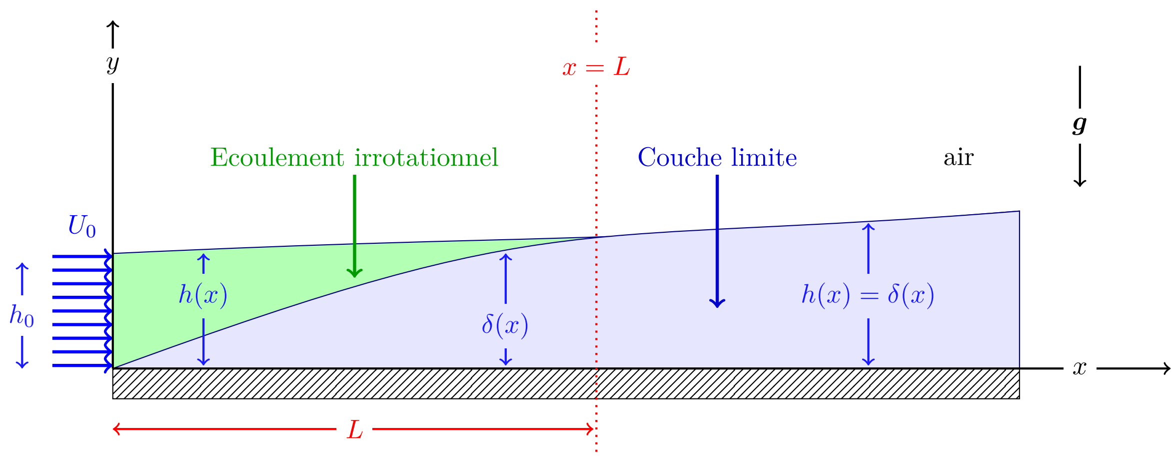
Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2022	Bloc - filières :	

1 Couche limite sous une surface libre *(50 %)*

Un jet bidimensionnel incompressible d'huile avec une hauteur h_0 et une vitesse uniforme U_0 entre en contact avec la surface supérieure d'une plaque plane. Une couche limite laminaire se développe sur la surface plane. L'épaisseur $\delta(x)$ de cette couche limite grandit progressivement et atteint la hauteur $h(x)$ de la surface libre entre l'huile et l'air à une distance L du bord d'attaque de la plaque. La pression atmosphérique au dessus du liquide est notée p_0, la gravité g et on néglige les effets de la tension superficielle. L'écoulement est stationnaire. La viscosité dynamique et la masse volumique de l'huile sont μ et ρ respectivement.



On suppose que la hauteur de la surface libre est très petite par rapport à la distance L :

$$\delta(x) \leq h(x) \ll L$$

On peut donc utiliser les équations de Prandtl dans la couche limite :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex] \rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\[2ex] 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \rho g \end{cases}$$

Comme la zone entre la couche limite et la surface est un écoulement incompressible et irrationnel, on pourra y négliger le terme visqueux.

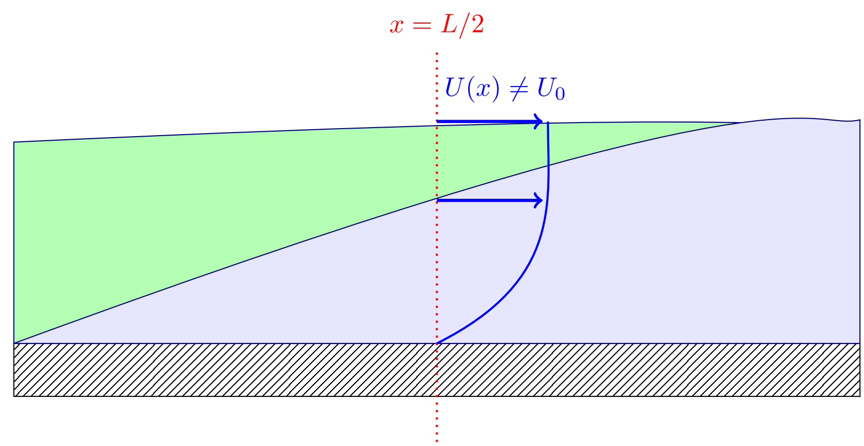
Pour se simplifier un peu la vie, nous supposons que la vitesse horizontale dans la couche limite peut être approchée sous la forme suivante :

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = a\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) + \; b\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3$$

où a et b sont deux constantes réelles et $U(x) = u(x, \delta(x))$ est la composante horizontale de la vitesse de l'huile au sommet de la couche limite.

1. Sans effectuer le moindre calcul, esquisser le profil de vitesse horizontale en $x = L/2$.

   Il faut un profil constant dans la zone irrotationnelle
   et un profil de couche limite dans l'autre partie :-)



2. Démontrer que $v(x,y) \ll U_0$.

   On note V l'ordre de grandeur caractéristique de la composante verticale de vitesse.
   On compare ensuite les ordres de grandeur des deux termes de la relation d'incompressibilité :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{O}\left(U_0/L\right)} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\mathcal{O}\left(V/h_0\right)} = 0$$

On en déduit immédiatement[1] *:* $\boxed{V = \frac{U_0 h_0}{L} \ll U_0}$

Ce raisonnement a été fait un nombre incalculable de fois au cours et en séance d'exercices !
Et donc, c'est vraiment un véritable cadeau !
Oui, c'est totalement impardonnable de ne pas écrire correctement ces deux lignes !

[1]Car l'homme est l'égal de la femme, pour ceux qui sont venus au cours !

3. Obtenir l'expression de la pression $p(x,y)$ en fonction de p_0, ρ, g et $h(x)$.

A partir de l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la direction verticale, on écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \\
p(x,y) &= -\rho g y + A(x)
\end{aligned}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En sachant que } p(x,h(x)) = p_0 \textit{ sur la surface libre,}$$

$$p(x,y) = p_0 + \rho g \Big(h(x) - y \Big)$$

L'expression demandée est donc : $\boxed{p(x,y) = p_0 + \rho g \Big(h(x) - y \Big)}$

4. Ecrire toutes les conditions aux limites pour la vitesse horizontale en $y=0$, $y=\delta(x)$ et $y=h(x)$.

Il suffit juste d'écrire :

$$\boxed{\begin{array}{lll}
u = 0 & & \textit{en } y = 0 \\
u = U(x) \quad \textit{et} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 & & \textit{en } y = h(x), \delta(x)
\end{array}}$$

Attention, la vitesse de l'écoulement bouchon est $U(x)$ et pas U_0 !

5. Obtenir les valeurs de a et b afin de satisfaire les conditions aux limites.

L'expression proposée est évidemment nulle en $y=0$!
Donc, il faut uniquement considérer les deux conditions aux limites en $y=\delta(x)$ et écrire :

$$\begin{aligned}
U(x) &= u(x,\delta(x)) &&= U(x) \Big(a + b \Big) \\
0 &= \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,\delta(x))} &&= U(x) \left.\left(\frac{a}{\delta(x)} + \frac{3b\ y^2}{\delta^3(x)} \right)\right|_{y=\delta(x)}
\end{aligned}$$

Ensuite, on résout le système linéaire : $\left\{ \begin{array}{rcl} a+b &=& 1 \\ a+3b &=& 0 \end{array} \right.$

Et on peut alors conclure : $\boxed{\begin{array}{rcl} a &=& \frac{3}{2} \\ b &=& -\frac{1}{2} \end{array}}$

6. En appliquant la conservation du débit entre $x = 0$ et $x = L$, obtenir la constante c définie par :

$$c = \frac{U_0 h_0}{U_L h_L}$$

où $U_L = U(L)$ et $h_L = h(L) = \delta(L)$.

Pour $x \geq L$, le débit s'obtient directement en intégrant le profil de vitesse obtenu car $h(x) = \delta(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{U(x)}{2} \int_0^{\delta(x)} \frac{3y}{\delta(x)} - \frac{y^3}{\delta^3(x)}\, dy \\ &= \frac{U(x)}{2} \underbrace{\left[\frac{3y^2}{2\delta} - \frac{y^4}{4\delta^3}\right]_0^{\delta(x)}}_{\frac{3\delta}{2} - \frac{\delta}{4}} \\ &= \frac{5}{8}\, U(x)h(x) \end{aligned}$$

Comme $Q_0 = U_0 h_0 = \frac{5}{8} U_L h_L = Q_L$, on obtient finalement : $\boxed{c = \frac{5}{8}}$

7. Démontrer l'équation de Bernouilli[2] pour un écoulement bidimensionnel stationnaire irrotationnel :

$$p(x, y) + \frac{\rho u^2(x, y)}{2} + \frac{\rho v^2(x, y)}{2} + \rho g y = \text{constante}$$

On écrit les deux équations du bilan de quantité de mouvement.
On peut évidemment omettre les termes visqueux puisque l'écoulement est irrotationnel.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \qquad \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$$

avec $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ *puisque* $\omega = 0$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \qquad \rho u \frac{\partial u}{\partial y} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g y\right) = 0 \qquad \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{u^2}{2} + \rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g y\right) = 0$$

[2]Pour rappel, l'unique composante du vecteur tourbillon $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ est nulle dans un tel écoulement

Comme le gradient de l'expression

$$p(x,y) + \frac{\rho u^2(x,y)}{2} + \frac{\rho v^2(x,y)}{2} + \rho g y$$

est nul, on a donc bien formellement démontré que cette expression est une constante.

□

Il est important de bien observer qu'il faut utiliser les deux équations du mouvement pour obtenir les deux composantes du gradient ! Ici, beaucoup d'étudiants se contentent d'intégrer une des équations : cela n'est pas suffisant pour démontrer l'équation de Bernouilli :-) C'est un manque de rigueur et de précision que le correcteur a sanctionné comme il se doit !

8. En utilisant l'équation de Bernouilli[3], montrer que h_L satisfait l'équation suivante :

$$\sqrt{U_0^2 + 2g(h_0 - h_L)} = d\,\frac{U_0 h_0}{h_L}$$

Obtenir la constante d.

Pour la partie irrotationnelle de l'écoulement, on applique Bernouilli en $x = 0$ et en $x = L$!

$$\begin{array}{rcl}
p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 + \rho g h_0 & = & p_0 + \frac{1}{2}\rho U_L^2 + \rho g h_L \\
U_0^2 + 2\rho(h_0 - h_L) & = & U_L^2
\end{array}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{Et comme on avait obtenu } U_0 h_0 = \tfrac{5}{8} U_L Q_L,$$

$$\begin{array}{rcl}
U_0^2 + 2\rho(h_0 - h_L) & = & \left(\frac{8}{5}\frac{U_0 h_0}{h_L}\right)^2 \\
\sqrt{U_0^2 + 2g(h_0 - h_L)} & = & \frac{8}{5}\,\frac{U_0 h_0}{h_L}
\end{array}$$

□

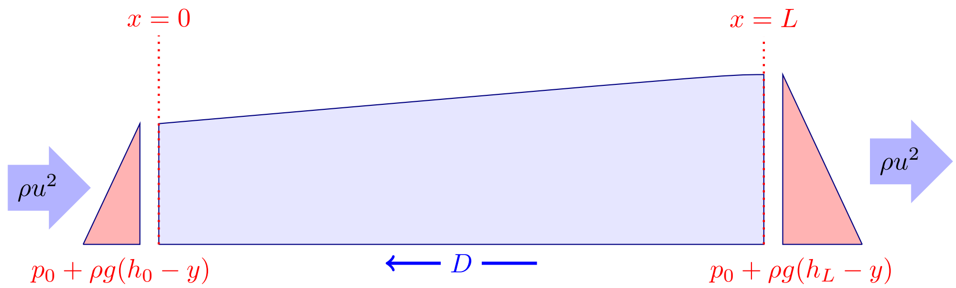
Et on conclut : $\boxed{d \;=\; \frac{1}{c} \;=\; \frac{8}{5}}$

Cette question était vraiment élémentaire et pouvait être résolue même sans avoir obtenu la valeur de c dans l'étape précédente:-) ! Si, si, c'était vraiment un cadeau :-)

[3]Evidemment, il faut tenir compte que $v(x,y) \ll u(x,y)$!

9. En appliquant la conservation de la composante horizontale de la quantité de mouvement pour le volume de contrôle de fluide compris entre $x = 0$ et $x = L$, obtenir l'expression de la force horizontale D exercée par la plaque sur l'huile (par unité de largeur) sur la section $0 < x < L$. L'expression obtenue sera une fonction de h_0, h_L, U_0, U_L et des paramètres matériels.

Tout d'abord, il faut considérer les apports et pertes par convection en $x = 0$ et $x = L$. Ensuite ajouter les composantes horizontales des forces de contact : les deux profils (différents :-) de pression à droite et à gauche ainsi que la force de trainée D du sol sur le fluide.



Le bilan sur le volume de contrôle permet donc d'écrire

$$D = \rho U_0^2 h_0 - \int_0^{h_L} \rho u^2(L,y)\ dy + \underbrace{\int_0^{h_0} p_0 - \rho g(h_0 - y)\ dy}_{p_0 h_0 + \frac{\rho g h_0^2}{2}} - \underbrace{\int_0^{h_L} p_0 - \rho g(h_L - y)\ dy}_{p_0 h_L + \frac{\rho g h_L^2}{2}}$$

En substituant $u(L,y) = \frac{U_L}{2}\left(3\frac{y}{\delta_L} - \frac{y^3}{\delta_L^3}\right)$ *avec* $\delta_L = h_L$ *dans le flux convectif,*

$$D = \rho U_0^2 h_0 + p_0(h_0 - h_L) + \frac{\rho g}{2}(h_0^2 - h_L^2) - \frac{\rho U_L^2}{4} \int_0^{h_L} \left(9\frac{y^2}{h_L^2} - 6\frac{y^4}{h_L^4} + \frac{y^6}{h_L^6}\right)\ dy$$

$$D = \rho U_0^2 h_0 + p_0(h_0 - h_L) + \frac{\rho g}{2}(h_0^2 - h_L^2) - \frac{\rho U_L^2}{4} \left[\frac{9}{3}\frac{y^3}{h_L^2} - \frac{6}{5}\frac{y^5}{h_L^4} + \frac{y^7}{7\ h_L^6}\right]_0^{h_L}$$

$$D = \rho U_0^2 h_0 + p_0(h_0 - h_L) + \frac{\rho g}{2}(h_0^2 - h_L^2) - \frac{\rho U_L^2}{4}\ h_L\ \frac{(105 - 42 + 5)}{35}$$

L'expression finale s'écrit : $\boxed{D = \rho U_0^2 h_0 + p_0(h_0 - h_L) + \frac{\rho g}{2}(h_0^2 - h_L^2) - \rho U_L^2 h_L\ \frac{17}{35}}$

Quasiment, aucun étudiant n'a obtenu la réponse correcte !
Au mieux l'apport des termes de pressions est oublié et tout le reste est bien calculé.
Parfois, on oublie les flux convectifs de quantité de mouvement en tenant compte de la pression.

Réaliser correctement ce petit bilan sur un volume de contrôle a semblé une tâche insurmontable pour les étudiants au très grand désespoir du correcteur qui estimait cette question réellement et très franchement faisable pourtant.

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2022	Bloc - filières :	

2 Ecoulements turbulents *(50 %)*

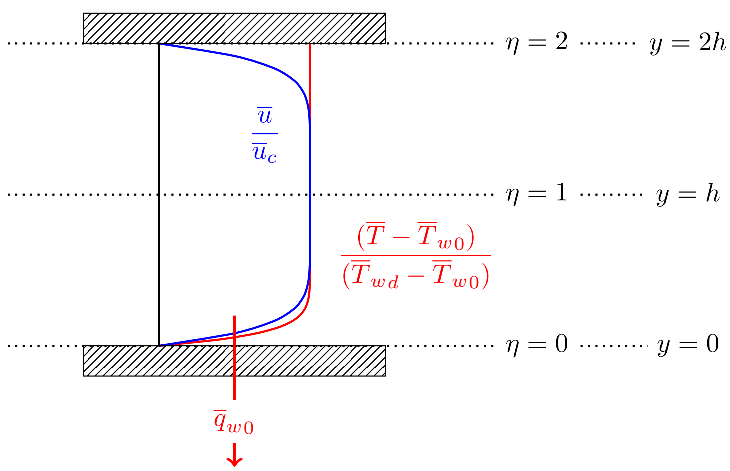
On considère un **écoulement turbulent et établis en canal** et à grand nombre de Reynolds Re_d et avec un nombre $Pr \geq 0.5$. Les grandeurs sont moyennées dans le temps et notées $\overline{u}$, $\overline{T}$. La vitesse moyenne de l'écoulement est notée $\overline{u}_m$ et sa température moyenne est notée $\overline{T}_m$. La distance entre les plaques est $d = 2h$ et y est la distance mesurée à partir de la paroi inférieure. On définit aussi $\eta = \frac{y}{h}$.

On considère du **transfert thermique établi**. La densité de flux de chaleur sortant à la paroi inférieure est imposée constante en x: on la note $\overline{q}_{w0} < 0$. La température de cette paroi est notée $\overline{T}_{w0}(x)$. La paroi supérieure (en $y = d$) est isolée thermiquement, et sa température est notée $\overline{T}_{wd}(x) > \overline{T}_{w0}(x)$.

Rappel: On a que $\overline{\tau}(y) + \overline{\tau}^t(y) = \overline{\tau}_w \ (1 - \eta)$ et on définit $\overline{u}_\tau = \sqrt{\frac{\overline{\tau}_w}{\rho}}$.

1. Esquissez l'allure du profil de $\frac{(\overline{T}-\overline{T}_{w0})}{(\overline{T}_{wd}-\overline{T}_{w0})}$ en fonction de η au travers de tout le canal. Esquissez aussi, sur le même graphe, l'allure du profil de $\frac{\overline{u}}{\overline{u}_c}$ au travers de tout le canal ($\overline{u}_c$ étant la vitesse au centre du canal).

   Il suffit d'esquisser les deux profils adimensionnels :-)



Il faut dessiner des profils turbulents (et donc pas des paraboles !)
Le profil de température est évidemment un plateau sur la section $h < y < 2h$ avec une dérivée nulle sur la paroi isolée thermiquement !
Dessiner une droite en diagonale pour la température : pas une bonne idée !
Le profil de température a été dessiné de manière un peu plus raide car $Pr = 3$.
Question vraiment simple qui a pourtant posé des difficultés à pas mal d'étudiants !

2. Définissez $\overline{u}_m$ et $\overline{T}_m$ dans le cas présent.

Pour rappel, on définit la vitesse moyenne et la température moyenne pour avoir respectivement un débit et un flux de chaleur transportée équivalents !

$$\begin{aligned} 2h\ \overline{u}_m &= \int_0^{2h} \overline{u}(y)\ dy \ = \ 2 \int_0^h \overline{u}(y)\ dy \\ 2h\ \rho c\ \overline{u}_m \overline{T}_m &= \int_0^{2h} \rho c\ \overline{u}(y)\overline{T}(y)\ dy \end{aligned}$$

Il faut donc définir :
$$\boxed{\begin{aligned} \overline{u}_m &= \frac{1}{h}\int_0^h \overline{u}(y)\ dy \\ \overline{T}_m &= \frac{1}{2h}\frac{1}{\overline{u}_m}\int_0^{2h} \overline{u}(y)\overline{T}(y)\ dy \end{aligned}}$$

Il faut évidemment utiliser le concept de cup mixing temperature *pour la température moyenne ! Un nombre incalculable d'étudiants semblent avoir oublié ce qui a été présenté au troisième cours par votre serviteur : la température moyenne n'est pas une moyenne usuelle. Attention, le profil de température n'est pas symétrique par rapport au centre du canal. On doit donc bien intégrer jusque 2h pour définir la température moyenne. C'était pourtant une question vraiment facile :-)*

3. On considère ici un **modèle composite amélioré** pour le profil universel de vitesse. Pour la partie de l'écoulement dominée par la turbulence, on a dans le cas hydrauliquement lisse:

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_\tau} = \left(\frac{1}{\kappa}\log y^+ + C\right) + G(\eta)$$

avec $G(\eta) = E\ \left(4\,(\alpha\eta)^3 - 3\,(\alpha\eta)^4\right)$ une fonction complément améliorée.
Les valeurs calibrées sont $\kappa = 0.383$, $C = 4.25$ et $E = 0.30$.

Le facteur α n'est pas un paramètre: il est calculé de façon à imposer une pente nulle du profil de vitesse en $\eta = 1$. Obtenez l'équation mathématique que doit satisfaire α. Vérifiez que sa solution est $\alpha \simeq 1.317$.

Le profil composite amélioré peut s'écrire comme :

$$\overline{u}^+(y) = \underbrace{\left[\frac{1}{\kappa}\log\left(\frac{y\overline{u}_\tau}{\nu}\right) + C\right]}_{f(y^+)} + \underbrace{E\left[4\left(\frac{\alpha y}{h}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha y}{h}\right)^4\right]}_{G(\eta)}$$

Il s'agit donc juste d'évaluer la dérivée de cette fonction et de l'évaluer en $y = h$.

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\overline{u}^+}{dy}\right|_{y=h} &= \left[\frac{1}{\kappa}\ \frac{\overline{u}_\tau}{\nu}\ \frac{\nu}{y\overline{u}_\tau}\right]_{y=h} + E\left[12\frac{\alpha^3 y^2}{h^3} - 12\ \frac{\alpha^4 y^3}{h^4}\ \right]_{y=h} \\ &= \frac{1}{\kappa h} + \frac{12E}{h}(\alpha^3 - \alpha^4)\ = \ \frac{12E}{h}\underbrace{\left[\frac{1}{12E\kappa} + (\alpha^3 - \alpha^4)\right]}_{=0.001}\ \approx\ 0 \end{aligned}$$

L'équation que doit satisfaire α est : $\boxed{\frac{1}{12E\kappa} + (\alpha^3 - \alpha^4) \quad = \quad 0}$

Cette équation est bien satisfaite approximativement pour $\alpha = 1.317$.

$\square$

Il s'agit donc juste de dériver une fonction !
Cela reste une question simple :-)

4. Obtenez l'expression pour le **profil de viscosité turbulente** qui correspond à ce profil de vitesse composite. Exprimez le résultat final sous la forme:

$$\frac{\nu_t}{\overline{u}_\tau\, h} = f(\eta)$$

Comparez l'expression obtenue avec le modèle classique pour la "région proche de la paroi":

$$\frac{\nu_t}{\overline{u}_\tau\, h} = \kappa\, \eta\, (1 - \eta)$$

La viscosité pour ce modèle est définie comme le rapport de la contrainte turbulente et de la dérivée du profil de vitesse du modèle composite amélioré.

$$\begin{aligned}
\rho\nu_t\, \frac{d\overline{u}}{dy} &= \overline{\tau}_w(1-\eta) \\
\rho\nu_t\ \overline{u}_\tau\ \frac{d\overline{u}^+}{dy} &= \rho\overline{u}_\tau^2(1-\eta)
\end{aligned}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En substituant la dérivée obtenue au point précédent,}$$

$$\begin{aligned}
\rho\nu_t\ \overline{u}_\tau\ \left[\frac{1}{\kappa}\,\frac{1}{\eta h} + 12E\left[\frac{\alpha^3\eta^2}{h} - 1\ \frac{\alpha^4\eta^3}{h}\right]\right] &= \rho\overline{u}_\tau^2(1-\eta) \\
\frac{\nu_t}{\overline{u}_\tau\, h}\left[\frac{1}{\kappa}\,\frac{1}{\eta} + 12E\ (\alpha^3\eta^2 - \alpha^4\eta^3)\right] &= (1-\eta) \\
\frac{\nu_t}{\overline{u}_\tau\, h}\Big[1 + 12E\kappa\ (\alpha^3\eta^3 - \alpha^4\eta^4)\Big] &= \kappa\eta(1-\eta)
\end{aligned}$$

L'expression demandée est finalement : $\boxed{\frac{\nu_t}{\overline{u}_\tau\, h} \quad = \quad \frac{\kappa\eta(1-\eta)}{1 + 12E\kappa\,[(\alpha\eta)^3 - (\alpha\eta)^4]}}$

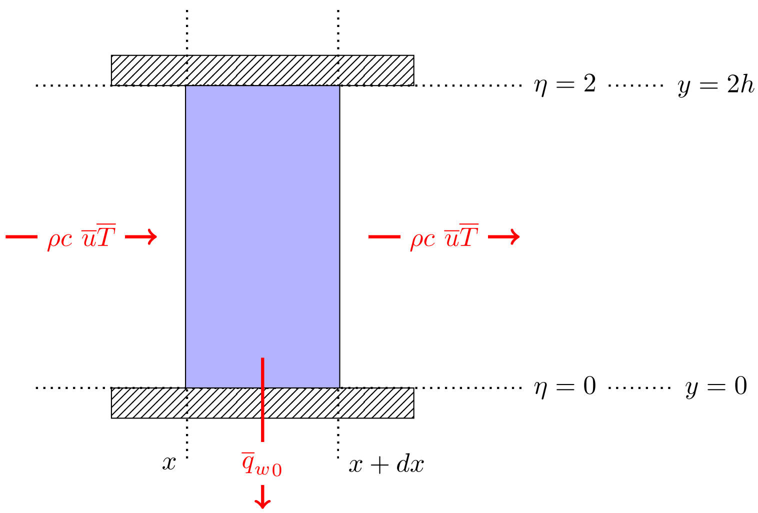
On observe bien que le terme additionnel au dénominateur
par rapport au modèle classique tend vers zéro dans la zone proche paroi.
En d'autres mots, notre expression tend vers le modèle classique dans cette zone.
Typiquement, le dénominateur vaut $1.00853 \approx 1$ *lorsque* $\eta = 0.15$.

5. Par bilan sur un volume de contrôle différentiel (de x à $x + dx$), obtenez l'expression pour $\frac{d\overline{T}_m}{dx}$. Vérifiez que c'est une constante: on a donc que $\overline{T}_m(x)$ est linéaire en x.

   Pour tout y fixé, que $\overline{T}(x, y)$ est aussi linéaire en x: car le transfert thermique est établi.

   Esquissez l'allure de l'évolution de $\overline{T}_{w0}$, $\overline{T}_m$ et $\overline{T}_{wd}$ en fonction de x (tous sur le même graphe!).

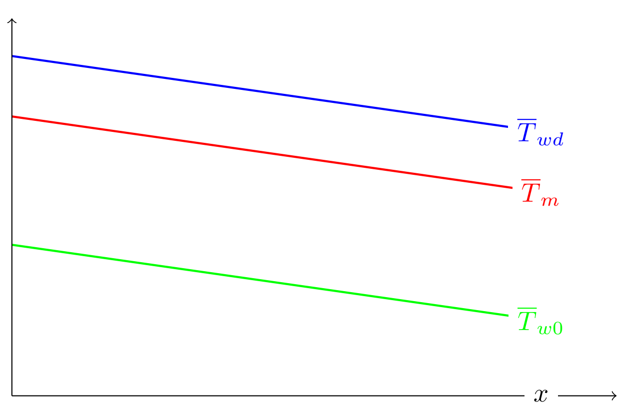
On définit un volume de contrôle comme suit :



En effectuant le bilan d'énergie sur ce volume de contrôle et en tenant compte que l'énoncé définit explicitement le flux sortant avec un signe négatif, on écrit alors

$$
\begin{aligned}
2h\rho c\ \overline{u}_m\overline{T}_m(x + dx) - \overline{q}_{w0}\ dx &= 2h\rho c\ \overline{u}_m\overline{T}_m(x) \\
2h\rho c\ \overline{u}_m\frac{d\overline{T}_m}{dx} &= \overline{q}_{w0} \\
\frac{d\overline{T}_m}{dx} &= \frac{\overline{q}_{w0}}{2h\rho c\ \overline{u}_m} = \textit{constante}
\end{aligned}
$$

Comme $\overline{u}_m > 0$ et $\overline{q}_{w0} < 0$ sont constants, $\overline{T}_m$ est bien une fonction linéaire décroissante. □



6. En utilisant un “bon modèle” pour k_t, obtenez l’expression pour le profil de température, $\frac{(\overline{T}_{w0}-\overline{T})}{\overline{T}_\tau}$ (avec $\overline{T}_\tau$ à définir), en fonction de y^+ dans la partie proche de la paroi inférieure et dominée par la turbulence.

   Aide: on se souviendra d’un certain modèle vu au cours pour une “constante d’intégration”:

$$A(Pr) = 13\left(Pr^{2/3} - 1\right) + C$$

   Obtenez aussi son expression dans la partie à dominance laminaire.

Dans la zone de la couche limite dominée par la turbulence, on peut écrire :

$$\overline{q}_t = q_w$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En vertu de la définition de } \overline{q}_t(y) = -k_t \frac{d\overline{T}}{dy} = -\rho c\ \alpha_t \frac{d\overline{T}}{dy}\ ,$$

$$-\alpha_t \frac{d\overline{T}}{dy} = \frac{q_w}{\rho\ c}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En supposant que } \alpha_t = \nu_t \textit{ ou } Pr_t = 1,$$

$$-\nu_t \frac{d\overline{T}}{dy} = \frac{q_w}{\rho\ c}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En utilisant le modèle de viscosité turbulente linéaire } \nu_t = \kappa\ y\ \overline{u}_\tau\ ,$$

$$-\frac{d\overline{T}}{dy} = \frac{1}{\kappa}\ \frac{q_w}{\rho\ c\ \overline{u}_\tau}\ \frac{1}{y}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En définissant } \overline{T}_\tau = \frac{q_w}{\rho\ c\ \overline{u}_\tau} \textit{ et } \overline{T}^+ = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}}{\overline{T}_\tau},$$

$$\frac{d\overline{T}^+}{dy} = \frac{1}{\kappa}\ \frac{1}{y}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En substituant } y \textit{ par } y^+ = \frac{y\overline{u}_\tau}{\nu} \textit{ et en intégrant finalement cette expression,}$$

$$\overline{T}^+ = \frac{1}{\kappa}\ \log(y^+) + A$$

On obtient donc : $\boxed{\overline{T}^+ = \frac{1}{\kappa}\ \log(y^+) + C + 13(Pr^{2/3} - 1)}$

C’était exactement la question posée en janvier 2021 : difficile d’être plus gentil !
Cool, pour écrire la correction aussi :-)
Toutefois, il faut ajouter le calcul pour la partie laminaire, cette année :-)

Dans la zone de la couche limite laminaire, on peut écrire :

$$\overline{q} = q_w$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En vertu de la définition de } \overline{q}(y) = -k\frac{d\overline{T}}{dy} = -\rho c\ \alpha\frac{d\overline{T}}{dy}\ ,$$

$$-\alpha\frac{d\overline{T}}{dy} = \frac{q_w}{\rho\ c}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En se souvenant que } Pr = \frac{\nu}{\alpha},$$

$$-\nu\frac{d\overline{T}}{dy} = Pr\ \frac{q_w}{\rho\ c}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En définissant } \overline{T}_\tau = \frac{q_w}{\rho\ c\ \overline{u}_\tau} \textit{ et } \overline{T}^+ = \frac{\overline{T}_w - \overline{T}}{\overline{T}_\tau},$$

$$\nu\frac{d\overline{T}^+}{dy} = Pr\ \overline{u}_\tau$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En substituant } y \textit{ par } y^+ = \frac{y\overline{u}_\tau}{\nu} \textit{ et en intégrant finalement cette expression,}$$

$$\overline{T}^+ = Pr\ \frac{y\overline{u}_\tau}{\nu} = Pr\ y^+$$

On obtient donc : $\boxed{\overline{T}^+ = Pr\ y^+}$

Cela reste toujours et encore de la restitution d'un développement fait au cours :-)
Cela reste donc une question facile qu'il est dommage de négliger de faire !

7. On considère un cas avec $Pr = 3$ et $Re_\tau = 5000$ en supposant également que $\delta_T = \delta$.

   Esquissez l'allure du profil de $\frac{(\overline{T}_{w0}-\overline{T})}{\overline{T}_\tau}$ en fonction de y^+ (en axe logarithmique avec 1, 10, 100, etc.) jusqu'à la paroi supérieure.

   Esquissez aussi, sur le même graphe, l'allure du profil de $\frac{\overline{u}}{\overline{u}_\tau}$ jusqu'au centre du canal.

Pour réaliser l'esquisse demandée, il faut procéder comme suit avec soin et méthode :-)

- *Tout d'abord, il faut remarquer que le centre du canal défini par $\eta = 1, y = h$ correspond à l'abscisse $y^+ = 5000$, puisque*

$$Re_\tau = \frac{h\overline{u}_\tau}{\nu} = h^+ = 5000$$

- *La paroi supérieure du canal se situe évidemment en $2h^+ = y^+ = 10000$:-)*
- *La fonction complément est négligeable lorsque $\eta < 0.15$: dans notre graphe, cela correspond à une valeur de $y^+ = 0.15 \times 5000 = 750$.*

- *Le modèle composite sera vraiment utile pour la région* $750 < y^+ < 5000$.
- *Le modèle logarithmique simple est pertinent pour la région* $100 < y^+ < 750$.
- *Le modèle laminaire est à utiliser pour la région* $0 < y^+ < 5$.
- *Il faut noter que* $\overline{u}^+ = y^+$ *et* $\overline{T}^+ = 3y^+$, *puisque* $Pr = 3$.
  On peut donc très aisément tracer les deux courbes en sachant qu'elles valent respectivement $(1, 3)$ *pour* $y^+ = 1$ *et* $(10, 30)$ *pour* $y^+ = 10$.
- *Pour les deux droites correspondant au modèles logarithmiques, il faut évaluer numériquement deux points par droite pour pouvoir espérer les tracer avec un minimum de précision.*
  Par exemple, on peut les évaluer en $y^+ = 100$ *et* $y^+ = 1000$.

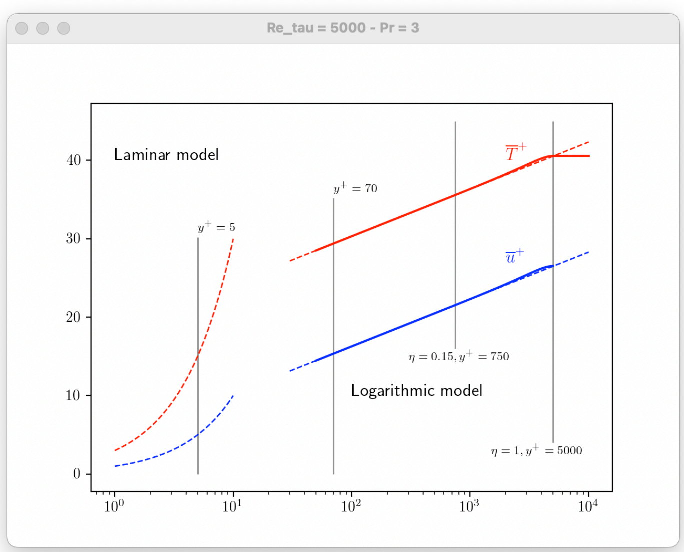
$$
\begin{aligned}
\overline{u}^+ &= \frac{1}{\kappa}\log(y^+) + C &&= \frac{1}{0.383}\log(y^+) + 4.25 \\
\overline{T}^+ &= \frac{1}{\kappa}\log(y^+) + C + 13\left(Pr^{2/3} - 1\right) &&= \frac{1}{0.383}\log(y^+) + 18.29
\end{aligned}
$$

On obtient très aisément les quatre valeurs numériques pour tracer les droites.

y^+	$\overline{u}^+$	$\overline{T}^+$
100	16.274	30.314
1000	22.286	36.326

- *Finalement, le profil de température sera constant pour* $5000 < y^+ < 10000$.
- *Ne pas tracer la vitesse au delà de* $y^+ = 5000$ *: ce serait vraiment pas très joli à faire et cela n'a aucun intérêt. Evidemment, la vitesse décroît de manière symétrique dans l'espace réel, mais pas dans un graphe logarithmique.*

Tout cela devrait vous permettre d'esquisser un graphe proche de celui que j'ai obtenu avec un petit programme python. Mais sans rien programmer, notre ami Grégoire avait tracé manuellement un graphe vraiment très précis même si on a naturellement tendance à exagérer l'effet de la fonction complément qui a un impact assez modeste en réalité, en réalisant une telle esquisse.



Tracer avec rigueur et à l'échelle demande un peu de soin et de calme : mais c'est parfaitement possible. Il est sans doute judicieux de s'entrainer à réaliser ce genre de graphique sans utiliser un ordinateur, avec uniquement votre calculatrice. C'est plus simple qu'il n'y paraît et c'est sans doute la meilleure manière de devenir un vrai expert dans les écoulements turbulents en conduite et en canal. Vous voilà donc prévenus pour l'examen du mois d'août si vous devez malencontreusement un peu (ou beaucoup) réviser le cours de mécanique des fluides pendant les doux mois de l'été 2022.