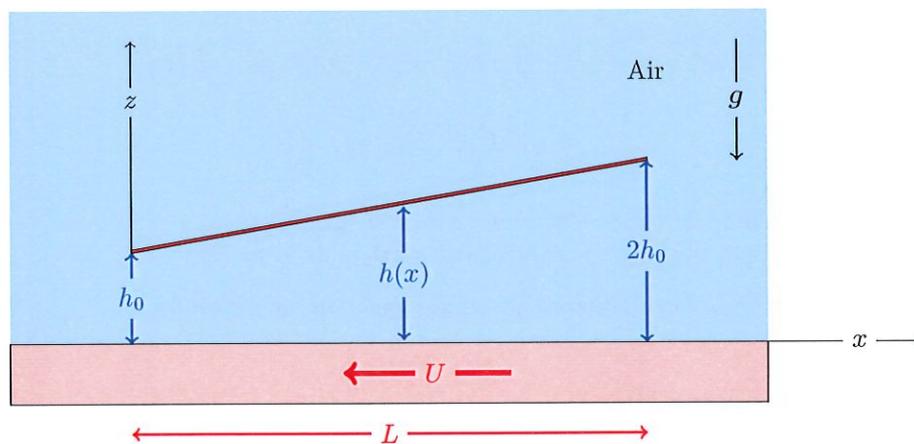


Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	Numéro magique
Janvier 2023	Bloc - filières :	

1 Lévitiation d'une feuille glissant sur une table (50 %)

Si on fait glisser une feuille de papier sur une table lisse, on observe que la feuille ne subit quasiment pas de frottement : l'écoulement dans la fine couche d'air entre la table et la feuille légèrement inclinée induit une force verticale qui compense la force de gravité et permet d'éviter ainsi un contact solide. L'objectif de cette question est d'estimer cette force verticale.



Considérons donc une feuille A4 plane et rigide faisant un petit angle θ avec l'horizontale qui se déplace horizontalement avec une vitesse U constante de gauche à droite. La distance entre la feuille et la table vaut h_0 et $2h_0$ en $x = 0$ et $x = L$ respectivement. Comme l'angle est petit, on peut utiliser la théorie de la lubrification et écrire :

$$h(x) \ll L$$

Pour résoudre ce problème, on se place dans le référentiel de la feuille et on fait bouger la table de droite à gauche avec la vitesse U . On ne prend en compte que l'écoulement entre la table et la feuille, en négligeant l'écoulement de l'air à l'extérieur où la pression est constante et égale à la pression atmosphérique p_0 . On ne tient pas compte des effets de la gravité dans l'écoulement. et on suppose un peu abusivement que l'écoulement est stationnaire. La viscosité dynamique et la masse volumique de l'air sont μ et ρ respectivement. La longueur et la largeur de la feuille sont notées L et b : la projection de la feuille peut être approximée par L comme suggéré par la figure.

1. Calculer le nombre de Reynold associé à L .
Est-ce qu'il est légitime d'utiliser la théorie de lubrification dans ce cas ?
2. Démontrer -rigoureusement- que la pression n'est qu'une fonction de x .
3. En déduire en termes de vitesse $u(x, z)$ et de pression $p(x)$ les équations de la lubrification.
Quelles sont les différences et les similitudes entre ces équations de Reynolds et celles de Prandtl ?

4. Calculer le profil de vitesse $u(x, z)$ entre la table et la feuille.
5. Intégrer ce profil pour obtenir l'expression du débit volumique $Q(x)$ par unité de profondeur.
6. Démontrer qu'il existe une abscisse x_* et une hauteur $h_* = h(x_*)$ telles que

$$\frac{dp}{dx}(x_*) = 0$$

7. Esquisser l'allure du profil de vitesse pour $x \in [0, x_*]$, $x = x_*$, et $x \in [x_*, L]$
8. En déduire que la variation de pression peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dp}{dx}(x) = 6\mu U \left(\frac{h_*}{h^3(x)} - \frac{1}{h^2(x)} \right)$$

9. Calculer le profil de pression $p(x)$.
10. Calculer la valeur de h_* .
11. En intégrant le résultat précédent, démontrer que la force verticale exercée par l'air sur la feuille peut s'écrire :

$$F = \frac{6\mu U b L^2}{h_0^2} \left[\ln(2) - \frac{2}{3} \right]$$

12. En sachant qu'une feuille de papier A4 pèse environ 10 grammes, indiquer qualitativement quel sera le mouvement vertical de la feuille.
- (**) 13. Obtenir l'expression de la force horizontale exercée par l'air sur la feuille.

Valeurs numériques des paramètres

ρ	1.2	$kg\ m^{-3}$
μ	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$kg\ m^{-1} s^{-1}$
h_0	10^{-4}	m
L	30	cm
b	20	cm
U	1	$m\ s^{-1}$

$$\underbrace{\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{\rho U^2/L} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

NEGLIGEABLE si $\frac{\rho U^2 L}{\mu U/h^2} = \frac{\rho U L}{\mu} \frac{h^2}{L^2} \ll 1$ 10⁻³

2

$$p(x, z) - p_0 = p(x, 0) - p_0 + 2 \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$\frac{1.2 \times 1 \times 0.3}{1.8 \times 10^{-5}} = 2 \times 10^4$ OK

$$\underbrace{\partial \left(L \frac{\mu U}{h^2} \right)}_{\partial \left(h \frac{\mu U}{h^2} \right)} \rightarrow \partial \left(h \frac{\mu U h}{L} \frac{1}{h^2} \right) \rightarrow \partial \left(\frac{\mu U}{L} \right)$$

2

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{car} \quad \frac{L^2}{h^2} \mu U \gg \mu U \quad \therefore$$

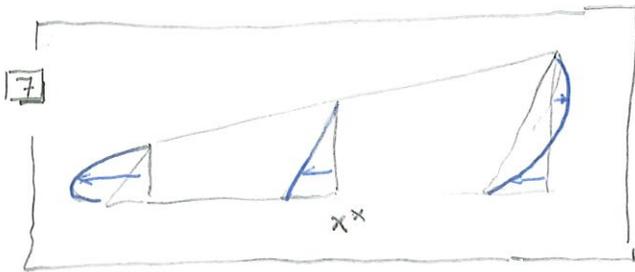
$$u(x, z) = \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{z}{h} \left(\frac{z}{h} - 1 \right) - U \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

$$Q(x) = \int_0^h u(x, z) dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} - \frac{Uh}{2}$$

$$\int_0^h z^2 - 2hz dz = \left[\frac{z^3}{3} - \frac{2hz^2}{2} \right]_0^h = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = -\frac{h^3}{6} \quad \therefore$$

THEOREME DE ROLLE :-
 $\exists x^*$ tel que $\frac{dp}{dx} \Big|_{x^*} = 0$

$$p(0) = p(L) = p_0$$



2

$$\frac{dQ}{dx} = 0$$

$$-\frac{Uh_x}{2} = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} - \frac{Uh}{2}$$

LE DEBIT CONSTANT

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left(\frac{h_x}{h^3} - \frac{1}{h^2} \right)$$

CAR ON VOIT

$$dx = \frac{dx}{dh} dh = \frac{L}{h_0} dh$$

$$p(h) - p_0 = 6\mu U \frac{L}{h_0} \int_{h_0}^h \left(\frac{h_x}{h^3} - \frac{1}{h^2} \right) dh$$

$$= 6\mu U \frac{L}{h_0} \left[\frac{h_x}{2} \left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h^2} \right) - \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h} \right) \right]$$

AVEC $h = h(x) \quad \therefore$

2

10) $p(2h_0) = p_0$

$$\frac{h^*}{2} \left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{4h_0^2} \right) = \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{2h_0} \right)$$

$$\frac{3}{4h_0^2} \quad \downarrow \quad \frac{2h_0}{4h_0^2}$$

$$\boxed{h^* = \frac{4h_0}{3}}$$

2

11)

$$F = \frac{6\mu b U L^2}{h_0^2} \int_{h_0}^{2h_0} \frac{h^*}{2} \left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h^2} \right) - \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h} \right) dh$$

$$\frac{2h_0}{3} \frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h_0} - \frac{2h_0}{3} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}$$

$$-\frac{1}{3h_0}$$

$$\left[-\frac{h}{3h_0} + \frac{2h_0}{3h} + \ln(h) \right]_{h_0}^{2h_0}$$

$$\frac{-2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \ln(2)$$

3

1

12)

$$mg = 0.1 \text{ N}$$

$$F = 5.9 \text{ N}$$

CELA MONTE :-)

$$F = \frac{6\mu b U L^2}{h_0^2} \left(-\frac{2}{3} + \ln(2) \right)$$

BONUS
34

13)

$$D = b \int_0^L \mu \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} dx$$

$$= \frac{b^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{2z}{h^2} - \frac{1}{h} \right) + \frac{U}{h} \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{b(x)}{-2\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{U}{h}$$

$$= b U \mu \frac{L}{h_0} \int_{h_0}^{2h_0} \left(\frac{-3hx}{h^2} + \frac{3}{h} + \frac{1}{h} \right) dx$$

$$\left(\frac{-3hx}{h^2} + \frac{4}{h} \right)$$

$$= b U \mu \frac{L}{h_0} \left[3 \frac{4h_0}{3} \frac{1}{h} + 4 \ln(h) \right]_{h_0}^{2h_0} = b U \mu \frac{L}{h_0} \left(4h_0 \left(\frac{1}{2h_0} - \frac{1}{h_0} \right) + 4 \ln(2) \right)$$

$$D = b \mu U \frac{L}{h_0} (-2 + 4 \ln(2))$$

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	Numéro magique
Janvier 2023	Bloc - filières :	

2 Écoulements turbulents en conduite (50 %)

On considère d'abord les écoulements turbulents et hydrauliquement lisses en conduites. On définit aussi $\eta = \frac{y}{R}$ avec y la distance mesurée à partir de la paroi et R le rayon de la conduite. Le profil de vitesse est noté $\bar{u}(y)$ (où "bar" désigné la moyenne temporelle). Le nombre de Reynolds, Re_D , est basé sur le diamètre $D = 2R$ de la conduite et sur la "vitesse moyenne" \bar{u}_m (= "vitesse de débit").

On rappelle que $\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) = \bar{\tau}_w (1 - \eta)$.

Définissez: \bar{u}_m , $\bar{\tau}(y)$, $\bar{\tau}^t(y)$, $\bar{\tau}_w$, \bar{u}_τ , y^+ , ν_t .

On considère la partie du profil de vitesse dominée par la turbulence. Elle commence à environ quelle hauteur ?

Le profil de vitesse y est modélisé en utilisant le "profil composite" de Coles:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau} = \left(\frac{1}{\kappa} \log y^+ + C \right) + G(\eta)$$

avec $G(\eta) = \frac{2\Pi}{\kappa} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \alpha \eta \right)$. Les valeurs utilisées ici sont $\kappa = 0.40$, $C = 5.5$, $\Pi = 0.20$ et $\alpha = 1.33$.

1. Obtenez l'expression pour le profil de la viscosité de turbulence, ν_t , qui correspond au modèle composite ci-dessus. Exprimez le résultat final sous la forme $\frac{\nu_t}{\bar{u}_\tau R} = f(\eta)$.

Aide: Vérifiez que l'expression obtenue a le bon comportement (vu au cours) dans la "région proche de la paroi".

2. Évaluez $\frac{\nu_t}{\bar{u}_\tau R}$ pour $\eta = 0.10, 0.15, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80$. Esquissez-en le graphe. Sur base du graphe: commentez la qualité du modèle composite présent.

On considère que la "région loin de la paroi" commence lorsque $f(\eta)$ diffère de son comportement proche de la paroi par environ 7%: selon le modèle composite présent, cela correspond à environ quelle valeur de η ?

On considère ensuite les écoulements turbulents en conduites de façon générale; donc avec aussi la rugosité de la paroi, ϵ .

1. Esquissez l'allure du diagramme des pertes de charge pour les cas avec Re_D allant de $5 \cdot 10^3$ à 10^7 : i.e., λ en fonction de Re_D en log-log, et avec $\frac{\epsilon}{D}$ comme paramètre. Expliquez clairement les différentes parties du diagramme.

2. Application:

(a) On considère une première conduite de longueur L et avec $\epsilon/D = 5.0 \cdot 10^{-4}$. L'écoulement est à $Re_D = 5.0 \cdot 10^5$. Obtenez la valeur de λ en utilisant la formule de Colebrook (**Aide**: utilisez, comme première valeur, celle fournie par la formule empirique de Blasius, $\lambda = 0.3164 Re_D^{-1/4}$, et itérez).

Obtenez alors la valeur de \bar{u}_r/\bar{u}_m puis celle de ϵ^+ : selon cette valeur, l'écoulement est hydrauliquement lisse, rugueux ou mixte?

(b) En fin de cette conduite, l'écoulement bifurque dans deux conduites secondaires, chacune de diamètre $D_2 = D/4$. La rugosité de la paroi est identique à celle de la première conduite.

Obtenez les valeurs de λ , \bar{u}_r/\bar{u}_m et ϵ^+ pour l'écoulement dans chacune des deux conduites. L'écoulement est hydrauliquement lisse, rugueux ou mixte?

(c) On constate que la perte de charge, $(\Delta\bar{p})_2$, dans chacune des deux conduites secondaires est égale à 100 fois la perte de charge, $\Delta\bar{p}$, dans la première conduite. Quel est le rapport des longueurs, L_2/L ?

Rappel: la formule de Colebrook pour les écoulements turbulents en conduite est:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\epsilon}{D} \right).$$

● Définitions

3 pts.

$$\bar{v}_m \triangleq \frac{1}{A} \iint \bar{v} \, dS \stackrel{ici}{=} \frac{1}{\pi R^2} \cdot 2\pi \int_0^R \bar{v}(r) r \, dr$$

$$\bar{\tau}(y) \triangleq \mu \frac{d\bar{v}}{dy}(y) \qquad \bar{v}_c \triangleq \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}}$$

$$\bar{\tau}^t(y) \triangleq -\rho \bar{v}'^t(y) \qquad y^+ \triangleq \frac{y \bar{v}_c}{\nu}$$

$$\bar{\tau}_w \triangleq \mu \frac{d\bar{v}}{dy} \Big|_{y=0} \qquad \nu_t^+(y) \triangleq -\frac{\bar{v}'^t(y)}{\frac{d\bar{v}}{dy}(y)}$$

↳ car écart. turbulents hydrauliquement lisses

1 pt ● La partie du profil de vitesse dominée par la turbulence commence en $y^+ = \mathcal{O}(100)$.

● ~~$\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) = \bar{\tau}_w(1-\eta)$~~ avec $\eta = \frac{y}{R}$
négligeable

↳ $\mu \frac{d\bar{v}}{dy} = \bar{\tau}_w(1-\eta)$

↳ $\nu \frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho}(1-\eta) = \bar{v}_c^2(1-\eta)$

↳ $\nu_t = \frac{\bar{v}_c^2(1-\eta)}{\frac{d\bar{v}}{dy}}$

Profil composite de Colas

$$\frac{\bar{v}}{\bar{v}_c} = \left(\frac{1}{K} \log \frac{y^+}{y^+} + C \right) + \underbrace{G(\eta)}_{\text{fonction complément}} \quad \text{profil pour la région proche de la paroi}$$

↳ $\frac{1}{\bar{v}_c} \frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{1}{K} \frac{1}{y} + G'(\eta) \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{K\eta} + G'(\eta) \right)$

↳ $\nu_t = \frac{\bar{v}_c^2(1-\eta)}{\frac{\bar{v}_c}{R} \left(\frac{1}{K\eta} + G'(\eta) \right)} \iff \frac{\nu_t}{\bar{v}_c R} = \frac{(1-\eta)}{\left(\frac{1}{K\eta} + G'(\eta) \right)} = \delta(\eta)$

Ici: $G(\eta) = \frac{2\pi}{K} \lim^2 \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right)$

$\hookrightarrow G'(\eta) = \frac{2\pi}{K} \cdot 2 \lim \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right) \cos \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right) \cdot \frac{\eta}{2} \alpha$
 $= \frac{2\pi}{K} \cdot (\eta \alpha) \lim \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right) \cos \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right)$

4 pts

$\hookrightarrow g(\eta) = \frac{(1-\eta)}{\left[\frac{1}{K\eta} + \frac{2\pi}{K} (\eta \alpha) \lim \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right) \cos \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right) \right]}$

Aussi $= \frac{K\eta(1-\eta)}{\left[1 + 2\pi (\eta \alpha \eta) \lim \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right) \cos \left(\frac{\eta}{2} \alpha \eta \right) \right]}$

pas demandé
ni attendu

Aussi $= \frac{K\eta(1-\eta)}{\left[1 + \pi (\eta \alpha \eta) \lim (\eta \alpha \eta) \right]} = \frac{N}{D}$

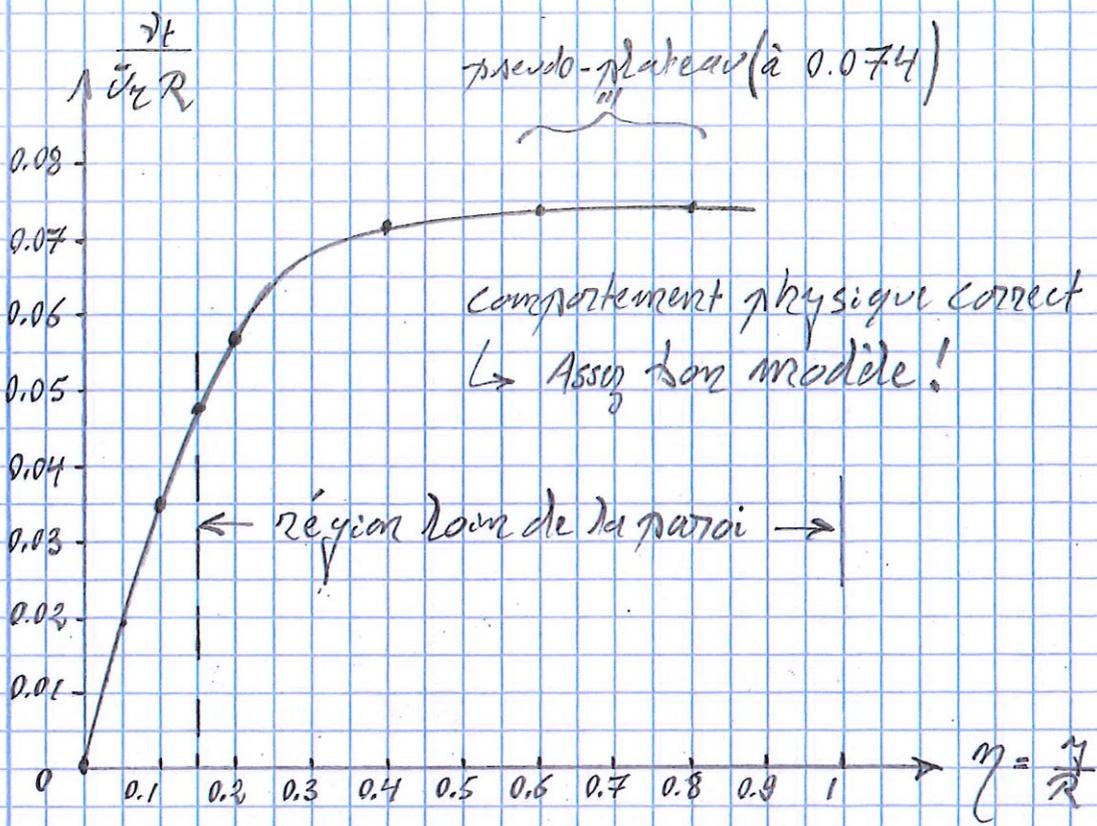
pas demandé
ni attendu

Le comportement dans la région proche de la paroi est (vu au cours et en TR):

$v_+ = K\eta \bar{v}_R (1-\eta) \iff \frac{v_+}{\bar{v}_R} = K\eta(1-\eta) \equiv \text{numérateur } N$

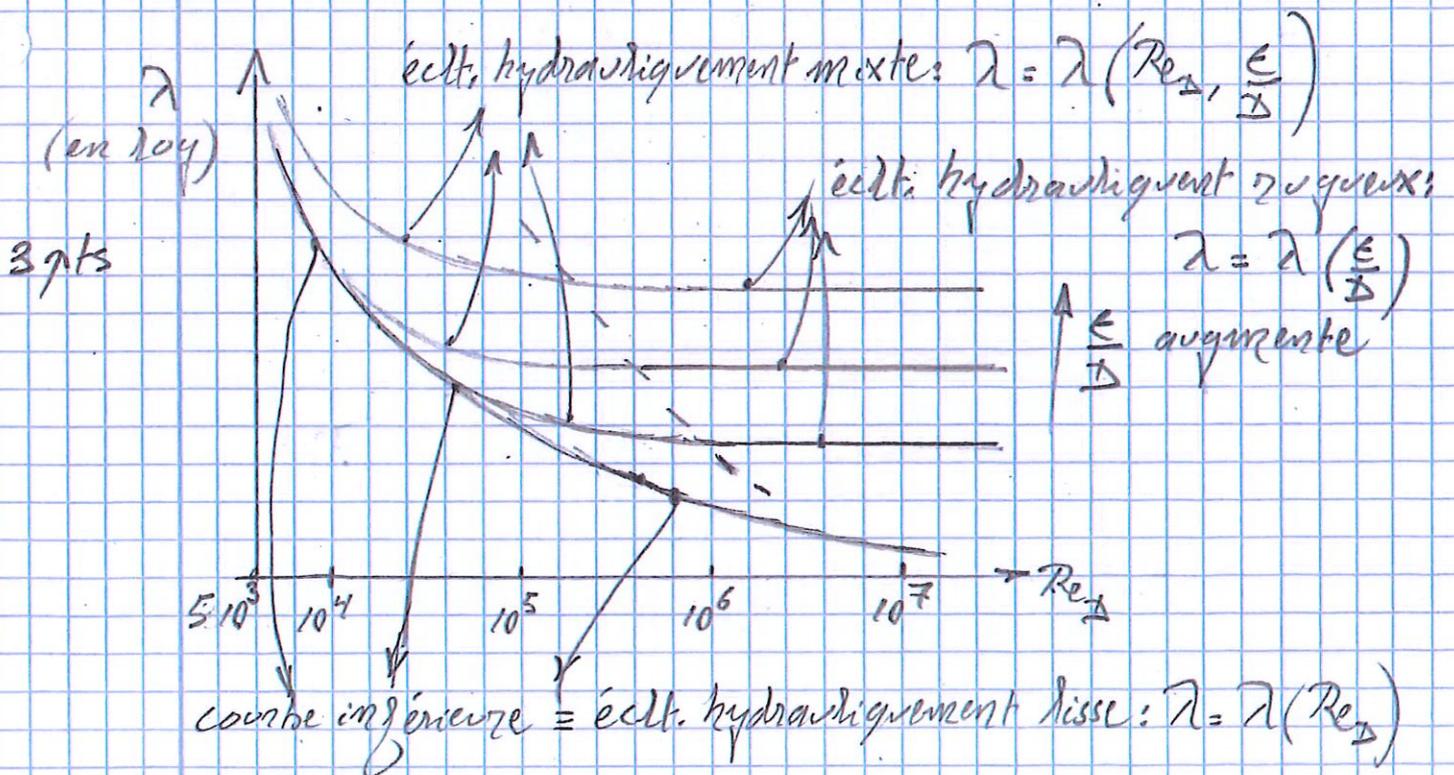
valeurs	η	N	D	$\frac{N}{D} = g(\eta)$
	0	0	1	0
	0.10	0.036	1.0339	0.03482
	0.15	0.051	1.0735	0.04751
	0.20	0.064	1.1240	0.05694
	0.40	0.096	1.3326	0.07204
	0.60	0.096	1.2973	0.07400
	0.80	0.064	0.8665	0.07386

graphe



Ici: $f(\eta)$ diffère de $K\eta(1-\eta)$ par environ 7% lorsque $\eta \approx 0.15$
 → $\eta \approx 0.15$ est le début de la "région loin de la paroi".

• Allure du diagramme des pertes de charge pour les écoulements turbulents en conduites:



Application

(a) Conduite de longueur L avec $\frac{E}{\Delta} = 5.0 \cdot 10^{-4}$
 2.5 pts et $Re_{\Delta} = \frac{\bar{v}_m \Delta}{\nu} = 5.0 \cdot 10^5$

1^{er} guess: $\lambda = 0.3164 Re_{\Delta}^{-1/4} = 0.0118985$

$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 9.167344 \xrightarrow{\text{iter}} 7.4856 \rightarrow 7.5272 \rightarrow 7.52614 \rightarrow \boxed{7.52616}$
 Convergé

$\hookrightarrow \lambda = 0.0176544$
 $\frac{\bar{v}_c^2}{\bar{v}_m^2} = \frac{\bar{v}_c}{\rho \bar{v}_m} = \frac{C_f}{2} = \frac{\lambda}{8} = 0.0022068$
 car $\lambda = 4 C_f$ en conduite

$\hookrightarrow \frac{\bar{v}_c}{\bar{v}_m} = 0.0469766$

$E^* = \frac{E \bar{v}_c}{\nu} = \frac{E}{\nu} \frac{\bar{v}_c}{\bar{v}_m} \frac{\bar{v}_m \Delta}{\nu} = (5.0 \cdot 10^{-4}) (0.0469766) (5.0 \cdot 10^5) = \boxed{11.744}$

\hookrightarrow écoulement hydrauliquement mixte car $2.3 < E^* < 70$

(b) $\Delta_2 = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow A_2 = \frac{\pi \Delta^2}{4} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2 = \frac{\pi \Delta^2}{64} = \frac{A}{16}$

⚠ Conservation du débit

2.5 pts

$\bar{v}_m A = \bar{v}_{m_2} (2 A_2) = \bar{v}_{m_2} \frac{A}{8} \Rightarrow \boxed{\bar{v}_{m_2} = 8 \bar{v}_m}$
 car 2 conduites

$\hookrightarrow Re_{\Delta_2} = \frac{\bar{v}_{m_2} \Delta_2}{\nu} = \frac{(8 \bar{v}_m) \Delta/4}{\nu} = 2 Re_{\Delta} = \boxed{1.0 \cdot 10^6}$

$\frac{E}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_2/4} \frac{E}{\Delta} = 4 \frac{E}{\Delta} = 4 \cdot 5.0 \cdot 10^{-4} = 0.0020$
 $\frac{E}{\Delta_2} = \frac{1}{3.71 \Delta_2} \frac{E}{\Delta} = 0.0005390836 = \frac{1}{3.71} \frac{E}{\Delta_2}$

1^{er} guess $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 7.526 \xrightarrow{\text{ici plus comme } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \text{ convergé}} 6.50677 \rightarrow 6.510764 \rightarrow \boxed{6.51075}$
 Convergé

$\hookrightarrow \lambda_2 = 0.02359056$

$\hookrightarrow \frac{\bar{v}_{c_2}}{\bar{v}_{m_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{8}} = 0.054303$

$E^* = \frac{E \bar{v}_{c_2}}{\nu} = \frac{E}{\nu} \frac{\bar{v}_{c_2}}{\bar{v}_{m_2}} \frac{\bar{v}_{m_2} \Delta_2}{\nu} = (2.0 \cdot 10^3) (0.054303) (1.0 \cdot 10^6) = \boxed{108.61}$
 car Re_{Δ_2}

\hookrightarrow écoulement hydrauliquement turbulent car $E^* > 70$

$$(c) \Delta \bar{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{v}_m^2} \lambda \frac{L}{\lambda}$$

1 pt.

$$(\Delta \bar{v})_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{v}_{m2}^2} \lambda_2 \frac{L_2}{\lambda_2} = 100 \Delta \bar{v}$$

$$\hookrightarrow \bar{v}_{m2} \lambda_2 \frac{L_2}{\lambda_2} = 100 \bar{v}_m \lambda \frac{L}{\lambda}$$

$$\frac{L_2}{L} = 100 \left(\frac{\bar{v}_m}{\bar{v}_{m2}} \right)^2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

$$= 100 \left(\frac{1}{82} \right) \left(\frac{0.0175544}{0.02359056} \right) \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$= 100 \left(\frac{1}{64} \right) (0.748367) \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$= 100 \times 0.002923$$

$$= \boxed{0.29233} \quad \text{pas grand!}$$

