rho = \frac{p}{R_* T}$$

Constante du gaz

$$R = 8.314 \ [J/moleK]$$

$$R_{*,air} = \frac{R}{M_{air}} = 287 \ [m^2/s^2K]$$

$$\boxed{\widehat{H}(p,T)}$$

Et la relation d'état pour l'enthalpie [1] ?

$$\widehat{H}(p,T) = \boxed{\frac{\partial H}{\partial T}} T + \frac{\partial H}{\partial p} p = U(p,T) + \frac{p}{\rho(p,T)}$$

Chaleur massique à pression constante

$$= \left(\boxed{\frac{\partial U}{\partial T}} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) T + \left(\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \right) p$$

Chaleur massique à volume constant

$$\boxed{\beta \triangleq -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}} = \frac{1}{T}$$

Coefficient de dilatation thermique

$$\boxed{\gamma \triangleq \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}} = \frac{1}{p}$$

Coefficient de compressibilité

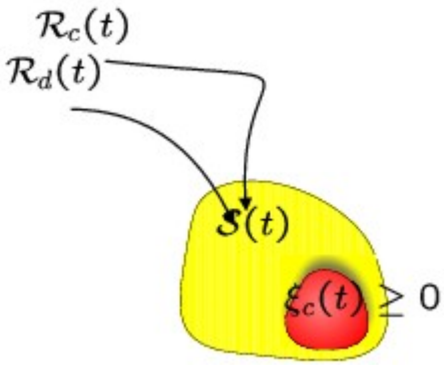
(1) ou l'énergie interne

Il s'agit donc de définir une équation d'état pour la chaleur massique à pression constante et …

Chaleur massique à pression constante

$$\boxed{c_p(p,T)} \triangleq \frac{\partial \widehat{H}}{\partial T}$$

$$f(p,T) \triangleq \frac{\partial \widehat{H}}{\partial p}$$



On ne peut pas écrire n' importe comment ces relations d' état !

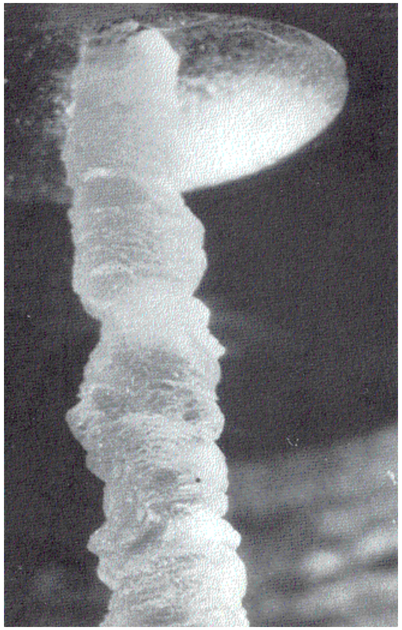
Second principe de la thermodynamique

$$\boxed{\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \nabla T,}$$

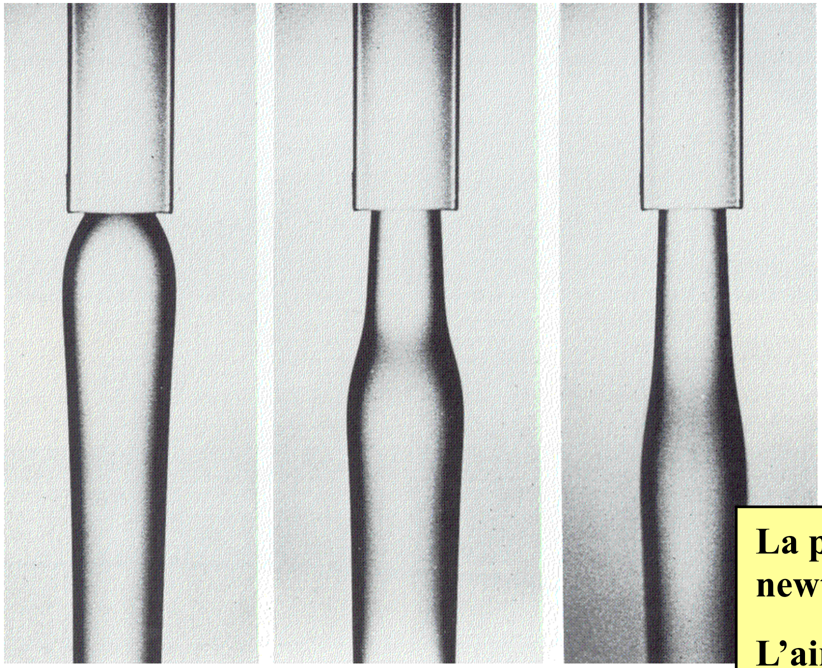
Inégalité de Clausius-Duhem : $\rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DU}{Dt} \geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T$

Il faut respecter certaines règles !
En particulier, il faut les écrire afin que le second principe de la thermodynamique soit toujours satisfait.

De tels gonflement de jets sont imprévisibles avec ce modèle newtonien



(Piau, JNNFM, 90)

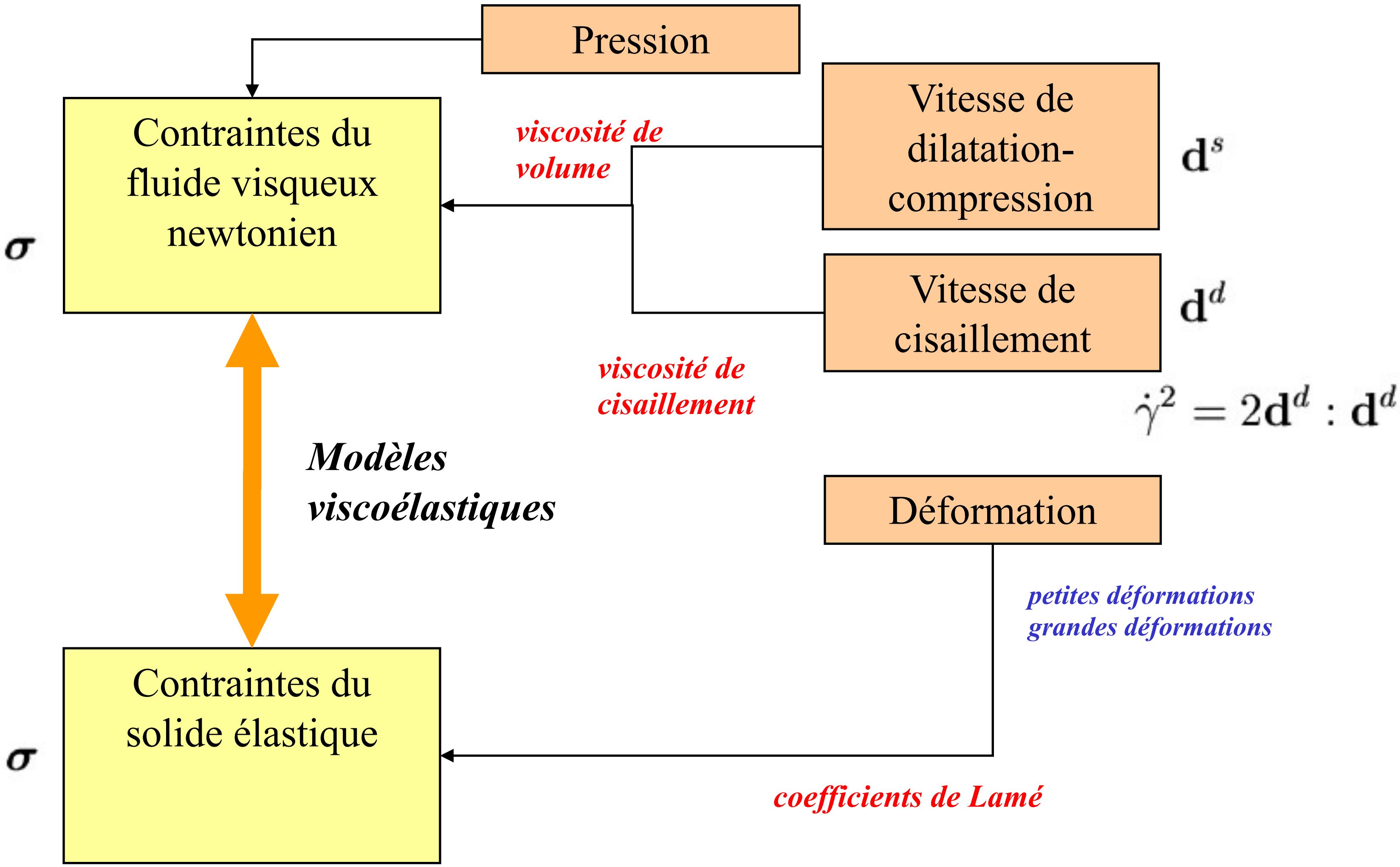


(Giesekus, Rheologica Acta, 68)

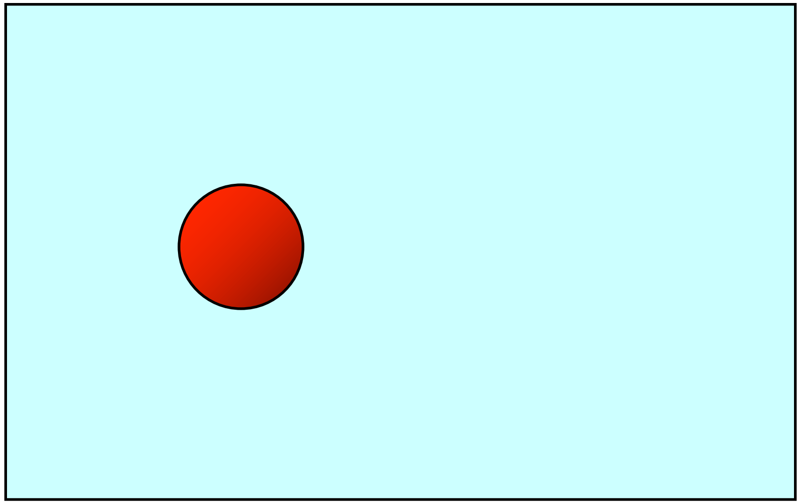
La plupart de fluides réels NE SONT PAS des fluides newtoniens…

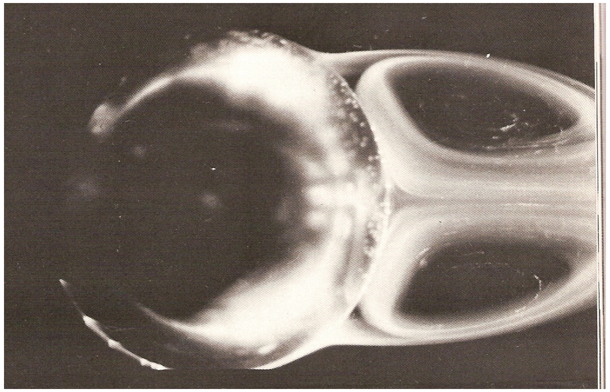
L'air et l'eau sont toutefois newtoniens et constituent les fluides les plus largement répandus…

Rhéologie : la science du monde magique des équations de comportement…



Evaluer la force de trainée à partir d'une mesure du profil de vitesses en aval…





Taneda 1956
(from An Album of Fluid Motion, Van Dyke)

Volume de controle
Ensemble de points eulériens

Simplifications usuelles…

Hypothèses irréalistes

Ecoulement incompressible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Transformations adiabatiques

$$q = r = 0$$

Ecoulement incompressible et irrotationnel

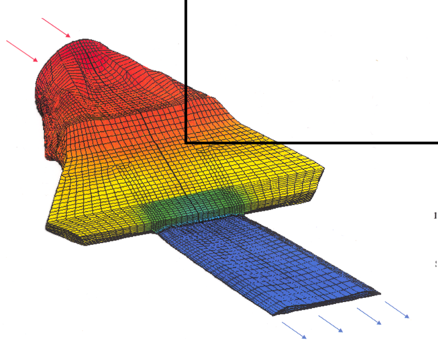
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

Fluide incompressible

$$\rho = cst$$

Fluide parfait

$$\mu = \kappa = 0$$



Hypothèses réalistes

Donc, simplifions…

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(p,\mathbf{v}) &= -p\boldsymbol{\delta} + \mu(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)\\ \mathbf{q}(T) &= -k\boldsymbol{\nabla}T\\ U(T) &= cT\end{aligned}$$

Fluide newtonien à paramètres matériels constants

Ecoulement incompressible

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Dans un écoulement incompressible, il n'y a pas de raison de distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante.
On écrit simplement le symbole c !

Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

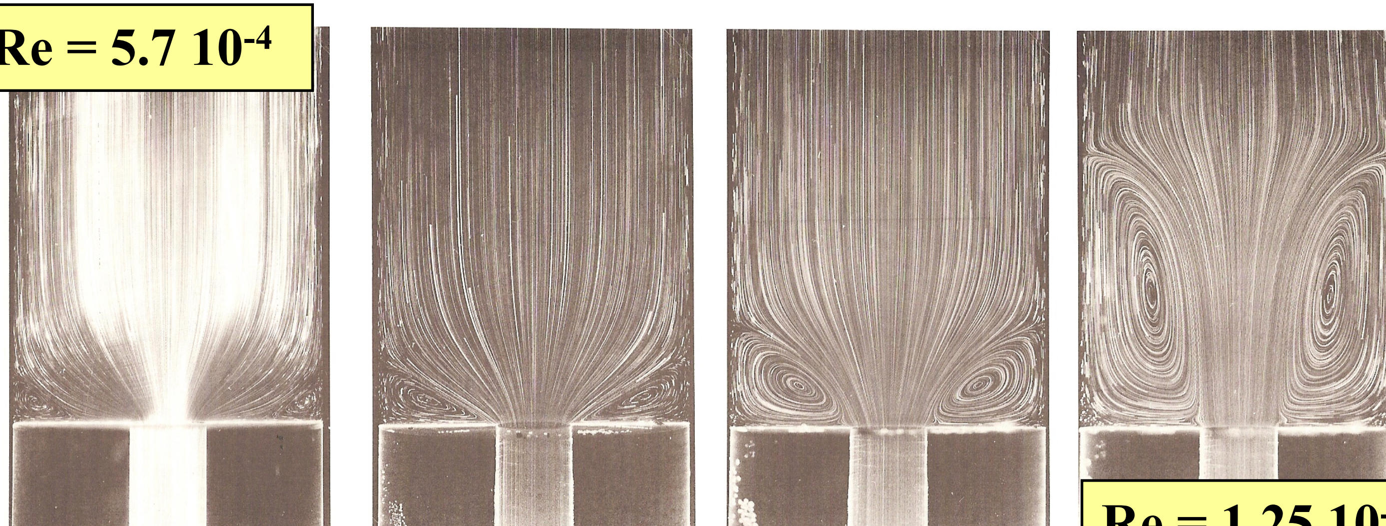
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &= 0,\\ \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g},\\ \rho c\frac{DT}{Dt} &= 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2T,\end{aligned}$$

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

Ecoulements incompressibles stationnaires

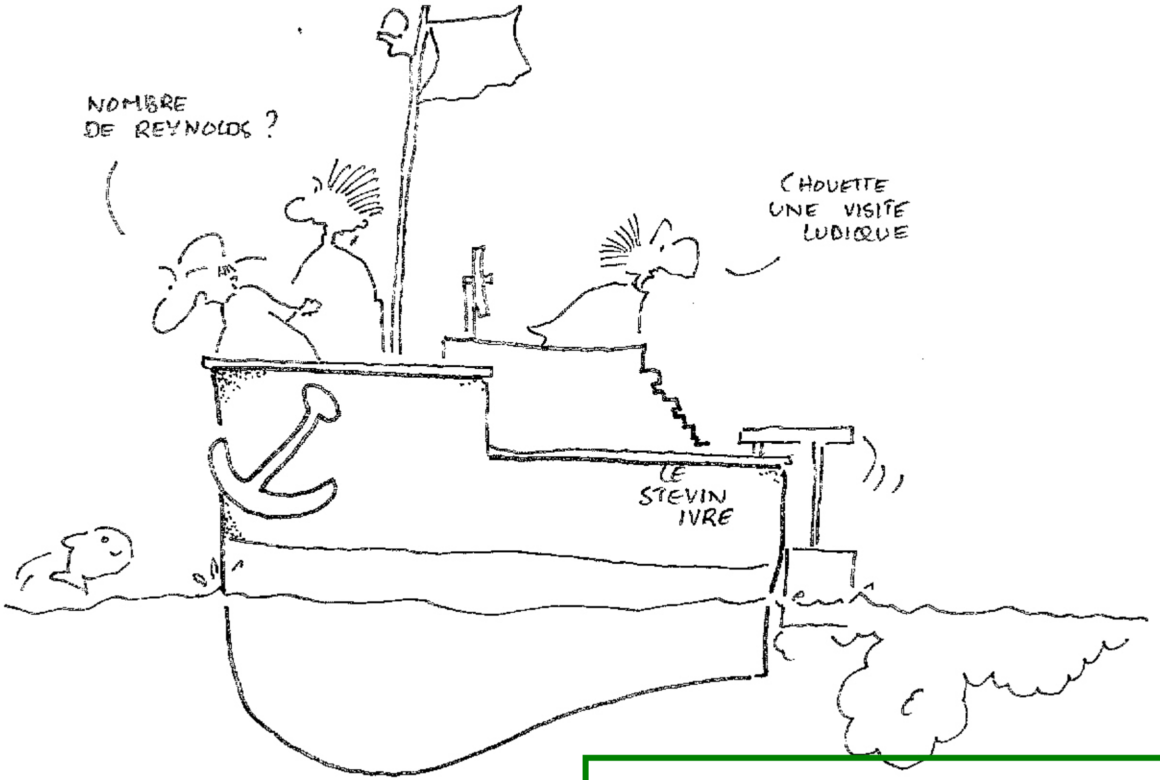
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &= 0\\
\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla}p+\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.



(Boger, Hur, Binnington, JNFM 1986)

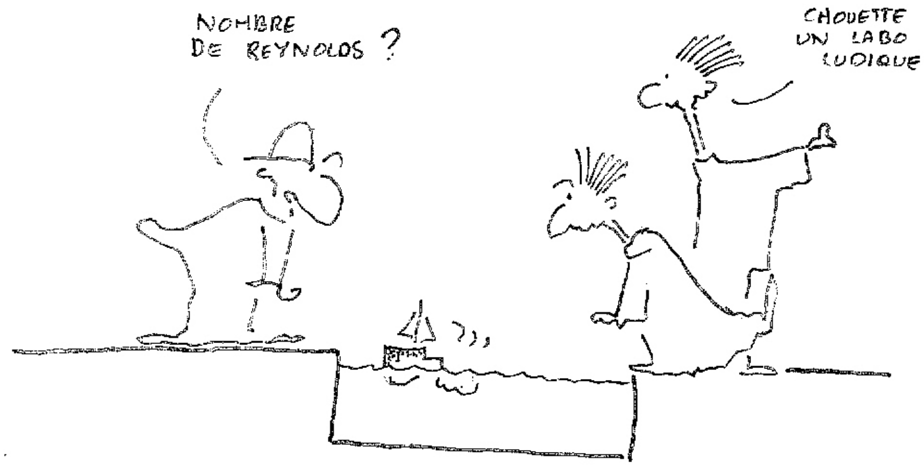
Adimensionaliser : pourquoi ?



$$
\begin{aligned}
U &= 0.1\ m/s \\
L &= 10\ m \\
\rho &= 10^3\ kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3}\ kg/ms
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$
\begin{aligned}
U &= 10\ m/s \\
L &= 0.1\ m \\
\rho &= 10^3\ kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3}\ kg/ms
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}$$

Adimensionaliser

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \\
\mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{U}, \\
p' &= \frac{p - \boxed{p_0}}{\rho U^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\
(\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' &= -\nabla' p' + \frac{1}{Re}(\nabla')^2 \mathbf{v}'
\end{aligned}
$$

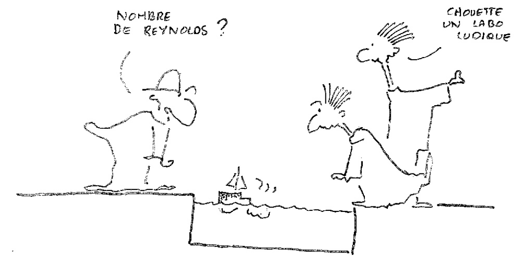
Dans un écoulement incompressible, seul un écart de pression peut être caractéristique… Ajouter ou retirer une pression constante ne change rien à l'écoulement !

En variables adimensionnelles,

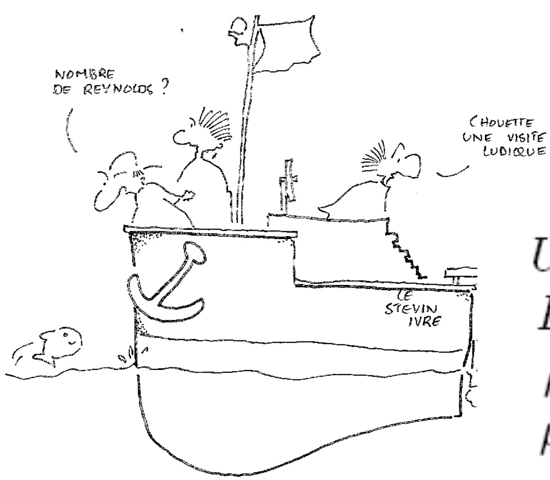
$$\boxed{Re \;=\; \frac{\rho U L}{\mu} \;=\; 10^6}$$

Ils ont le même nombre de Reynolds :-)

$$\begin{aligned} U &= 10\ m/s \\ L &= 0.1\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$



$$\frac{p_{mer}(\mathbf{x}) - p_{mer}(0)}{\rho U_{mer}^2} \;=\; p'_{mer}(\mathbf{x}') \;=\; p'_{labo}(\mathbf{x}') \;=\; \frac{p_{labo}(\mathbf{x}) - p_{labo}(0)}{\rho U_{labo}^2}$$



$$\begin{aligned} U &= 0.1\ m/s \\ L &= 10\ m \\ \rho &= 10^3\ kg/m^3 \\ \mu &= 10^{-3}\ kg/ms \end{aligned}$$

…ces deux écoulements sont identiques.

C'est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvement

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

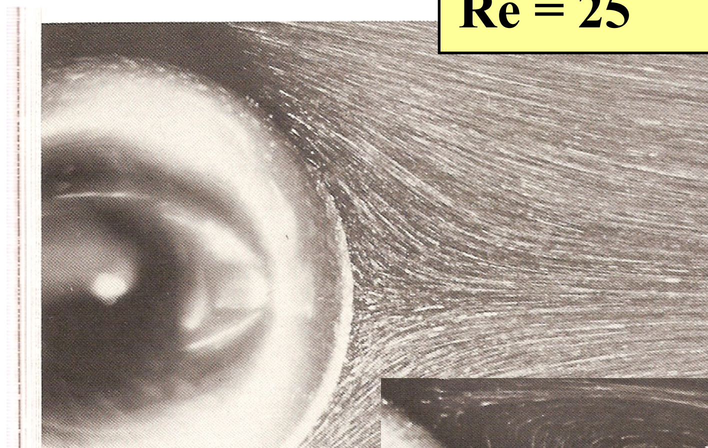
Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

$$\frac{\textbf{Forces d'inertie}}{\textbf{Forces de viscosité}}$$

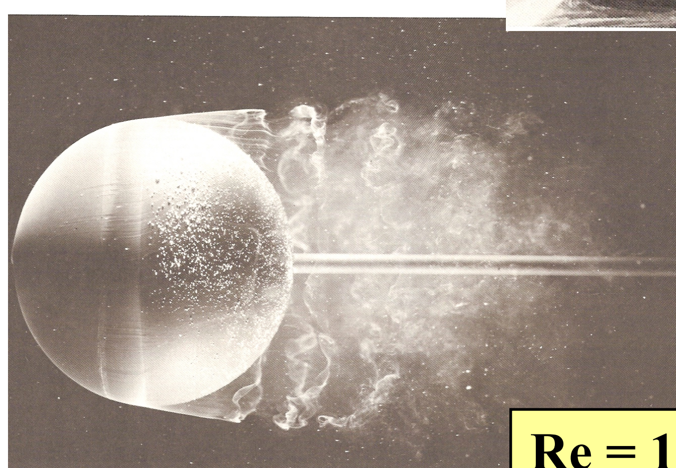
à savoir !

Que se passe-t-il lorsque l'on augmente le nombre de Re ?



Re = 25

Re = 118



Re = 15000

(Van Dyke, 1982)

Re très très petit…

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ 0 &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

Le terme d'inertie est négligeable

Ecoulements incompressibles rampants

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

Ecoulements incompressibles irrotationnels

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p \end{aligned}$$

…et Re très très grand !

Equations d'Euler

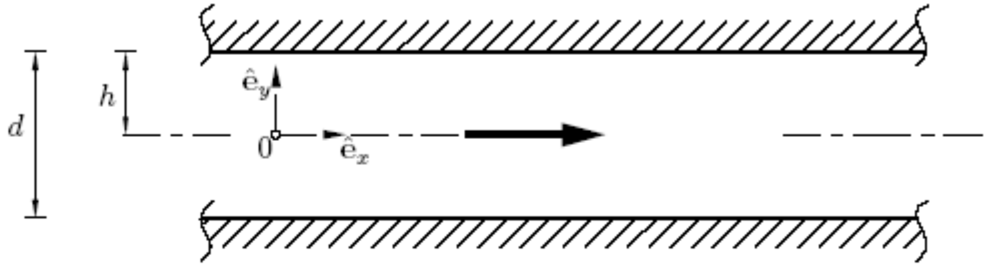
Ecoulements incompressibles stationnaires plans

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}
$$

Ecoulements 3D – 2D – 1D



Ecoulements établis :

- Une seule vitesse u
- Pas de variations de u le long de l'axe de la conduite (c'est-à-dire x)

Un écoulement établi est un écoulement dont le profil transversal de vitesse est le même quelle que ce soit la section transversale à l'écoulement.

La section doit évidemment être constante !

Ecoulements incompressibles stationnaires plans établis

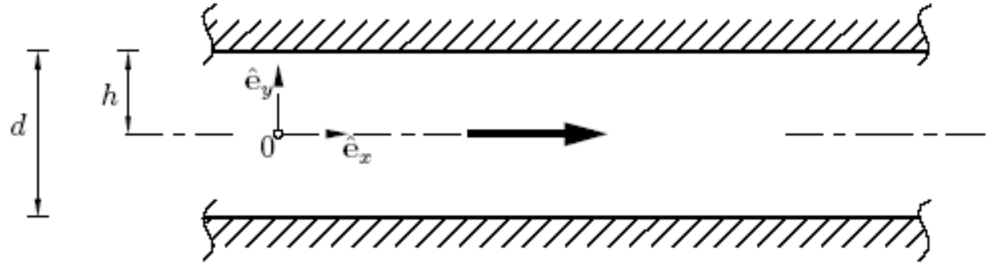
$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$$

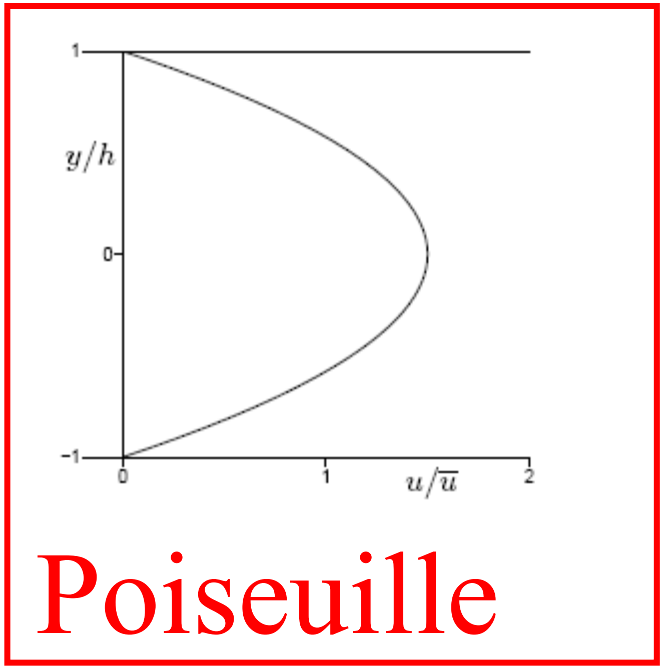
$$\rho\left(\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

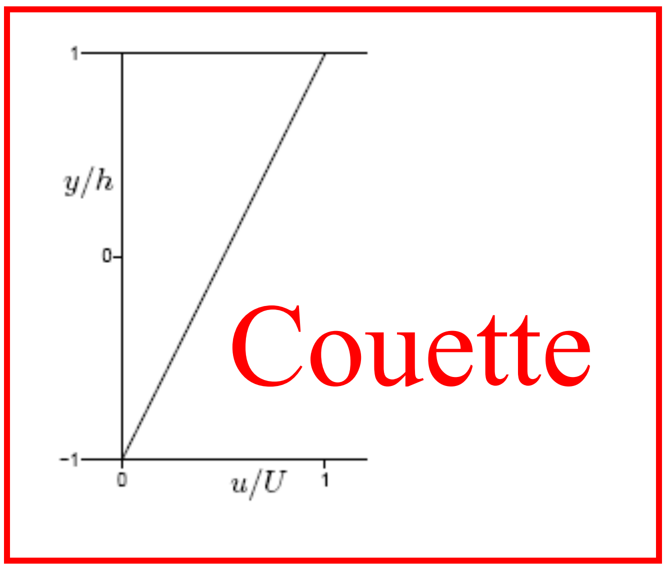
$$\rho\left(\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$$

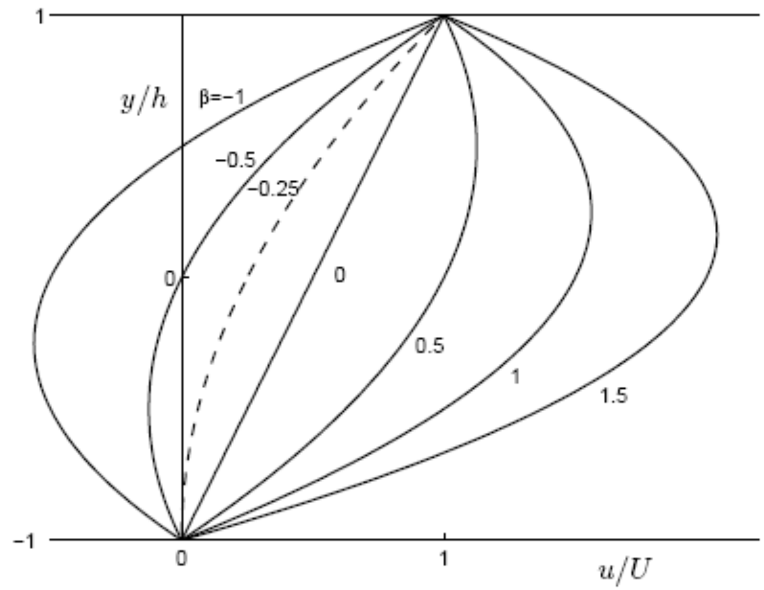
En imposant v=0 sur une des parois…

$$\boxed{0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{d^2u}{dy^2}}$$




1
0
−1
y/h
0
1
2
$u/\overline{u}$
Poiseuille


1
0
−1
y/h
0
1
u/U
Couette


1
−1
y/h
β=−1
−0.5
−0.25
0
0
0.5
1
1.5
0
1
u/U

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v) &= 0 \\
\rho\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right) \\
\rho\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ecoulements incompressibles stationnaires axisymétriques <u>établis</u>

$$
\boxed{0 \;=\; -\frac{dp}{dx} + \mu\,\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}
$$