Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2024	Bloc - filières :	

1 Dépôt d'une couche liquide sur un solide *(50 %)*

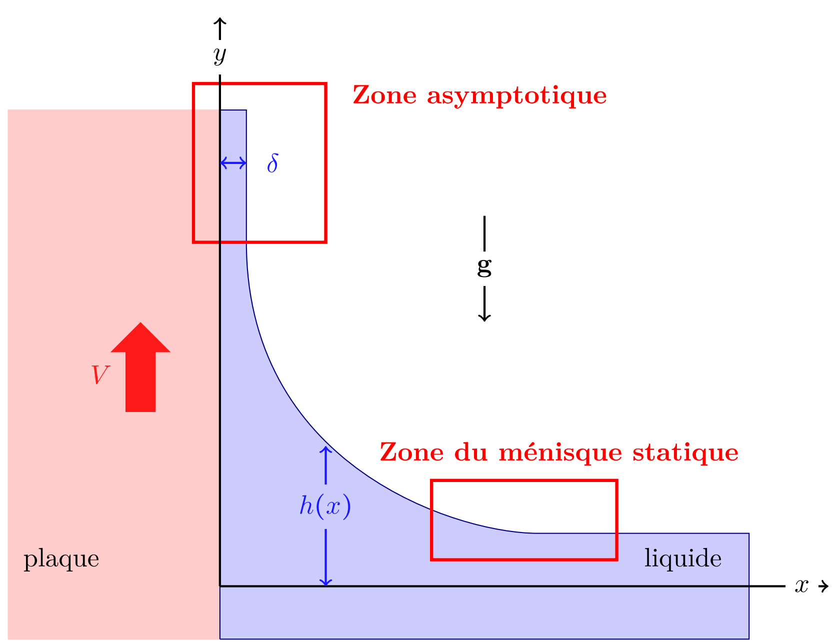
Pour y déposer un fin film liquide en surface, on tire une plaque plane à enduire d'un bain liquide à vitesse V constante. L'écoulement est stationnaire. La viscosité et la masse volumique du fluide sont μ et ρ. Le fluide colle à la plaque. On néglige totalement l'écoulement de l'air ambiant. On tient compte de la gravité. La pression extérieure vaut p_0. Le coefficient interfacial de capillarité air-liquide de Poutinovitch-Zelenskiov-Macroneux est notée ϵ, tandis que l'épaisseur finale δ souhaitée est constante et connue.

Nous allons analyser deux zones particulières de l'écoulement :

- La partie supérieure ou asymptotique où le film est entrainé par la plaque.
  L'épaisseur est constante et vaut δ.
- La partie inférieure dite du ménisque statique où la forme de la surface libre est contrôlée par les forces de tension superficielle et par la gravité. Dans cette zone, le saut de pression à la surface du film sera uniquement fixée par la tension de surface donnée par :

  $$p(x) - p_0 = -\ \rho\epsilon\ h''(x).$$

  L'approximation de la courbure par la dérivée seconde de l'épaisseur du film $h(x)$ est légitime si on suppose que $|h'(x)| \ll 1$: ce qui est bien le cas pour cette zone.



Zone asymptotique : la vitesse n'a qu'une unique composante verticale $v(x)$.
La valeur de δ est constante et connue.

1. Ecrire ce qui subsiste des équations du mouvement dans la zone asymptotique.
   En déduire que la pression dans le fluide est partout égale à la pression extérieure p_0.

   Les équations se réduisent tout simplement à :

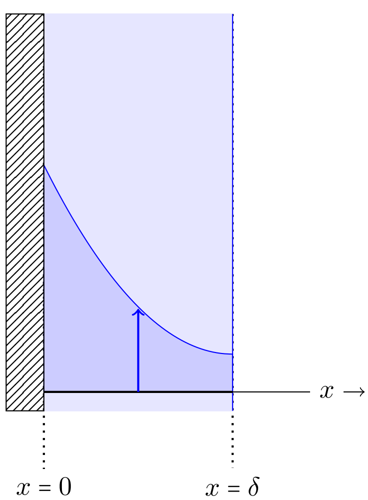
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial p}{\partial x} & = & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} & = & -\rho g + \mu \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array}\right.$$

Comme $p(\delta, y) = p_0$, on en déduit immédiatement : $\boxed{p(x,y) \quad = \quad p_0}$

Il ne faut rien écrire de plus !
Peu d'étudiants indiquent toutefois la condition limite en $x = \delta$!
Oui, il n'y a pas de gradient de pression dans l'écoulement !

2. Ecrire les conditions aux limites pour la vitesse qu'il faut imposer en $x = 0$ et en $x = \delta$.

   En $x = 0$, le fluide colle à la paroi et donc la vitesse est imposée à la valeur V.
   E, $x = \delta$, il n'y a pas de contrainte tangentielle, car nous avons une surface libre[1].



Il suffit juste d'écrire : $\boxed{\begin{array}{rcl} v(0) & = & 0 \\ v'(\delta) & = & 0 \end{array}}$

Il ne faut rien écrire de plus !
Imposer une vitesse nulle en δ n'est pas une bonne idée !

[1]Plus précisément, on considère que la viscosité de l'air est totalement négligeable par rapport à celle du fluide !

3. Calculer le profil de vitesse $v(x)$.

A partir du bilan de quantité de mouvement dans la direction verticale, on écrit :

$$0 = -\rho g + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

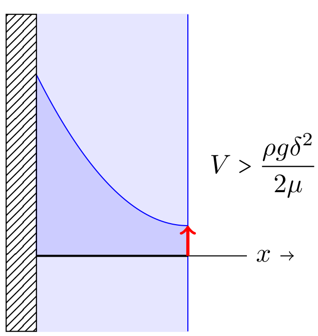
En observant qu'il suffit d'écrire un écoulement de Poiseuille pour $x \in [0, 2\delta]$,
et d'y ajouter un profil constant V pour satisfaire la condition à gauche,

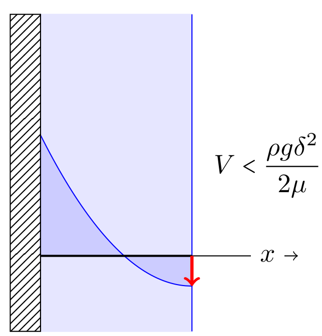
$$v(x) = \frac{\rho g}{2\mu}\, x\Big(x - 2\delta\Big) + V$$

L'expression demandée est donc : $\boxed{v(x) = \frac{\rho g}{2\mu}\, x\Big(x - 2\delta\Big) + V}$

4. Quelle est la condition sur V pour que $v(\delta)$ soit positive ou négative ?
Esquisser l'allure du profil de vitesse dans les deux cas.

Il suffit simplement de discuter le signe de $v(\delta) = V - \dfrac{\rho g \delta^2}{2\mu}$ *!*





La condition est donc simplement : $\boxed{V > \dfrac{\rho g \delta^2}{2\mu}}$

Il ne faut rien écrire de plus !
Mais, les dessins doivent être faits avec soin et avec la bonne concavité !

5. Obtenir le débit volumique Q par unité de largeur de la plaque
en effectuant une intégration transverse du profil de vitesse.

Le débit s'obtient directement en intégrant le profil de vitesse obtenu :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\delta V + \frac{\rho g}{2\mu}\, x\Big(x - 2\delta\Big)\, dx \\ &= V\delta + \frac{\rho\mu}{2} \underbrace{\left[\frac{x^3}{3} - \, x^2\delta\right]_0^\delta}_{-\dfrac{2\delta^3}{3}} \end{aligned}$$

Il suffit juste donc de conclure : $\boxed{Q \;=\; V\delta - \dfrac{\rho g \delta^3}{3\mu}}$

Zone du ménisque statique : le fluide est au repos et la pression est hydrostatique.
A une certaine distance de la plaque, la hauteur $h(x)$ est supposée très proche d'un profil plat.
Néanmoins, on y observe l'apparition d'une courbure à l'interface.
Très loin de la plaque, l'interface est parfaitement plat et constant avec une valeur h_∞.

6. Quelles sont les unités de ϵ ?

On écrit simplement les unités de tous les termes de l'expression fournie :

$$\underbrace{p(x) - p_0}_{\left[\frac{kg}{ms^2}\right]} = \underbrace{-\rho}_{\left[\frac{kg}{m^3}\right]} \; \underbrace{\epsilon}_{\left[\frac{m^3}{s^2}\right]} \; \underbrace{h''(x)}_{\left[\frac{m}{m^2}\right]}$$

On déduit donc que les unités de ϵ sont : $\boxed{\left[\dfrac{m^3}{s^2}\right]}$

Non, ϵ n'est pas la rugosité ici !
Un nombre incalculable d'étudiants échouent à cette question totalement élementaire !

7. A quoi se réduisent les équations de mouvement dans ce cas ?
Quelle est le profil vertical de pression $p(y)$ dans le fluide ?
On a une condition limite utile lorsque $x \to \infty$!

Les équations se réduisent tout simplement à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \end{cases}$$

Comme $p(x, h_\infty) = p_0$, *on en déduit immédiatement :* $\boxed{p(x,y) - p_0 \quad = \quad -\rho g(y - h_\infty)}$

Il ne faut rien écrire de plus !
Bien observer que la totalité de la pression est identique partout !
La modification de l'interface va donc créer une petite dépression
puisque on tire vers le haut la surface
et cela compensera le saut de pression dû à la tension supercielle.

8. En égalisant la pression hydrostatique avec le saut de pression dû à la tension de surface, trouver la constante A en démontrant que l'épaisseur $h(x)$ satisfait l'équation différentielle :

$$h''(x) + A\left[h(x) - h_\infty\right] = 0.$$

En reprenant l'expression fournie pour le saut de pression dû aux forces de capillarité, on peut développer comme suit :

$$\begin{aligned} -\rho\epsilon h''(x) &= p(x, h(x)) - p_0 \\ &\Big\downarrow \text{ En y introduisant le profil de pression hydrostatique,} \\ &= -\rho g\left[h(x) - h_\infty\right] \end{aligned}$$

La constante demandée est donc : $\boxed{A \quad = \quad -\dfrac{g}{\epsilon}}$

Bien noter le signe négatif !
Sinon la solution ne serait pas une exponentielle décroissante...
mais une fonction harmonique de type cosinus !

9. Obtenir l'expression $h(x) - h_\infty$ de la forme de l'interface
en supposant qu'on dispose d'une estimation C pour la valeur de $h(0) - h_\infty$.
Esquisser le profil de cet interface : est-ce que cela correspond à votre intuition ?

Obtenir la solution de cette équation différentielle est vraiment élémentaire et c'est totalement impardonnable de ne pas la trouver immédiatement !

Il suffit juste d'écrire : $\boxed{h(x) - h_\infty \quad = \quad C \exp\left(-x \sqrt{\frac{g}{\epsilon}}\right)}$

Il faut évidemment exclure l'exponentielle croissante !
Et ne pas donner une fonction harmonique de type cosinus !

10. Quel est le fluide considéré en tenant compte des valeurs numériques ci-dessous ?
Ce n'est évidemment ni de l'air, ni de l'eau !

$\boxed{\textit{Cela pourrait être de l'huile !}}$

On peut répondre aux deux dernières questions en n'ayant rien répondu à tout ce qui précède !
Essayer de réfléchir physiquement !

Valeurs numériques des paramètres

V	0.5	m/s
ρ	900	kg/m^3
μ	0.3	$Pa\ s$
δ	100	μm
ϵ	0.03	☺

Ne pas calculer de valeurs numériques dans vos réponses !
Fournir uniquement l'expression symbolique de toutes les quantités demandées !
Ces valeurs servent uniquement à vous convaincre de la pertinence de simplifications faites....
...et à déduire le fluide pour la toute dernière question.

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2024	Bloc - filières :	

2 Ecoulements turbulents hydrauliquement lisses *(35 %)*

On considère les **écoulements turbulents hydrauliquement lisses en canal (de demi-hauteur $h = d/2$) et en couche limite (d'épaisseur $\delta(x)$ et avec vitesse $\overline{u}_e$ constante pour $y \geq \delta$)**. La distance y est mesurée à partir de la paroi et le profil de vitesse est noté $\overline{u}(y)$ (où "bar" désigné la moyenne temporelle). On définit $\eta = \frac{y}{h}$ ou $\eta = \frac{y}{\delta}$ selon le cas.

On considère la **partie du profil de vitesse qui est dominée par la turbulence**, avec le profil composite:

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_\tau} = \left(\frac{1}{\kappa}\,\ln y^+ + C\right) + G(\eta)$$

avec ici les "valeurs modernes" mesurées: $\frac{1}{\kappa} = 2.61$ et $C = 4.25$. Pour la fonction complément, on utilise le modèle $G(\eta) = E\,\frac{1}{2}\,(1 - \cos(\pi\,\alpha\,\eta))$. Pour le canal, on a mesuré $E = 0.30$ et $\alpha = 1.35$; pour la couche limite, on a mesuré $E = 2.85$ et $\alpha = 1.18$.

1. **Pour chaque cas**: on considère que l'écoulement est à $Re_\tau = 1.0\,10^4$. Esquissez les profils de $\frac{\overline{u}}{\overline{u}_\tau}$ en fonction de y^+ selon le modèle composite présent: les deux profils sur le même graphe, et avec y^+ en axe logarithmique de base 10.

   A partir de quelle valeur approximative de y^+ n'est-on plus ici dans la "région proche de la paroi"?

2. **Canal**: en intégrant $\int_0^h \overline{u}\,dy$, obtenez les valeurs de λ et de Re_d dans le cas présent. (**aide**: $\int_0^1 \ln(\eta)\,d\eta = -1$).

   Obtenez alors aussi le rapport $\frac{\overline{u}_m}{\overline{u}_c}$ (avec $\overline{u}_c$ la vitesse au centre du canal).

   Obtenez la valeur de $n \simeq \frac{0.76}{\sqrt{\lambda}}$ si on utilise le profil simplifié en exposant (formule démontrée en séance; ne pas la re-démontrer).

   Comparez le rapport $\frac{\overline{u}_m}{\overline{u}_c}$ obtenu ci-dessus avec la valeur que vous obtenez pour le profil en exposant. Commentez.

3. **Couche limite**: obtenez les valeurs de C_f et de Re_δ dans le cas présent.

   Obtenez la valeur de $n \simeq 2\left(0.15\sqrt{\frac{2}{C_f}} - 1\right)$ si on utilise le profil simplifié en exposant (formule démontrée au cours; ne pas la re-démontrer).

4. **Comparaison**: On peut directement comparer la valeur du C_f de la couche limite à la valeur de $\frac{\overline{\tau}_w}{\frac{1}{2}\rho\,\overline{u}_c{}^2}$ du canal: pourquoi?

   Faites-le. Lequel est le plus grand; et pourquoi?

Q2 (1)

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}_\tau} = \left(\frac{1}{\kappa}\ln y^+ + C\right) + G(\eta) \quad \text{avec } y^+ = \frac{y\,\bar{U}_\tau}{\nu}$$

$\eta = \frac{y}{h}$ ou $\frac{y}{\delta}$ selon le cas

avec $\frac{1}{\kappa} = 2.61$ et $C = 4.25$

Fonction complément

$$G(\eta) = E\,\frac{1}{2}\left(1-\cos(\pi\alpha\eta)\right) \quad \left(= E\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\eta\right) \equiv \text{Coles!}\right) \text{ pas demandé:}$$

avec canal: $E = 0.30$ et $\alpha = 1.35$

couche limite: $E = 2.85$ et $\alpha = 1.18$

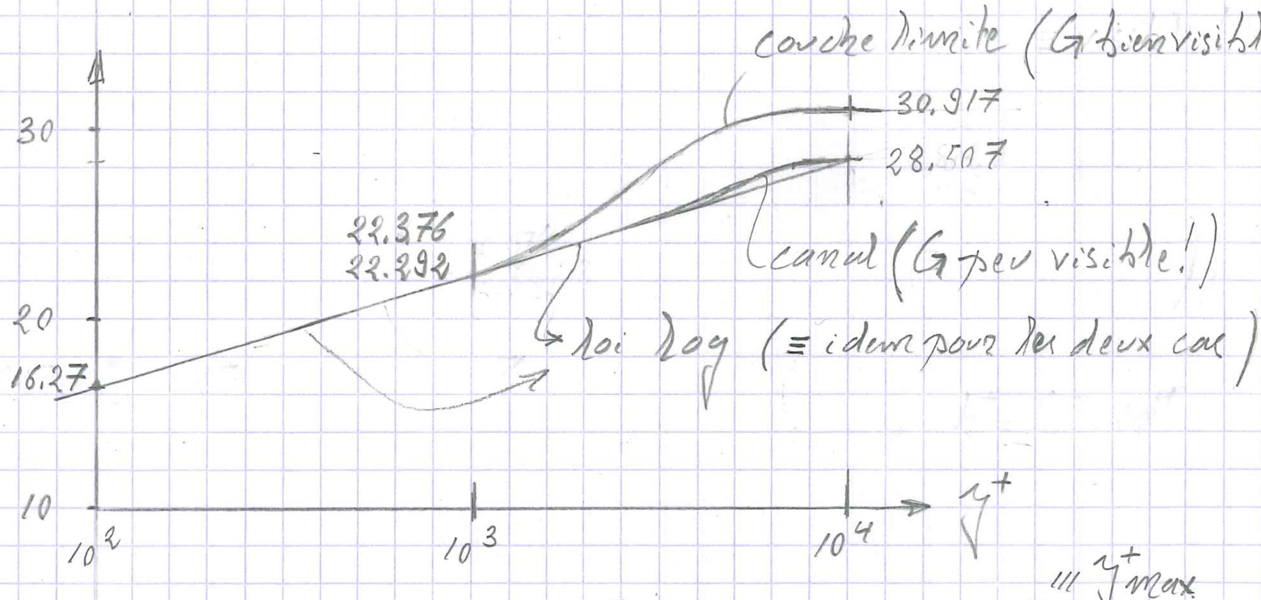
1. $\boxed{Re_\tau = 10^4} \Rightarrow \boxed{\text{Ici } O(10^2) \le y^+ \le 10^4}$

(6 pts)

canal: $Re_\tau = \frac{h\,\bar{U}_\tau}{\nu} = h^+ \Rightarrow \eta = \frac{y}{h} = \frac{y^+}{h^+} = \frac{y^+}{10^4}$

couche limite: $Re_\tau = \frac{\delta\,\bar{U}_\tau}{\nu} = \delta^+ \Rightarrow \eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y^+}{\delta^+} = \frac{y^+}{10^4}$

fin zone proche paroi: $\begin{cases} \text{canal: } \eta \simeq 0.15 - 0.2 \rightarrow y^+ \simeq 1500 - 2000 \\ \text{c.l.: } \eta \simeq 0.11 \rightarrow y^+ \simeq 1100 \end{cases}$



y^+	10^2	10^3	10^4 ''' y^+_{max}
loi log: $2.61\ln y^+ + 4.25$	16.2695	22.2792	28.2890
G: canal $0.30\,\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\pi\,1.35\,\frac{y^+}{10^4}\right)\right)$	0.000135	0.0133	0.2181
couche limite $2.85\,\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\pi\,1.18\,\frac{y^+}{10^4}\right)\right)$	0.000980	0.0968	2.6282

2. <u>Canal</u> $y^+ = h^+ \eta = 10^4 \eta$ ici car $h^+ = 10^4$ (2)

$$\bar{U}_m \triangleq \frac{1}{h}\int_0^h \bar{u}\, dy = \int_0^1 \bar{u}(\eta)\, d\eta$$

$$\hookrightarrow \frac{\bar{U}_m}{\bar{u}_\tau} = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{K}\ln(h^+\eta) + C\right) + \frac{E}{2}\left(1-\cos(\pi\alpha\eta)\right)\right] d\eta$$

(8 pts)

$$= \left(\frac{1}{K}\ln(h^+) + C + \frac{E}{2}\right)\underbrace{\int_0^1 d\eta}_{1} + \frac{1}{K}\underbrace{\int_0^1 \ln(\eta)\, d\eta}_{-1} - \frac{E}{2}\underbrace{\int_0^1 \cos(\pi\alpha\eta)\, d\eta}_{\left[\frac{\sin(\pi\alpha\eta)}{(\pi\alpha)}\right]_0^1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{(\pi\alpha)}}$$

$$= \left(\frac{1}{K}\left(\ln(h^+) - 1\right) + C\right) + \frac{E}{2}\left(1 - \frac{\sin(\pi\alpha)}{(\pi\alpha)}\right)$$

$$= \left(2.61\left(\ln(10^4) - 1\right) + 4.25\right) + 0.15\left(1 - \frac{\sin(1.35\pi)}{(1.35\pi)}\right)$$

$$= 25.67889 + \underbrace{0.181513}$$

$\hookrightarrow$ peu de contribution de $\int_0^1 G(\eta)\, d\eta$

$$= \boxed{25.86050}$$

<u>mais</u> $\frac{\bar{u}_\tau^2}{\bar{U}_m^2} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{U}_m^2} \triangleq \frac{C_f}{2} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \boxed{\lambda = 5.9812\ 10^{-3}}\ \boxed{C_f = 2.9906\ 10^{-3}}$

$\lambda = 2 C_f$ en canal

<u>aussi</u> $Re_\tau = h^+ = \frac{h\, \bar{u}_\tau}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{d\, \bar{U}_m}{\nu}\cdot\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{U}_m} = \frac{1}{2} Re_d \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = Re_d \frac{\sqrt{\lambda}}{4}$

$$\hookrightarrow Re_d = \frac{4}{\sqrt{\lambda}} Re_\tau = \boxed{5.172\ 10^5}$$

<u>aussi</u> $\frac{\bar{U}_c}{\bar{u}_\tau} = \left(\frac{1}{K}\ln h^+ + C\right) + \frac{E}{2}\left(1 - \cos(\pi\alpha)\right)$

$$= 28.2890 + 0.2181 = \boxed{28.5071}$$

$$\hookrightarrow \frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_c} = \frac{\bar{U}_m}{\bar{u}_\tau} \Big/ \frac{\bar{U}_c}{\bar{u}_\tau} = \frac{25.86050}{28.5071} = \boxed{0.90716}$$

$\hookrightarrow n \simeq \frac{0.76}{\sqrt{\lambda}} = 9.827$ pour <u>profil simplifié</u>: $\frac{\bar{u}}{\bar{U}_c} = \eta^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{\bar{U}_m}{\bar{U}_c} = \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{\eta^{\frac{1}{n}+1}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)}\right]_0^1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{n}{(n+1)} = \boxed{0.90764}$$

très proche de la valeur exacte !

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds (donc avec n grand), le profil simplifié en exposant approxime assez bien le profil exact ! (voir exemple montré au cours)

3. <u>couche limite</u> $y^+ = \delta^+ \eta = 10^4 \eta$ ici

⚠ pas de $\bar{u}_m$ en couche limite ! C'est $\bar{u}_e$ la vitesse de référence

$$C_f \triangleq \frac{\bar{\tau}_w}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}_e^2} \Rightarrow \frac{\bar{u}_\tau^2}{\bar{u}_e^2} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_e^2} = \frac{C_f}{2}$$

(4 pts) $$\frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} = \left(\frac{1}{K} \ln \delta^+ + C\right) + \frac{\Xi}{2}\left(1-\cos(\pi\alpha)\right)$$

$$= 28.2890 + 2.6282 = \boxed{30.9172} = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \triangleq \gamma$$

$$\hookrightarrow \boxed{C_f = 2.09233\ 10^{-3}}$$

aussi $$Re_\delta \triangleq \frac{\delta \bar{u}_e}{\nu} = \frac{\delta \bar{u}_\tau}{\nu} \frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} = 10^4 * 30.9172 = \boxed{3.09172\ 10^5}$$

• $n \simeq 2(0.15\gamma - 1) = \boxed{7.275}$

pour le même Re_τ, n est significativement plus petit qu'en canal.

4. C'est $\bar{u}_c$ qu'on peut comparer à $\bar{u}_e$ (et non $\bar{u}_m$)

(2 pts) $$\hookrightarrow \frac{\bar{\tau}_w}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}_c^2} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}_m^2} \cdot \frac{\bar{u}_m^2}{\bar{u}_c^2} = C_f \cdot \frac{\bar{u}_m^2}{\bar{u}_c^2} = 2.9906\ 10^{-3} (0.90716)^2$$
$$= \boxed{2.4611\ 10^{-3}}$$

C'est plus grand que $C_f = 2.0923\ 10^{-3}$ de la couche limite, alors que les deux cas sont au même $Re_\tau = h^+ = \delta^+ = 10^4$

C'est parce que $\bar{u}_e > \bar{u}_c$ (effet d'amplitudes différentes des fonctions complément : $G_{canal} \ll G_{couche\ limite}$).

↳ voir dessin 1.)

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2024	Bloc - filières :	

3 Application *(15 %)*

Couche limite laminaire, puis immédiatement turbulente.
Tous les résultats sont à fournir avec **4 chiffres significatifs**.

On considère une couche limite hydrauliquement lisse qui se développe le long d'une plaque plane de longueur L = 10.0 m et de largeur B = 5.0 m. Le fluide est de l'eau aux conditions standard: $\rho = 1.0\ 10^3$ kg/m^3 et $\mu = 1.0\ 10^{-3}$ N s/m^2. La vitesse de l'écoulement hors de la couche limite est $\overline{u}_e = 0.50$ m/s.

On place, en $x_t = 2.0$, un obstacle au sein de la couche limite, de sorte que celle-ci transitionne directement de laminaire à complètement turbulente. Comme une couche limite turbulente grandit plus rapidement qu'une couche limite laminaire, l'"origine mathématique" de la couche limite turbulente est en x_0, avec $0 < x_0 < x_t$.

Conseil: faite une esquisse du problème: cela vous aidera!

1. Calculez les épaisseurs δ^- et θ^- de la couche limite laminaire juste avant l'obstacle.
2. On suppose que l'épaisseur de la couche limite est continue à la transition (i.e., sa valeur juste après l'obstacle est égale à celle juste avant: $\delta^+ = \delta^-$). Calculez la valeur de x_0 pour la couche limite turbulente.
3. Calculez ensuite l'épaisseur θ^+ de la couche limite turbulente juste après l'obstacle.
4. Calculez enfin les épaisseurs δ et θ de la couche limite turbulente en bout de plaque.
5. Calculez alors la force horizontale de frottement exercée par l'écoulement sur chaque portion de la plaque: F_{lam} et F_{turb}.
6. Calculez aussi la force horizontale exercée par l'écoulement sur le petit obstacle: $F_{\text{obst}} = B\left(\rho\,\overline{u}_e{}^2\right)(\theta^+ - \theta^-)$.

   Bonus: Pourquoi est ce bien cette formule, physiquement?
7. Calculez la force horizontale totale exercée sur la plaque. Reliez-la aussi à la valeur de θ en bout de plaque.

Formulaire pour les couches limites

En couche limite laminaire, on a, via la solution exacte de Blasius:

$$\delta(x) \simeq 4.91 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}\ , \quad \delta^*(x) = 1.721 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{et} \quad \theta(x) = 0.664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}\ ,$$

et, pour les coefficients de frottement:

$$C_f(x) = 2\,\frac{d\theta}{dx}(x) = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{et} \quad C_{f,m}(L) = 2\,\frac{\theta(L)}{L} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}\ .$$

Pour le flux de chaleur, et dans le cas de fluides avec $Pr \geq 0.5$, on a les approximations:

$$St(x) \simeq \frac{1}{Pr^{2/3}}\,\frac{C_f(x)}{2} \quad \text{et} \quad St_m(L) \simeq \frac{1}{Pr^{2/3}}\,\frac{C_{f,m}(x)}{2}\ .$$

En couche limite turbulente hydraulique lisse, on a les formules obtenues par "approche simplifiée de White" (en supposant $n = 7$):

$$\delta(x) \simeq 0.162\,\frac{x}{Re_x^{1/7}}\ , \quad \delta^*(x) \simeq \frac{1}{8}\,\delta(x) \quad \text{et} \quad \theta(x) \simeq \frac{7}{72}\,\delta(x)\ .$$

Pour les coefficients de frottement, on a les "formules approximatives et avancées de White":

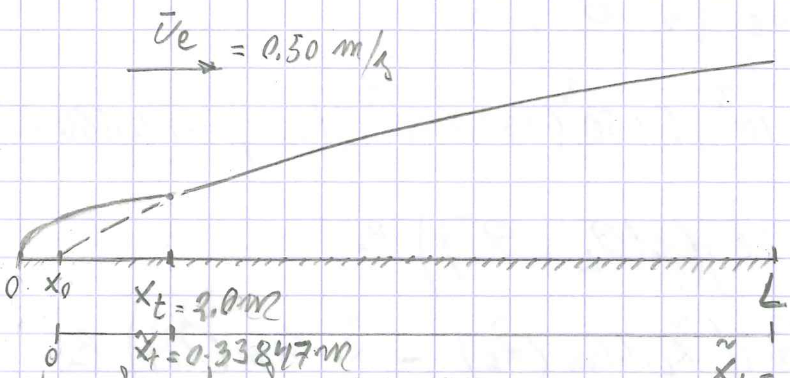
$$C_f(x) \simeq \frac{0.455}{\left(\ln\left(0.060\,Re_x\right)\right)^2} \quad \text{et} \quad C_{f,m}(L) \simeq \frac{0.523}{\left(\ln\left(0.060\,Re_L\right)\right)^2}\ .$$

Pour le flux de chaleur, et dans le cas de fluides avec $Pr \geq 0.5$, on a les approximations:

$$St(x) \simeq \frac{\frac{C_f(x)}{2}}{\left(1 + 13(Pr^{2/3} - 1)\sqrt{\frac{C_f(x)}{2}}\right)} \quad \text{et} \quad St_m(L) \simeq \frac{\frac{C_{f,m}(L)}{2}}{\left(1 + 13(Pr^{2/3} - 1)\sqrt{\frac{C_{f,m}(L)}{2}}\right)}\ .$$

Q3

Esquisse



Largeur $B = 5.0\ m$

eau: $\rho = 1.0\ 10^3\ kg/m^3$

$\mu = 1.0\ 10^{-3}\ Ns/m^2$

$\hookrightarrow \nu = \dfrac{\mu}{\rho} = 1.0\ 10^{-6}\ m^2/s$

1. couche limite laminaire

(3 pts) $Re_{x_t} = \dfrac{U_e\, x_t}{\nu} = \dfrac{0.5 \times 2.0}{1.0\ 10^{-6}} = 1.0\ 10^6$

$$\delta(x_t) \triangleq \delta^- = \frac{4.91\ x_t}{\sqrt{Re_{x_t}}} = \frac{4.91 \times 2.0}{1.0\ 10^3} = 9.820\ 10^{-3}\ m$$

$$\theta(x_t) \triangleq \theta^- = \frac{0.664\ x_t}{\sqrt{Re_{x_t}}} = \frac{0.664 \times 2.0}{1.0\ 10^3} = 1.3280\ 10^{-3}\ m$$

2. couche limite turbulente

(5 pts) $\delta^+ = \delta^- = 9.820\ 10^{-3}\ m$ par la donnée

$$\text{mais } \delta^+ = \frac{0.162\ \tilde{x}_t}{Re_{\tilde{x}_t}^{1/7}} = \frac{0.162\ \tilde{x}_t}{\left(\frac{U_e \tilde{x}_t}{\nu}\right)^{1/7}} = \frac{0.162\ \tilde{x}_t^{6/7}}{\left(\frac{0.5}{1.0\ 10^{-6}}\right)^{1/7}} = 0.024853\ \tilde{x}_t^{6/7}$$

$$\hookrightarrow \tilde{x}_t^{6/7} = 0.395125 \Rightarrow \tilde{x}_t = 0.33847\ m$$

$$\hookrightarrow x_0 = x_t - \tilde{x}_t = 1.66153\ m$$

3. (2 pts) $\theta^+ \simeq \dfrac{7}{72}\,\delta^+ = 0.9547\ 10^{-3}\ m$

mieux: $\theta^+ = \frac{1}{2}\tilde{x}_t \cdot C_{fm}(\tilde{x}_t)$
$= 1.03992\ 10^{-3}\ m$
$\hookrightarrow$ pas attendu!

4. $\tilde{x}_L = L - x_0 = 8.33847\ m$

(3 pts) $$\delta(\tilde{x}_L) = \delta_L = \frac{0.162\ \tilde{x}_L}{Re_{\tilde{x}_L}^{1/7}} = \frac{0.162 \times 8.33847}{\left(\frac{0.50 \times 8.33847}{1.0\ 10^{-6}}\right)^{1/7}} = \frac{1.35083}{8.825136} = 0.153066\ m$$

$\hookrightarrow \theta_L \simeq \dfrac{7}{72}\,\delta_L = 0.0148815\ m$ | mieux: $\theta_L = \frac{1}{2}\tilde{x}_L \cdot C_{fm}(\tilde{x}_L) = 0.0141133$

5. $F_{lam} = \left(\frac{1}{2}\rho\, \bar{v}_e^2\right)\left(x_t \cdot C_{fm}(x_t)\right) \cdot B$

$= \left(\frac{1}{2}\rho\, \bar{v}_e^2\right)\left(2\ \theta^-\right) B$

(2pts) $= (1.0\ 10^3)(0.50)^2(1.328\ 10^{-3})(5.0) = \boxed{1.660\ N}$

$F_{turb} = \left(\frac{1}{2}\rho\, \bar{v}_e^2\right)\left(2(\theta_L - \theta^+)\right) B$

$= \left(\frac{1}{2}\rho\, \bar{v}_e^2\right)\left(\tilde{x}_L \cdot C_{fm}(\tilde{x}_L) - \tilde{x}_t \cdot C_{fm}(\tilde{x}_t)\right) B$

<u>utiliser</u> : $2(\theta_L - \theta^+) = 2(0.0148815 - 0.0009547) = 0.0278536$ m

<u>mieux</u> $= 2(0.0141133 - 0.0010399) = 0.0261468$ m

$\hookrightarrow F_{turb} = \boxed{17.4085\ N}$

(3pts) mieux $= \boxed{16.3417\ N}$

6. $F_{obst} = \left(\frac{1}{2}\rho\, \bar{v}_e^2\right) 2(\theta^+ - \theta^-) B = \boxed{-0.466625\ N}$

(1pt) <u>mieux</u> $= \boxed{-0.36010\ N}$

7 $F_{tot} = \left(\frac{1}{2}\rho\, \bar{v}_e^2\right) 2\left((\theta_L - \theta^+) + (\theta^+ - \theta^-) + \theta^-\right) B$

(1pt) $= \left(\frac{1}{2}\rho\, \bar{v}_e^2\right)(2\ \theta_L) B$ simplement

$= \boxed{18.602\ N}$

mieux $= \boxed{17.642\ N}$

<u>Note</u>: $C_f(x) = 2\frac{d\theta}{dx}(x) \Longleftrightarrow C_{fm}(L) = \frac{\theta(L)}{L}$ ≡ relation exacte

$\hookrightarrow$ utiliser la "formule avancée" de White permet de mieux calculer θ qu'en utilisant l'approximation "simpliste" $\theta \simeq \frac{7}{72}\delta$. C'est ce qui a été fait pour obtenir les résultats "mieux". Et pas attendu à l'examen bien sûr!