C'est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvement

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

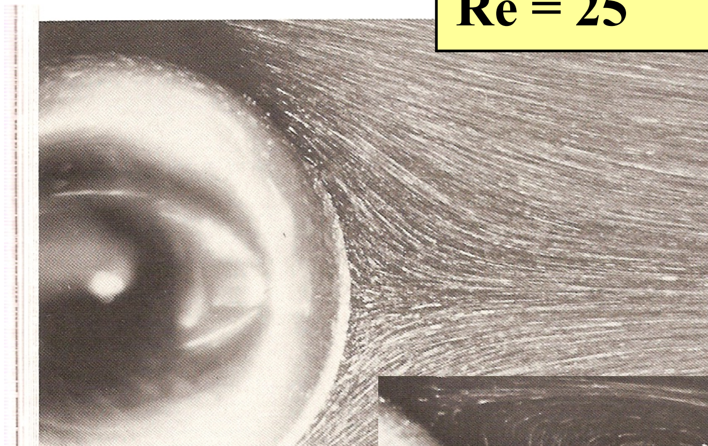
Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

$$\frac{\textbf{Forces d'inertie}}{\textbf{Forces de viscosité}}$$

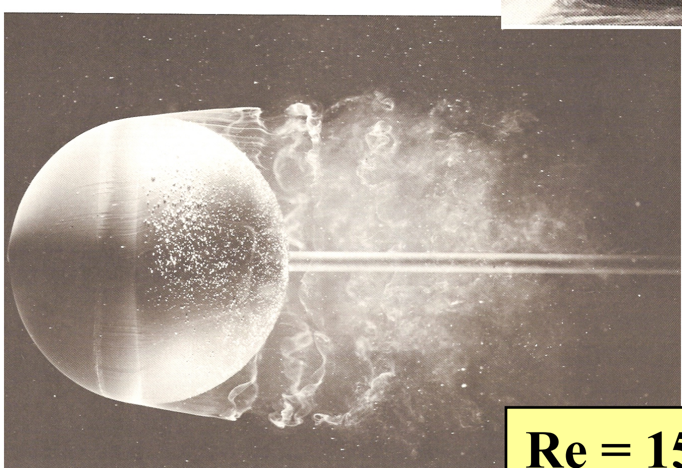
à savoir !

Que se passe-t-il lorsque l'on augmente le nombre de Re ?



Re = 25

Re = 118



Re = 15000

(Van Dyke, 1982)

Re très très petit…

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
0 &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Le terme d'inertie est négligeable

Ecoulements incompressibles rampants

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

Ecoulements incompressibles irrotationnels

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p
\end{aligned}
$$

…et Re très très grand !

Equations d'Euler

Et le thermique…

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

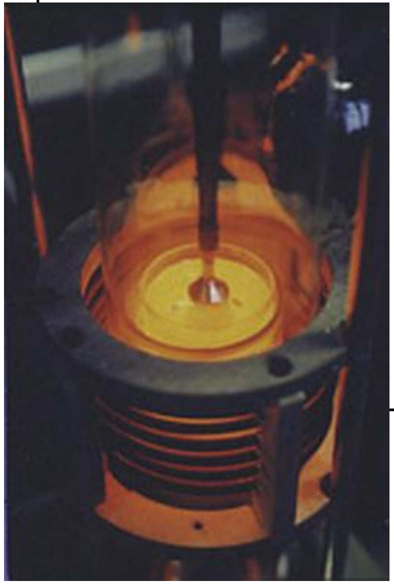
Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

Etape 1

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned}$$

Etape 2

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T,$$

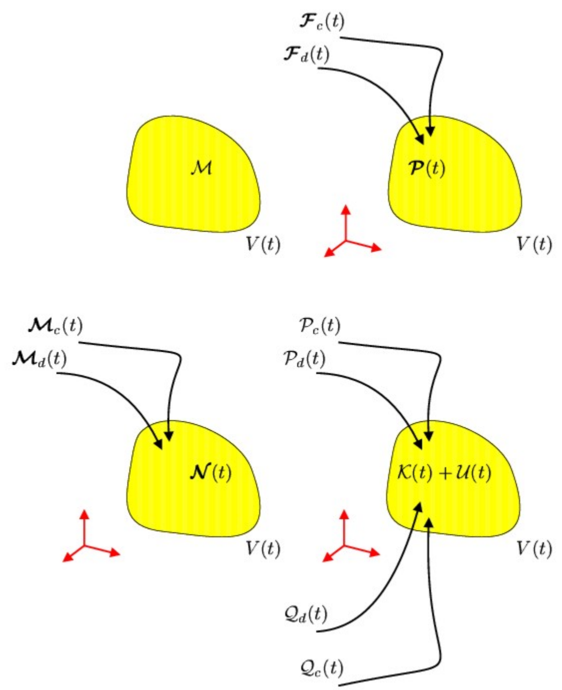


Une fois la dynamique de l'écoulement connue, on peut ensuite résoudre le problème thermique…

Principes physiques universels !

Lois de conservation | Lois de comportement

Conditions aux limites



Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.

Lois de comportement très approximatives…

Lois de conservation	Lois de comportement
Conditions aux limites	

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d,\\
\boxed{\mathbf{q} = -\hat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla}T,}&\\
\rho &= \hat{\rho}(p,T),\\
H &= \hat{H}(p,T),\\
S &= \hat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

Loi de Fourier

Modèle du fluide visqueux Newtonien

Mécanismes du transfert conductif

L'énergie se propage du chaud vers le froid

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

Le point de vue microscopique…

On examine le transfert d'énergie entre porteurs du milieu considéré. La fonction de distribution des porteurs est régie par l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique.

Isolants	***10^{-2} W/mK***
Métaux	***10^{2} W/mK***

Matériau	$k\,(W/mK)$
eau (à pression atmosphérique)	0.67
cuivre	380
aluminium	260
acier	45

Lois de conservation

Lois de comportement

Conditions aux limites

L'approche phénomélogique…

Un flux thermique dans un corps est lié à l'existence d'un gradient de température. L'équation de Fourier relie ces deux grandeurs.

Validité de la loi de Fourier…

$$\boxed{\mathbf{q}} = -k\boxed{\nabla T}$$

L'effet (le flux de chaleur) est proportionnel
à la cause (le gradient de température)

Toutefois, lorsqu'on observe un déséquilibre thermique initial, il faut un temps très faible, mais fini de l'ordre de grandeur du temps moyen entre collisions pour que les porteurs donnent naissance au flux thermique…

L'absence d'inertie dans l'expression de Fourier conduit à une vitesse de propagation infinie dans l'équation de la chaleur (équation parabolique)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

Diffusivité thermique

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{\rho c}}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

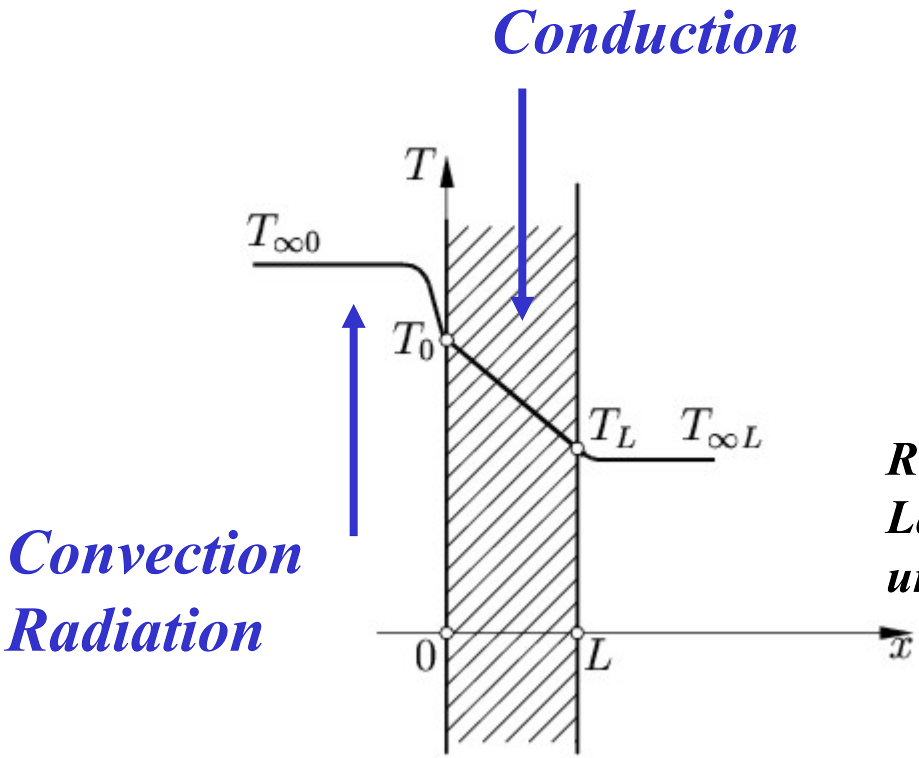
$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{r}{k} + \nabla^2 T$$

Caractérise la facilité avec laquelle un flux de chaleur transmis à un solide se traduit par un relèvement de température

Matériau	Argent	Cuivre	Acier	Verre
$10^6 \alpha \, m^2/s$	170	103	12.9	0.59
	$9.5\, min$	$16.5\, min$	$2.2\, h$	$2.0\, jours$

Milieu semi infini soumis initialement à température nulle
Surface externe mise à 100 degrés.
Temps requis pour avoir 50 degrés à 30 cm

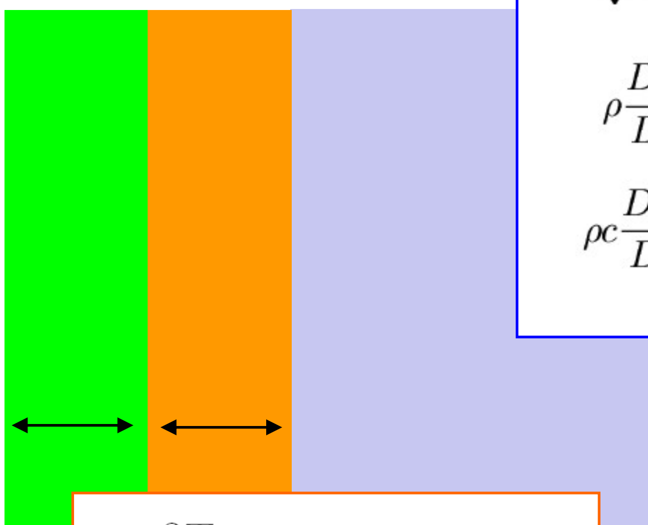
Conduction dans une plaque soumise à la convection



régime permanent

Radiateur domestique : h = 15 W/m²K
La convection libre et le rayonnement ont une contribution plus ou moins identique

Un problème pas aussi élémentaire que prévu…



$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot (2\mu \mathbf{d}) + \rho \mathbf{g}, \\
\rho c \frac{DT}{Dt} &= 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + \boldsymbol{\nabla} \cdot (k \boldsymbol{\nabla} T),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h \Delta T$$

Simplifions-le !

Loi de Newton

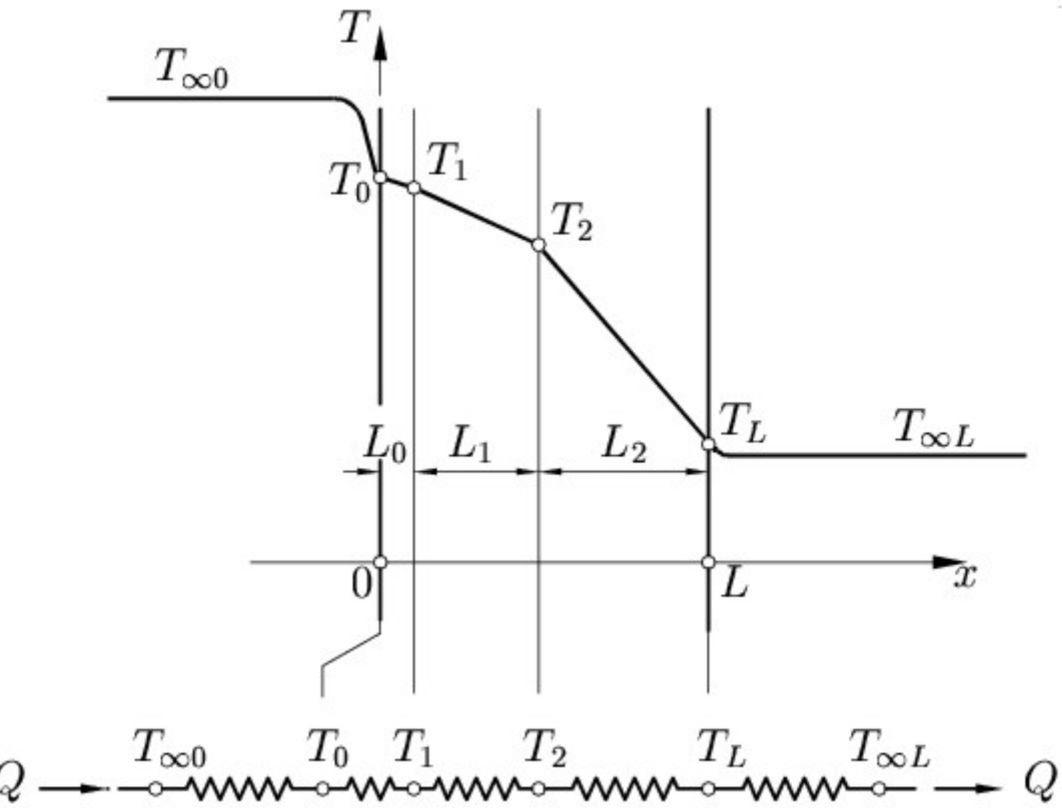
$$\boxed{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -h \Delta T}$$

Type de transfert	Fluide	$h (W/m^2 K)$
Convection forcée	gaz	10...300
	liquide aqueux	500...12000
	huile	50...1700
	métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	gaz	5...30
	liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	eau, ébullition	3000...60000
	eau, condensation	5000...110000

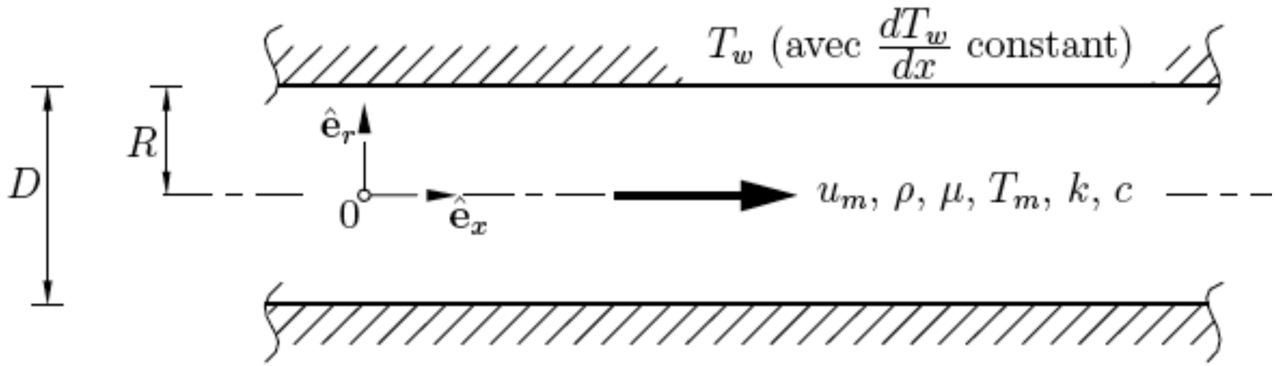
Lois de conservation | Lois de comportement

Conditions aux limites

Conduction dans une plaque soumise à la convection



analogie avec l'électricité
- **résistance convective**
- **résistance conductive**

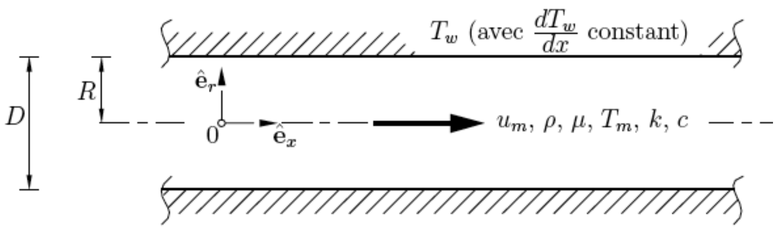


$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(T - T_w) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx}}$$

Transfert de chaleur établi

L'écoulement est établi lorsque le profil de la différence de températures du fluide et de la paroi reste constante le long de l'axe de la coonduite !

Cela suppose que l'écoulement est établi !

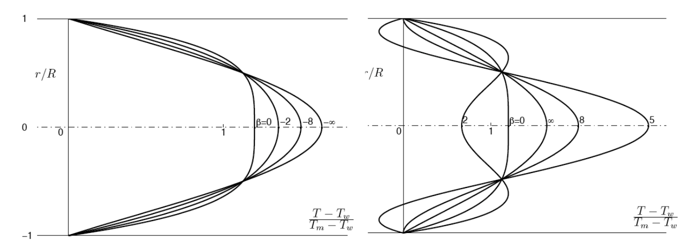


T_w constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k\, \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}\left(T-T_w\right)\right) + 16\, \mu \frac{u_m^{\,2}}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Deux cas particuliers



T_w linéaire

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T$_w$ constante

Si T_w constante…

$$\rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, 2\, u_m \cancel{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = k\, \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}(T - T_w)\right) + 16\, \mu \frac{{u_m}^2}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) - \frac{1}{8}\,\frac{\rho\, c}{k}\,\frac{dT_w}{dx}\, u_m\, R^2 \left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

T$_w$ linéaire

Un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre deux effets !

$$\beta = \rho\, c\, \frac{dT_w}{dx}\, \frac{R^2}{\mu\, u_m}$$

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\beta\, \boxed{\left(3 - 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

Effets de convection
Transport de l'énergie

Le petit frère de Reynolds : Péclet

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T \quad \mathcal{O}(\rho c U \Delta T/L)} = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + \boxed{k\boldsymbol{\nabla}^2 T \quad \mathcal{O}(k\Delta T/L^2)}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

$$Pe = \frac{\boxed{\text{Energie transportée}}}{\boxed{\text{Energie diffusée}}} = \frac{\rho c U \Delta T/L}{k\Delta T/L^2} = \frac{\rho c U L}{k}$$

Oui : c'est bien le petit frère !

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\rho U^2/L)} = -\boldsymbol{\nabla} p + \boxed{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} \quad \mathcal{O}(\mu U/L^2)}$$

Effets d'inertie
Transport de la quantité de mouvementc

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Péclet

caractérise le transfert de chaleur d'un écoulement d'un fluide !

$$Pe = \frac{\rho_0 u_0 L c_p}{k}$$

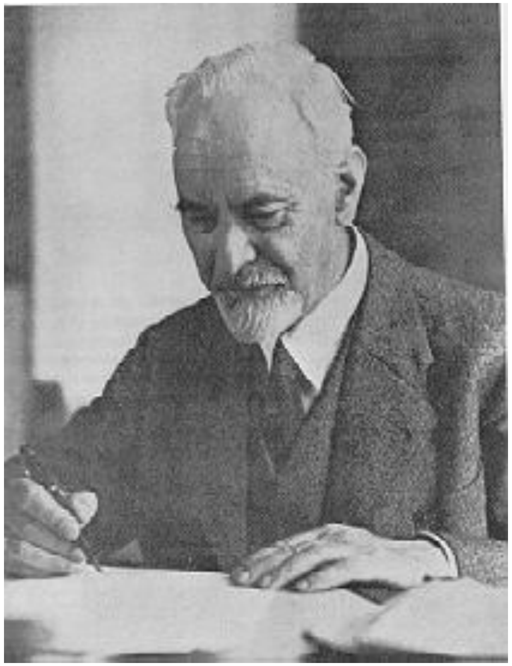
Born: 10 Feb 1793 in Besancon, France

Died: 6 Dec 1857 in Paris, France

$$\frac{\text{Puissance transportée}}{\text{Puissance diffusée}}$$

à savoir !

Nombre de Prandtl



Born: 1875 in Freising, Germany

Died: 1953 in Gottingen, Germany

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

caractérise un fluide !

$$\frac{\text{Peclet} = \text{Effets de convection / effets de conduction}}{\text{Reynold} = \text{Effets d'inertie / effets de viscosité}}$$

à savoir !

Une grande famille !

Effets de conduction
Diffusion de l'énergie

$$\boxed{\begin{array}{c}\rho c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})T \\ \\ \mathcal{O}(\rho c U\Delta T/L)\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) \\ \\ \mathcal{O}(\mu U^2/L^2)\end{array}} + r + \boxed{\begin{array}{c}k\boldsymbol{\nabla}^2 T \\ \\ \mathcal{O}(k\Delta T/L^2)\end{array}}$$

Effets de convection
Transport de l'énergie

Effets de dissipation visqueuse
Transformation d'énergie

$$Pe = \frac{\color{red}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad Pr\ Ec = \frac{\color{blue}\blacksquare}{\color{green}\blacksquare} \qquad \beta = \frac{Re}{Ec} = \frac{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}$$

$$Ec = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} = \frac{\rho U^2}{\rho c\Delta T} = \frac{U^2}{c\Delta T}$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

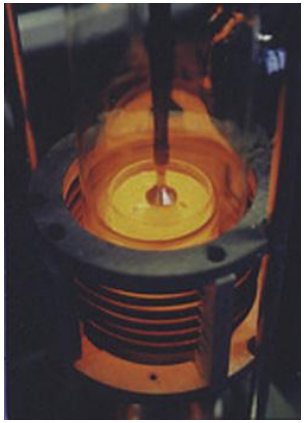
Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\textbf{Energie cinétique}}{\textbf{Energie interne}}$$

Transferts de chaleur stationnaires

$$\rho c(\mathbf{v} \cdot \nabla)T = 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + k\nabla^2 T$$



Nombre de Reynolds : Re

Nombre de Péclet : Pe

Nombre de Prandtl : Pr

Nombre d'Eckert : Ec

Nombre de Nusselt : Nu

Nombre de Biot : Bi

Coeff de frottement : C_f

Nombre de Stanton : St

Pertes de charges : λ

Nombre de Nusselt

Born: 25 Nov 1882 in Nurnberg, Germany

Died: 1 Sep 1957 in Munchen, Germany

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

caractérise une condition d'interface !

$$\frac{\text{Flux de chaleur à la paroi}}{\text{Flux de chaleur diffusé dans l'écoulement}}$$

Nombre de Biot

Born: 21 April 1774, Paris, France

Died: 3 Feb 1862, Paris, France

$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

caractérise une condition d'interface !

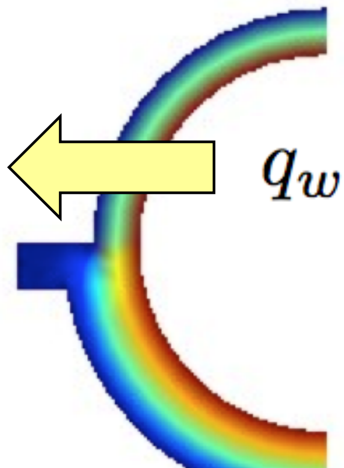
$$\frac{\text{Flux de chaleur à la paroi}}{\text{Flux de chaleur diffusé dans le solide}}$$

Le Nusselt et le Biot de l'ex-tuyau en plomb de ma salle de bain :-)

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

Ecoulement de l'air dans la salle de bain

Flux conductif de l'air !



Ecoulement de l'eau dans le tuyau !

Flux conductif de l'eau chaude

$$Nu = \frac{q_w}{k\Delta T/2R}$$

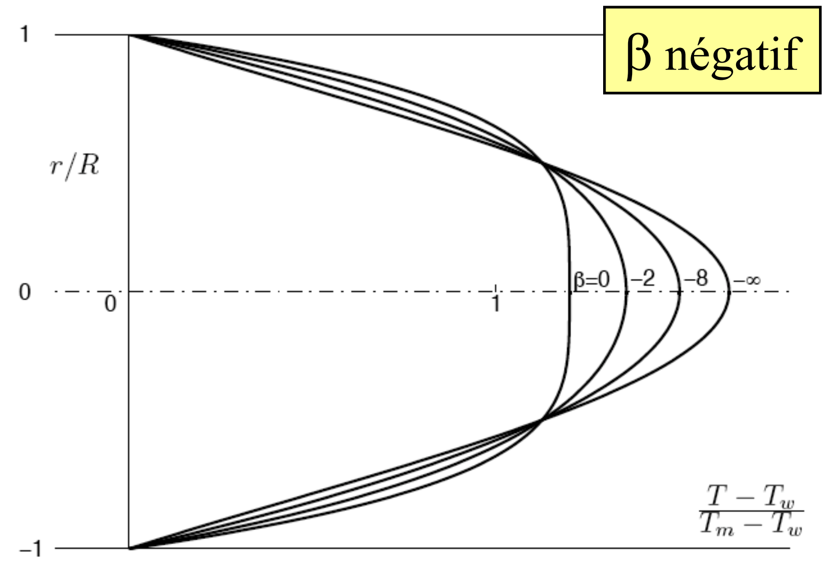
$$Bi = \frac{q_w}{k\Delta T/L}$$

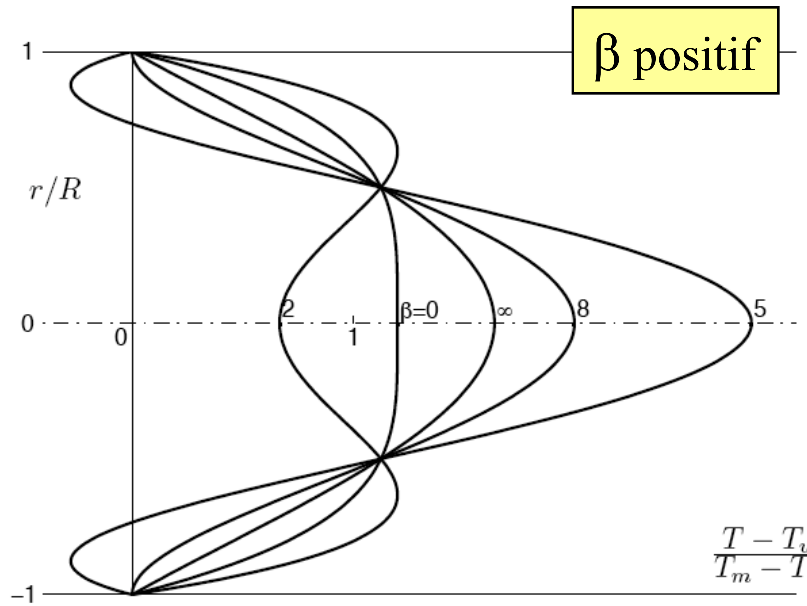
Conduction thermique dans le tuyau : tension thermiques (thermoélasticité !)

Flux conductif dans le plomb

A mi-rayon,
la température
est indépendante
de la valeur
de β !

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{9}{8} \qquad \text{en} \qquad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$





Température moyenne

$$u_m \, \pi R^2 \, (T_m - T_w) = 2\pi \, R^2 \, \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \, 2 \, u_m \left[\boxed{\underbrace{\int_0^1 \left(1-\eta^2\right)\left(1-\eta^4\right) \eta \, d\eta}_{=\frac{10}{48}}} - \frac{\beta}{8} \boxed{\underbrace{\int_0^1 \left(1-\eta^2\right)\left(3-4\eta^2+\eta^4\right) \eta \, d\eta}_{=\frac{22}{48}}} \right]$$

$$T_m - T_w \quad = \quad \frac{\mu \, {u_m}^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]$$

Cup mixing temperature

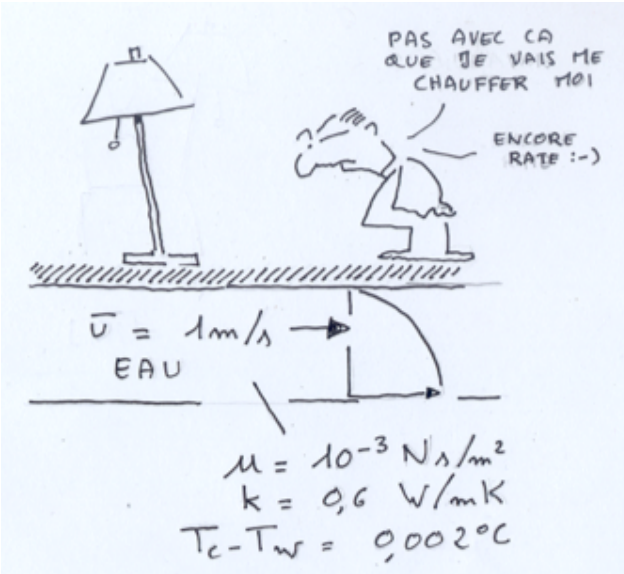
Flux de chaleur à la paroi

$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\boxed{\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)} - \frac{1}{8}\beta \boxed{\left(3-4\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)}\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R} - \frac{1}{8}\beta\left(-4\left(\frac{2r}{R^2}\right)\Big|_{r=R} + \left(\frac{4r^3}{R^4}\right)\Big|_{r=R}\right)\right]\right]$$

$$q_w = -k\left[\frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[-\frac{4}{R} - \frac{1}{8}\beta\left(-\frac{8}{R}+\frac{4}{R}\right)\right]\right]$$

$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$



$$T - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

$$q_w = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R} = 4\,k\,\frac{(T_c - T_w)}{R}$$

C'est la chaleur générée par dissipation visqueuse qui s'échappe par la paroi du tuyau !

Flux de chaleur à la paroi T_w constante

$$q_w = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}$$

Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$T_m - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\,\frac{5}{6}$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = 4\,\frac{\mu\, {u_m}^2}{R}\,\frac{k}{\mu\, {u_m}^2}\,\frac{6}{5}\,\frac{2R}{k} = \frac{48}{5} = 9.6$$

T_w constante
Nombre de Nusselt

$$q_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{2R}\left(8 - \beta\right)$$

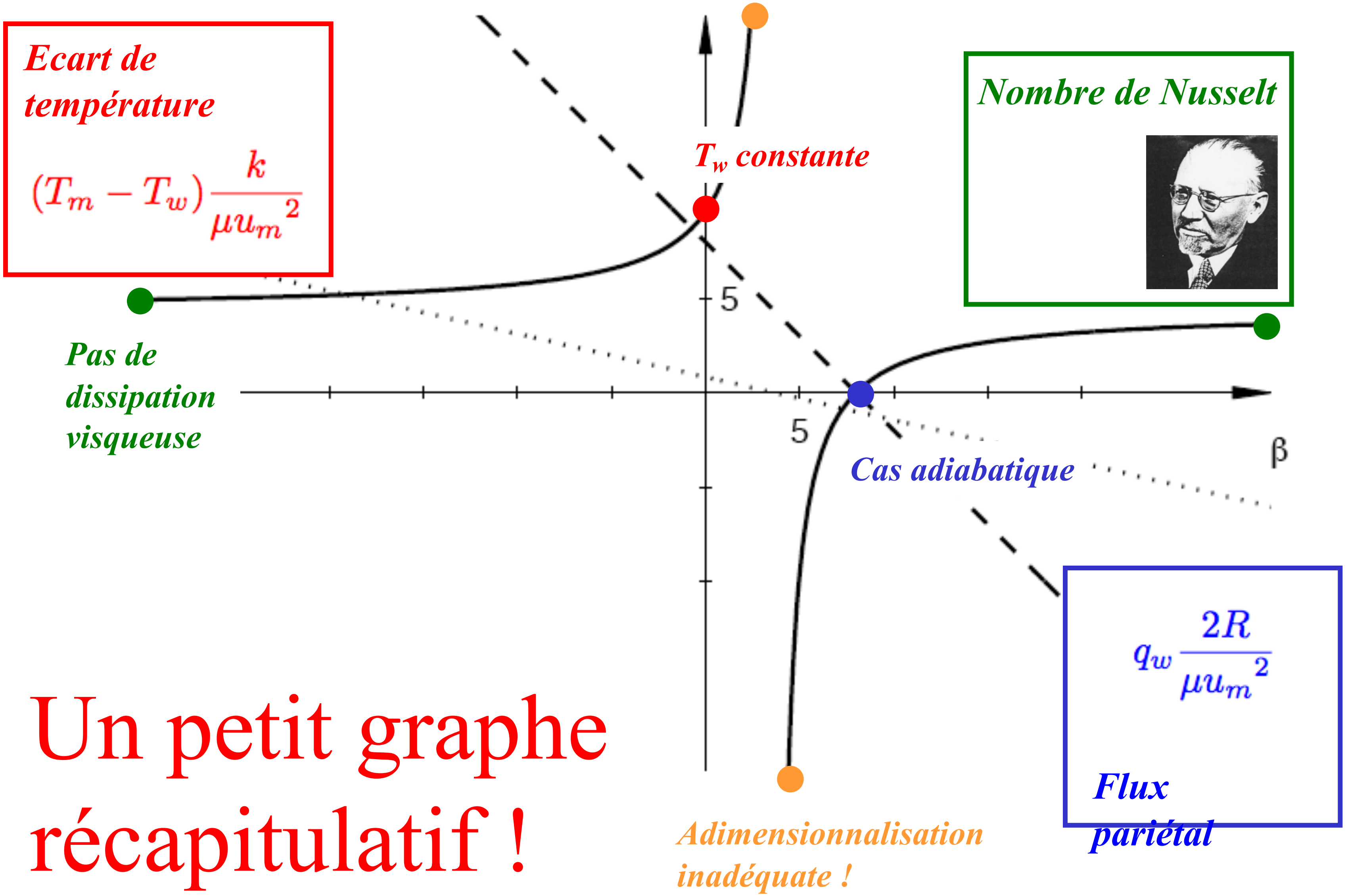
Estimation du flux de chaleur à la paroi par rapport aux effets de diffusion !

$$T_m - T_w = \frac{\mu\, {u_m}^2}{k}\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right]$$

L'écart de température caractéristique est pris avec la température moyenne !

$$Nu = \frac{\left(\;8 - \beta\;\right)}{\left(\frac{5}{6} - \frac{11}{48}\beta\right)}$$

T_w linéaire
Nombre de Nusselt



Un petit graphe récapitulatif !