Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2021	Bloc - filières :	

1 De l'huile chaude sur une plaque froide... *(50 %)*

Considérons la couche limite thermique incompressible laminaire d'une huile le long d'une plaque plane horizontale de longueur L dont la température est T_w. Le fluide hors de la zone de la couche limite a une température constante $T_w < T_e$ et une vitesse horizontale constante u_e. On néglige la dissipation visqueuse et le bilan d'énergie se réduit à l'expression suivante dans la couche limite :

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Les composantes de vitesse sont données par les expressions :

$$u(x,y) = u_e \ f'(\eta(x,y)) \qquad\qquad v(x,y) = u_e \ \delta'(x) \ \Big(\eta(x,y) f'(\eta(x,y)) - f(\eta(x,y)) \Big)$$

où $\eta(x,y) = \dfrac{y}{\delta(x)} = \dfrac{y}{\sqrt{\nu x / u_e}}$ est la variable de similitude et $f(\eta)$ est la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) & = & 0 \\ \\ f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \\ f''(0) & = & 0.332 \end{array} \right.$$

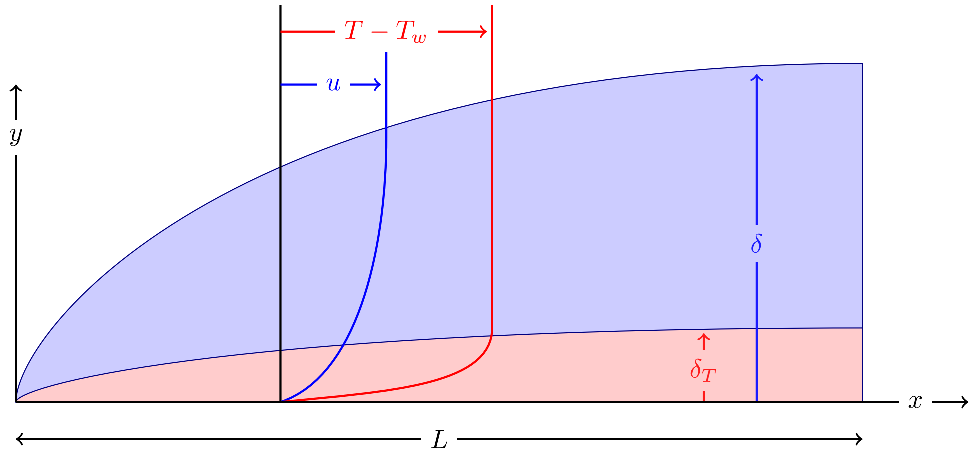
1. Définir le nombre de Prandtl.
   Calculer la valeur numérique de Prandtl pour ce problème : que peut-on en déduire ?

Il suffit d'écrire : $\boxed{Pr \ = \ \dfrac{\nu}{\alpha} \ = \ \dfrac{\mu \ c}{k} \ = \ 293}$

On peut donc en déduire que $\delta_T(x) \ll \delta(x)$ *!*

2. Faire un dessin du problème : la plaque est définie par $y = 0$ et $0 < x < L$.
   Y indiquer les couches limites $\delta(x)$ et $\delta_T(x)$.
   Esquisser le profil de vitesse et de température.

   Il suffit d'esquisser les deux couches limites en y indiquant clairement que $\delta_T(x) \ll \delta(x)$



3. Au sein de la couche limite thermique, nous allons approcher la solution de similitude $f(\eta)$ par son développement de Taylor à l'ordre deux autour de l'origine :

$$f(\eta) \approx \gamma \eta^2$$

   Donner la valeur de γ.
   Pourquoi est-ce que cette approximation est légitime[1] ?

   Le développement en série de Taylor à l'ordre deux s'écrit :

$$f(\eta) \approx \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{f'(0)}_{0}\,\eta + \underbrace{f''(0)}_{0.332}\,\frac{\eta^2}{2}$$

On déduit donc : $\boxed{\gamma \quad = \quad 0.166}$

Approcher (η) *par son développement de Taylor est clairement légitime car* $\delta_T(x) \ll \delta(x)$ *!*
C'est -en effet- lumineux sur le dessin !

[1] Si vous avez fait correctement le dessin en fonction du nombre de Prandtl, cela devrait être lumineux :-)

4. Obtenir le problème aux conditions limites que satisfait $\theta(\eta)$ défini par :

$$\theta(\eta(x,y)) = \frac{T(x,y) - T_w}{T_e - T_w}$$

en remplaçant $f(\eta)$ par l'expression $\gamma\eta^2$.

Pour obtenir l'équation différentielle ordinaire de similitude que satisfait $\theta(\eta)$, il faut exprimer tous les termes du bilan d'énergie en fonction de θ !
Tout d'abord, il s'agit de calculer les dérivées partielles de $\eta(x,y)$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -y\frac{\delta'}{\delta^2} = -\eta\frac{\delta'}{\delta} \qquad\qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\delta}$$

Ensuite, il s'agit de calculer tous les termes qui apparaissent dans l'équation de bilan :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\eta\delta'\theta'}{\delta} \qquad\qquad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\theta'}{\delta} \qquad\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\theta''}{\delta^2}$$

$$u = u_e\ f' = 2u_e\gamma\eta \qquad\qquad v = u_e\ \delta'(\eta f' - f) = u_e\delta'(2\gamma\eta^2 - \gamma\eta^2) = u_e\delta'\gamma\eta^2$$

Le bilan d'énergie peut alors se réduire à une équation différentielle ordinaire de similitude :

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\\
2u_e\gamma\eta\left(-\frac{\eta\delta'\theta'}{\delta}\right) + u_e\delta'\gamma\eta^2\left(\frac{\theta'}{\delta}\right) &= \alpha\frac{\theta''}{\delta^2}\\
-\frac{\gamma}{\alpha}\ u_e\ \delta'\delta\ \eta^2\ \theta' &= \theta''
\end{aligned}$$

Comme $\delta(x) = \sqrt{\dfrac{\nu x}{u_e}}$ *et* $\delta'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\nu}{u_e x}}$,

$$\begin{aligned}
-\frac{\gamma\ \nu}{2\alpha}\ \eta^2\ \theta' &= \theta''\\
-\frac{\gamma\ Pr}{2}\ \eta^2\ \theta' &= \theta''
\end{aligned}$$

Le problème aux conditions aux limites s'écrit finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}
\gamma\ Pr\ \eta^2\ \theta' + 2\ \theta'' &= 0\\
\theta(0) &= 0\\
\lim_{\eta\to\infty}\theta(\eta) &= 1
\end{aligned}}$$

C'est exactement le même développement que celui des notes de cours pour f quelconque !
Il est évidemment essentiel de simplifier $\delta'(x)$ et $\delta(x)$ pour que l'expression ne dépende que de η !
Et c'est malheureusement une dernière étape qu'oublient pas mal d'étudiants !

5. Démontrer que la solution de ce problème peut s'écrire sous la forme :

$$\theta(\eta) = \frac{\displaystyle\int_0^\eta \exp(-aPr^b s^c)\ ds}{\displaystyle\int_0^\infty \exp(-aPr^b s^c)\ ds}$$

Obtenir les valeurs numériques de a, b et c.

On observe immédiatement que la forme proposée satisfait les conditions aux limites :-)
Pour obtenir les trois paramètres, il suffit simplement de calculer les dérivées θ', θ'' et de substituer les expressions obtenues dans l'équation différentielle ordinaire.

$$-\gamma\ Pr\ \eta^2\ \theta' = 2\theta''$$

Comme $\theta'(\eta) = A\ \exp(-aPr^b\eta^c)$,

et donc $\theta''(\eta) = -A\ aPr^b\ c\eta^{c-1}\exp(-aPr^b\eta^c)$,

$$-\gamma\ Pr\ \eta^2 A\ \exp(-aPr^b\eta^c) = 2a\ Pr^b\ c\eta^{c-1}A\ \exp(-aPr^b\eta^c)$$

$$-\gamma\ Pr\ \eta^2 = 2a\ Pr^b\ c\eta^{c-1}$$

Et on peut donc conclure : $\boxed{\begin{array}{lllll} a & = & \gamma/6 & = & 0.0277 \\ b & = & 1 & & \\ c & = & 3 & & \end{array}}$

Finalement, on peut aussi noter que $\theta'(0) = A = \left(\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma Prs^3}{6}\right)\ ds\right)^{-1}$.

La résolution analytique de cette équation a été faite au cours dans le cadre général, mais ici on fournit la forme de la solution et il n'est même pas nécessaire de résoudre l'équation. Cette étape devait juste permettre de vérifier qu'on avait correctement obtenu l'équation différentielle ordinaire. C'était donc vraiment faisable :-)

6. Donner l'expression du flux de chaleur à la paroi $q_w = -k\dfrac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$ en fonction de $\theta'(0)$.

Il suffit d'effectuer les substitution dans la formule donnée :-)

$$\begin{aligned}
q_w &= -k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \\
&= -k(T_e - T_w)\ \frac{\partial \theta}{\partial y}\Big|_{y=0} \\
&= -k(T_e - T_w)\ \theta'(0)\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= -k(T_e - T_w)\ \theta'(0)\ \frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

La valeur absolue du flux de chaleur s'écrit donc : $\boxed{q_w = \dfrac{k\ \Delta T\ \theta'(0)}{\delta}}$

La composante en y du flux de chaleur est négatif puisque l'huile est chaude et la paroi froide, mais dans la question suivante, on va évidemment considérer la norme de ce vecteur et donc ici sa valeur absolue. En toute rigueur, il faudrait avoir une notation distincte pour l'unique composante non-nulle en y du vecteur $\boldsymbol{q}_w$ *et la norme de ce vecteur, mais cela rendrait les notations encore plus lourdes. C'est pourquoi dans les notes de cours, il est plus aisé et léger de ne garder qu'un unique symbole pour les deux concepts. L'enseignant aurait pu aussi écrire une valeur absolue dans l'énoncé : ce qui aurait lever toute ambiguité : je le reconnais bien volontiers :-)*

(**) 7. Sachant que $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^3)\ dt = 0.8929$,

démontrer que le nombre de Nusselt peut s'écrire sous la forme :

$$Nu = 0.339\ Pr^d Re^e$$

Donner les valeurs des exposants d et e.

Le nombre de Nusselt pour une distance L s'écrit :

$$\begin{aligned}
Nu &= \frac{q_w}{k\Delta T/L} \\
&= \frac{k\ \Delta T\ \theta'(0)}{\delta}\ \frac{1}{k\Delta T/L} \\
&= \theta'(0)\ \frac{L}{\delta}\ = \ \theta'(0)\ Re^{1/2}
\end{aligned}$$

Ensuite, il s'agit l'indication numérique fournie pour obtenir l'expression de $\theta'(0)$:

$$\frac{1}{\theta'(0)} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma Pr s^3}{6}\right)\ ds$$

En faisant le changement de variable $t = s\left[\frac{\gamma Pr}{6}\right]^{-1/3}$,

$$= \underbrace{\int_0^\infty \exp\left(-t^3\right)\ dt}_{=0.8929} \left[\frac{\gamma Pr}{6}\right]^{-1/3}$$

On peut finalement écrire l'expression suivante :

$$Nu = \underbrace{\left[\frac{\gamma}{6}\right]^{1/3}\frac{1}{0.8929}}_{=0.3389} Pr^{1/3}\ Re^{1/2}$$

Et on peut donc conclure : $\boxed{\begin{array}{lcl} d & = & 1/3 \\ e & = & 1/2 \end{array}}$

On observe au passage qu'on ré-obtient exactement l'expression des notes de cours avec la valeur numérique de 0.339. Cette dernière valeur fournie dans l'énoncé permettait de vérifier que tout votre raisonnement était correct : toutes mes félicitations aux 4 étudiants qui ont fait une réponse parfaite à cette question. Cela prouve aussi que l'examen de mécanique des fluides était parfaitement faisable et qu'il est possible d'obtenir une note de 20/20 pour MECA1321...

Valeurs numériques des paramètres

ρ	900	kg/m^3
μ	0.02	kg/ms
k	0.15	W/mK
c	2200	J/kgK
L	0.5	m
T_w	10	^oC
T_e	100	^oC
u_e	1	m/s

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2021	Bloc - filières :	

2 Couches limites turbulentes hydrauliquement lisses *(50 %)*

En écoulements turbulents, on utilise les grandeurs moyennées dans le temps : $\overline{u}$, $\overline{T}$.
En couches limites turbulentes, la notation δ désigne l'épaisseur totale du modèle utilisé pour le profil de vitesse. La distance à la paroi est représentée de deux manières : η qui est l'adimensionnalisation basée sur l'épaisseur de la couche limite ou y^+ qui celle basée sur la vitesse de frottement.

$$\eta = \frac{y}{\delta} \qquad\qquad y^+ = \frac{y\overline{u}_\tau}{\nu}$$

1. Dans les couches limites turbulentes, est-ce que $\delta_T(x)$ et $\delta(x)$ coïncident ?
   Justifier votre réponse avec un argument physique à l'appui.

   Il suffit d'écrire : $\boxed{\delta_T(x) = \delta(x)}$

   Les couches limites sont identiques car ce sont les mêmes tourbillons turbulents qui provoquent le transfert de quantité de mouvement et le transfert de chaleur. Toutefois, cette affirmation est valable pour les ordres de grandeur, ce n'est plus tout-à-fait exacte si on estime les couches limites $\delta_{0.9}$ et $\delta_{T,0.9}$ en observant les résultats numériques obtenus tout à la fin de cette question :-)

2. Obtenir la relation liant $\dfrac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_e}$ et C_f.
   Il faut juste utiliser les définitions de la vitesse de frottement et du coefficient de frottement !

$$\overline{u}_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$\frac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_e} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho\ \overline{u}_e^2}}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En sachant que } C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\ \rho\ \overline{u}_e^2},$$

$$\frac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_e} = \sqrt{\frac{C_f}{2}}$$

Il suffit d'écrire : $\boxed{\dfrac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_e} = \sqrt{\dfrac{C_f}{2}}}$

Cette question était vraiment élémentaire.
C'est de la pure restitution de deux définitions de base du cours :-)

3. Dans la partie proche de la paroi, on considère la zone de la couche limite qui est dominée par la turbulence. En partant de $\overline{q}_t = \overline{q}_w$, en utilisant le modèle de viscosité turbulente linéaire classique pour ν_t (avec $1/\kappa = 2.61$) et en supposant que $\alpha_t = \nu_t$, obtenir l'expression :

$$\overline{T}^+(y^+) = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}(y^+)}{\overline{T}_\tau}$$

Il faut évidemment définir correctement $\overline{T}_\tau$.
La constante d'intégration sera $A = C + 13(Pr^{2/3} - 1)$ avec $C = 4.1$ utilisée pour $\overline{u}^+(y^+)$.

Dans la zone de la couche limite dominée par la turbulence, on peut écrire :

$$\overline{q}_t = q_w$$

En vertu de la définition de $\overline{q}_t(y) = -k_t \dfrac{d\overline{T}}{dy} = -\rho c\ \alpha_t \dfrac{d\overline{T}}{dy}$,

$$-\alpha_t \frac{d\overline{T}}{dy} = \frac{q_w}{\rho\ c}$$

En supposant que $\alpha_t = \nu_t$,

$$-\nu_t \frac{d\overline{T}}{dy} = \frac{q_w}{\rho\ c}$$

En utilisant le modèle de viscosité turbulente linéaire $\nu_t = \kappa\ y\ \overline{u}_\tau$,

$$-\frac{d\overline{T}}{dy} = \frac{1}{\kappa}\ \frac{q_w}{\rho\ c\ \overline{u}_\tau}\ \frac{1}{y}$$

En définissant $\overline{T}_\tau = \dfrac{q_w}{\rho\ c\ \overline{u}_\tau}$ *et* $\overline{T}^+ = \dfrac{\overline{T}_w - \overline{T}}{\overline{T}_\tau}$,

$$\frac{d\overline{T}^+}{dy} = \frac{1}{\kappa}\ \frac{1}{y}$$

En substituant y *par* $y^+ = \dfrac{y\overline{u}_\tau}{\nu}$ *et en intégrant finalement cette expression,*

$$\overline{T}^+(y^+) = \frac{1}{\kappa}\ \log(y^+) + A$$

On obtient donc : $$\boxed{\overline{T}^+(y^+) = \frac{1}{\kappa}\ \log(y^+) + C + 13(Pr^{2/3} - 1)}$$

A nouveau, ce développement est fait dans les notes de cours.
Il avait aussi été refait lors de la dernière séance d'exercice !
Et le résultat final devrait aussi être connu : c'est vraiment une équation fondamentale de base !
Comme dirait Grégoire, c'est un véritable cadeau :-)

4. Obtenir ensuite le profil composite qui est valable pour toute la partie dominée par la turbulence :

$$\overline{T}^+(\eta) = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}(\eta)}{\overline{T}_\tau} = \Big(\text{profil proche paroi}\Big) + E \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(\alpha\,\eta)\right)$$

avec $E = 2.85$ et $\alpha = 1.166$ afin d'avoir une pente nulle en $\eta = 1$. (à ne pas faire ici :-)
Pour obtenir la valeur numérique de tous les paramètres du modèle, on considérera $Re(x) = 10^7$ et les propriétés d'une huile moteur : $\nu = 2.2\ 10^{-5}$ m^2/s et $\alpha = 7.4\ 10^{-8}$ m^2/s.
Les deux formules fournies ci-dessous seront ici bien utiles.

Il suffit juste d'exprimer y^+ en fonction de η pour obtenir le réponse demandée.

$$\begin{aligned}
y^+ \;=\; \delta^+\,\eta &= \frac{\delta\overline{u}_\tau}{\nu}\,\eta \\
&= \frac{\delta}{x}\,\frac{x\overline{u}_e}{\nu}\,\frac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_e}\;\eta \\
&= \frac{\delta}{x}\,Re\,\sqrt{\frac{C_f}{2}}\;\eta
\end{aligned}$$

En estimant $\dfrac{\delta(x)}{x} = 0.0162$ *avec la première formule fournie pour* $Re = 10^7$,

et $C_f(x) = 0.00257$ *avec la seconde formule fournie pour* $Re = 10^7$,

$$y^+ = 5808\ \eta$$

En calculant ou en reprenant simplement les valeurs numériques de tous les paramètres pour

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{2.2\ 10^{-5}}{7.4\ 10^{-8}} = 297.3$$

on obtient très aisément l'expression demandée :

$$\boxed{\overline{T}^+(\eta) \;=\; 2.61\ \log(5808\ \eta) + 570.2 + 2.85\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\ 1.166\ \eta\right)}$$

La seule difficulté était d'obtenir l'expression de η à partir de y^+, mais tous les indices fournis devaient vous mener sans souci vers la bonne réponse ! En particulier, les deux formules approchées fournissaient directement la clé pour obtenir la solution.

5. Obtenir finalement l'expression adimensionnelle habituelle du profil de température :

$$\theta(\eta) = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}(\eta)}{\overline{T}_w - \overline{T}_e}$$

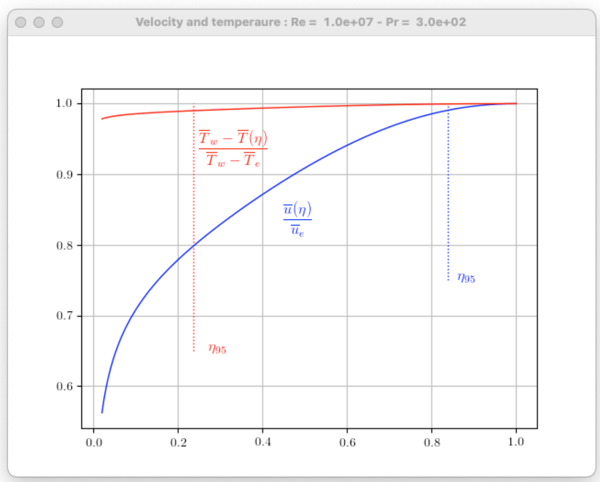
Ce profil est-il au dessus de, confondu avec, ou au dessous du profil $\dfrac{\overline{u}(\eta)}{\overline{u}_e}$?
Pourquoi ?
Il faut tout simplement observer que :

$$\theta(\eta) \;=\; \frac{\overline{T}_w - \overline{T}(\eta)}{\overline{T}_w - \overline{T}_e} \;=\; \frac{\overline{T}^+_w - \overline{T}^+(\eta)}{\overline{T}^+_w - \overline{T}^+_e} \;=\; \frac{\overline{T}^+_w - \overline{T}^+(\eta)}{\overline{T}^+_w - \overline{T}^+(1)}$$

En calculant la valeur numérique $\overline{T}^+(1) = 595.5$,
on peut donc immédiatement fournir la réponse finale.

$$\boxed{\theta(\eta) \;=\; \frac{1}{595.5}\left[2.61\ \log(5808\ \eta) + 570.2 + 2.85\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\ 1.166\ \eta\right)\right]}$$

La courbe $\overline{T}^+$ *est une simple translation vers le haut de la courbe* $\overline{u}^+$. *Lorsqu'on redimensionne ces deux courbes pour avoir une valeur unitaire en* $\eta = 1$, *on obtient respectivement* θ *et* u/u_e. *Géométriquement, il est alors évident que la courbe de température sera toujours au dessus de la courbe de vitesse :-) Tracer les deux courbes avec un petit programme*[2] *permet de s'en convaincre.*



On observe bien que le profil de température reste très proche de l'horizontale.

On y a aussi indiqué la position des épaisseurs de couches limites de vitesse et de température à 0.95%. On observe ici que l'épaisseur thermique est nettement plus mince que l'épaisseur de la couche limite de vitesse. Même si c'est au même endroit que les deux courbes se séparent de $\overline{u}_e$ *et de* $\overline{T}_e$, *on observe bien que pour un grand nombre de Prandtl, les effets thermiques restent très fortement localisés dans le voisinage de la paroi. Dire que l'épaisseur de la couche limite thermique turbulente est nettement plus petite que l'épaisseur de la couche limite de vitesse aurait aussi du sens : cela dépend de la manière dont on définit cette épaisseur :-) On voit donc que la réponse à la première question n'est pas aussi limpide qu'il n'y paraissait a priori.*

[2]Evidemment, cela n'était pas requis le jour de l'examen, mais estimer quelques valeurs avec votre calculatrice était possible :-) Faire un dessin approximatif sans aucn calcul était aussi une façon d'obtenir la réponse : c'est ce que j'avais d'ailleurs fait en résolvant la question de Grégoire !

Deux petites formules approchées utiles :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(x) &\simeq 0.162\,\frac{x}{[Re(x)]^{1/7}} \\ C_f(x) &\simeq \frac{0.455}{[\log(0.060\,Re(x))]^2} \end{aligned}}$$