Nom:

LMECA1321, Examen de janvier 2025 Prénom:

70 % **Partie sur les écoulements turbulents** Nr. encodage:

---

(23) On considère la couche limite qui se développe le long d'une plaque plane de longueur L, et qui commence en $x = 0$. L'écoulement est incompressible et les propriétés du fluide sont constantes. La paroi est à température T_w constante. L'écoulement hors de la couche limite est à vitesse u_e constante et à température T_e constante.
On définit $\delta(x)$ comme l'épaisseur effective de la couche limite, et on utilise $\eta = \frac{y}{\delta}$. On a que $u = u_e$ pour $\eta \geq 1$.

(3) Définissez les épaisseurs $\delta^*(x)$ et $\theta(x)$. Physiquement, que représente δ^*?

(5) **Couches limites laminaires**

On considère un modèle simplifié pour le profil de vitesse: $\frac{u}{u_e} = A\,\eta + B\,\eta^2$.

2 1. Obtenez l'expression de ce profil simplifié.

3 2. Obtenez alors la valeur des rapports $\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)}$ et $\frac{\theta(x)}{\delta(x)}$ correspondants à ce profil. Comparez avec celles obtenues via la solution exacte de Blasius.

(15) **Couches limites turbulentes**

Rappel: en écoulements turbulents, on utilise les grandeurs moyennées dans le temps: $\overline{u}$, $\overline{u}_e$, etc.

1 1. Définissez $\overline{u}_\tau$.

2 2. Quelle est la condition pour avoir une couche limite hydrauliquement lisse? Quelle est celle pour avoir une couche limite hydrauliquement rugueuse?

5 3. On considère la **région proche de la paroi** (i.e., celle avec $0 \leq \eta \leq 0.12$): on y a que $\overline{\tau}(y) + \overline{\tau}^t(y) = \overline{\tau}_w$.

   3 (a) En utilisant le modèle $\nu_t = \kappa\; y\,\overline{u}_\tau$ valide pour la **partie dominée par la turbulence**, obtenez le profil de vitesse $\frac{\overline{u}}{\overline{u}_\tau}$ dans le cas hydrauliquement lisse.
   Où commence cette partie dominée par la turbulence?

   2 (b) Obtenez aussi, avec le même modèle pour ν_t, le profil de vitesse dans le cas hydrauliquement rugueux.
   Où commence alors la partie dominée par la turbulence?

2 4. On considère le cas de fluides avec $Pr \geq 0.6$. On suppose alors aussi que $Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \simeq 1$ et que $\delta_T \simeq \delta$: expliquez brièvement pourquoi ceci est une bonne approximation.

5 5. On a aussi que $\overline{q}(y) + \overline{q}^t(y) = \overline{q}_w$ pour la **région proche de la paroi**. Obtenez alors le profil de température, $\frac{(\overline{T}_w - \overline{T})}{\overline{T}_\tau}$ (avec $\overline{T}_\tau$ à bien définir!), dans le cas hydrauliquement lisse:

LMECA1321, Examen de janvier 2025
Partie sur les écoulements turbulents

Nom:
Prénom:
Nr. encodage:

---

2 (a) Pour la sous-couche laminaire.

3 (b) Pour la partie dominée par la turbulence.
(**Aide**: la constante d'intégration est une fonction de Pr à déterminer expérimentalement; on ne vous demande pas ici cette fonction!)

LMECA1321, Examen de janvier 2025 — Nom:

Partie sur les écoulements turbulents — Prénom:

Nr. encodage:

30 %

Problème: couche limite turbulente hydrauliquement lisse, puis immédiatement hydrauliquement rugueuse

10

Répondre sur une **feuille séparée**; car la correction sera aussi séparée!

Tous les résultats sont à fournir avec **4 chiffres significatifs**.

On considère ici une couche limite turbulente qui se développe le long d'une plaque plane de longueur $L = 100.0$ m, et de largeur $B = 10.0$ m. Le fluide est de l'eau aux conditions standards: $\rho = 1.00\ 10^3$ kg/m^3, $\mu = 1.00\ 10^{-3}$ N s/m^2. La vitesse de l'écoulement hors de la couche limite est $\overline{u}_e = 5.0$ m/s.

Pour la partie en amont de $x_t = \frac{L}{2}$, la rugosité de la paroi est négligeable et la couche limite est hydrauliquement lisse. Pour la partie en aval de x_t, la rugosité de la paroi est significative ($\epsilon = 1.0$ mm) et les conditions sont telles que la couche limite est hydrauliquement rugueuse.

Simplification: à la transition, on suppose que la couche imite passe directement de hydrauliquement lisse à hydrauliquement rugueuse complètement établie. On suppose aussi que l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite, θ, est continue à la transition.

Conseil: faire une petite **esquisse du problème**: cela vous aidera!

4 1. Calculez C_f et $C_{f,m}$ de la couche limite juste en amont de la transition x_t.

   Calculez aussi les épaisseurs θ, δ et δ^* correspondantes.

5 2. Calcul itératif fait pour vous (à ne pas faire ici!), la couche limite hydrauliquement rugueuse est, juste en aval de la transition, à une distance $\tilde{x}_t = 23.0$ m de son "origine virtuelle". **Conseil**: reportez cela sur votre esquisse!

   Calculez alors C_f et $C_{f,m}$. Vérifiez aussi, en passant, que θ est bien continue à la transition.

4 3. Calculez enfin C_f et $C_{f,m}$ atteints en bout de plaque.

   Calculez aussi les épaisseurs θ, δ et δ^* correspondantes.

4 4. Calculez la force exercée par l'écoulement sur chaque section de la plaque; et finalement la force totale.

3 5. Vérifiez que l'écoulement est bien hydrauliquement rugueux en bout de plaque.

   Il l'est donc aussi pour toute la partie rugueuse de la plaque: pourquoi?

	Nom:
LMECA1321, Examen de janvier 2025	Prénom:
Partie sur les écoulements turbulents	Nr. encodage:

Formulaire pour les couches limites avec vitesse extérieure constante:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{C_f(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta(x)}{x} = \frac{C_{f,m}(x)}{2} \, .$$

En **couches limites laminaires**, on a obtenu, via la solution exacte de Blasius:

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{Re(x)}} \, , \quad \frac{\delta^*(x)}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{Re(x)}} \quad \text{et} \quad \frac{\theta(x)}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re(x)}} \, ,$$

et, pour les coefficients de frottement:

$$C_f(x) = \frac{0.664}{\sqrt{Re(x)}} \quad \text{et} \quad C_{f,m}(x) = 2\, C_f(x) \, .$$

Pour le flux de chaleur dans le cas de fluides avec $Pr \geq 0.6$, on a obtenu les approximations:

$$St(x) \simeq Pr^{-2/3} \, \frac{C_f(x)}{2} \quad \text{et} \quad St_m(x) \simeq Pr^{-2/3} \, \frac{C_{f,m}(x)}{2} \, .$$

En **couches limites turbulentes**, on a obtenu que

$$\frac{\delta^*(x)}{\delta(x)} \simeq 3.4 \sqrt{\frac{C_f(x)}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\theta(x)}{\delta(x)} \simeq 3.4 \sqrt{\frac{C_f(x)}{2}} - 23 \, \frac{C_f(x)}{2} \, .$$

Cas hydrauliquemet lisse: Pour les coefficients de frottement, on utilise les formules avancées de White:

$$C_f(x) \simeq 0.455 \, \left(\log(0.060 \, Re(x))\right)^{-2} \quad \text{et} \quad C_{f,m}(x) \simeq 1.15 \, C_f(x) \, .$$

Pour le flux de chaleur dans le cas de fluides avec $Pr \geq 0.6$, on a obtenu les formules avancées de Petukhov:

$$St(x) \simeq \frac{\frac{C_f(x)}{2}}{\left(1 + 13(Pr^{2/3} - 1)\sqrt{\frac{C_f(x)}{2}}\right)} \quad \text{et} \quad St_m(x) \simeq \frac{\frac{C_{f,m}(x)}{2}}{\left(1 + 13(Pr^{2/3} - 1)\sqrt{\frac{C_{f,m}(x)}{2}}\right)} \, .$$

Cas hydrauliquement rugueux: Pour les coefficients de frottement, on utilise les formules empiriques de Schlichting:

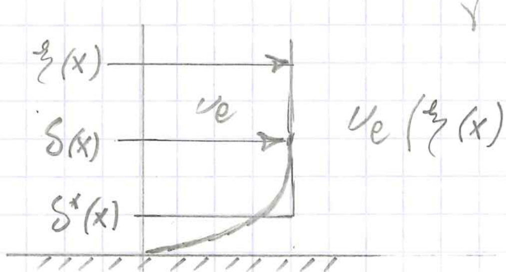
$$C_f(x) \simeq \left[2.87 + 1.58 \, \log_{10}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]^{-2.5} \quad \text{et} \quad C_{f,m}(x) \simeq \left[1.89 + 1.62 \, \log_{10}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]^{-2.5} \, .$$

Pour le flux de chaleur dans le cas de fluides avec $Pr \geq 0.6$, on utilise:

$$St(x) \simeq \frac{C_f(x)}{2} \quad \text{et} \quad St_m(x) \simeq \frac{C_{f,m}(x)}{2} \, .$$

$$\delta^* = \int_0^{\xi > \delta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad \text{épaisseur de déplacement}$$

Physiquement : place prise par la couche limite. Sans couche limite, la plaque doit être déplacée vers le haut par $y = \delta^*(x)$ pour avoir le même débit entre $y = \delta^*(x)$ et $y = \xi(x)$ avec $\xi(x) > \delta(x)$ que celui de la couche limite entre $y=0$ et $y = \xi(x)$.



$$u_e\left(\xi(x) - \delta^*(x)\right) = \int_0^{\xi(x)} u(x,y)\, dy$$

<u>Note</u> : comme on a pris ici que $u = u_e$ pour $y \geq \delta(x)$, on peut prendre $\xi(x) = \delta(x)$

$$\hookrightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad \text{épaisseur de quantité de mouvement}$$

<u>Profil simplifié en couche limite laminaire</u>

1. $\frac{u}{u_e} = A\eta + B\eta^2$ avec $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$

$$\frac{1}{u_e}\frac{\partial u}{\partial y} = (A + 2B\eta)\frac{1}{\delta}$$

<u>en $\eta = 1$</u> : $u = u_e$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\hookrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \longrightarrow -2B + B = 1 \longrightarrow B = -1 \\ A + 2B = 0 \rightarrow A = -2B \longrightarrow A = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{u}{u_e} = 2\eta - \eta^2}$$

2. $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$

$\hookrightarrow \frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\eta = \int_0^1 \left(1 - 2\eta + \eta^2\right) d\eta = \left[\eta - \eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3\right]_0^1$

$= 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0.3333$ <u>exact:</u> $\frac{1.721}{4.91} = 0.3505$

valeurs fort proches !

$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$

$\hookrightarrow \frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\eta = \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2)\, d\eta$

$= \int_0^1 (2\eta - \eta^2 - 4\eta^2 + 2\eta^3 + 2\eta^3 - \eta^4)\, d\eta = \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4)\, d\eta$

$= \left[\eta^2 - \frac{5}{3}\eta^3 + \eta^4 - \frac{1}{5}\eta^5\right]_0^1 = 1 - \frac{5}{3} + 1 - \frac{1}{5} = \frac{30 - 25 - 3}{15}$

$= \frac{2}{15} = 0.1333$ <u>exact:</u> $\frac{0.664}{4.91} = 0.1352$

valeurs fort proches !

Couches limites turbulentes

1. $\bar{v}_\tau = \sqrt{\dfrac{\bar{\tau}_w}{\rho}}$ vitesse de frottement

2. lisse: $\epsilon^+ = \dfrac{\epsilon \bar{v}_\tau}{\nu} \leq 2\text{-}3$ rugueux: $\epsilon^+ \geq 70$

3. région proche de la paroi $(0 \leq \eta \lesssim 0.12)$

$$\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) = \bar{\tau}_w \qquad \text{avec } \bar{\tau}^t = -\rho\, \overline{u'v'} \triangleq \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\hookrightarrow \nu \frac{d\bar{u}}{dy} + \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho} = \bar{v}_\tau^2$$

cas lisse (a) partie dominée par la turbulence $(\nu_t \gg \nu)$

$$\nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{v}_\tau^2 \qquad \text{et } \nu_t = K y \bar{v}_\tau$$

$$K y \bar{v}_\tau \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{v}_\tau^2$$

$$d\left(\frac{\bar{u}}{\bar{v}_\tau}\right) = \frac{1}{K}\frac{dy}{y} = \frac{1}{K}\frac{dy^+}{y^+} \qquad \text{avec } y^+ \triangleq \frac{y \bar{v}_\tau}{\nu}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_\tau} = \frac{1}{K}\log y^+ + C}$$

Cette partie commence en $y^+ \simeq \mathcal{O}(100)$

(pas demandé ni attendu: mieux: en $y^+ \geq 3\sqrt{\delta^+}$ avec $\delta^+ = \dfrac{\delta \bar{v}_\tau}{\nu} \triangleq Re_\tau$

cas rugueux (b)

$$d\left(\frac{\bar{u}}{\bar{v}_\tau}\right) = \frac{1}{K}\frac{dy}{y} = \frac{1}{K}\frac{d(y/\epsilon)}{(y/\epsilon)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\bar{u}}{\bar{v}_\tau} = \frac{1}{K}\log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + B}$$

La partie dominée par la turbulence commence directement à la paroi (car pas de sous-couche laminaire)

4. Ce sont les mêmes tourbillons turbulents qui sont responsables du transfert de quantité de mouvement turbulent et du transfert de chaleur turbulent

$\hookrightarrow Pr_t = \frac{\mu_t c}{k_t} = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \simeq 1$

De plus, la région dominée par la turbulence occupe la majeure partie de la couche limite

$\hookrightarrow \delta_T \simeq \delta$

5. <u>région proche de la paroi</u>

$$\bar{q}(y) + \bar{q}^t(y) = \bar{q}_w \qquad \text{avec } \bar{q}^t = \rho c \overline{T'v'} \triangleq -k_t \frac{d\bar{T}}{dy}$$

<u>cas lisse:</u>

(a) <u>sous-couche laminaire</u> $(k \gg k_t)$

$$-k\frac{d\bar{T}}{dy} = \bar{q}_w \qquad \text{et } Pr = \frac{\mu c}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{avec } \alpha \triangleq \frac{k}{\rho c}$$

$$-\frac{\mu c}{Pr}\frac{d\bar{T}}{dy} = \bar{q}_w$$

$$-\frac{d\bar{T}}{dy} = Pr\frac{\bar{q}_w}{\mu c} = Pr\frac{\bar{q}_w}{\rho \nu c}$$

$$\hookrightarrow \bar{T}_w - \bar{T} = Pr\frac{\bar{q}_w}{\rho\nu c}y = Pr\underbrace{\left(\frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau}\right)}_{\bar{T}_\tau}\cdot\underbrace{\frac{y\bar{u}_\tau}{\nu}}_{y^+}$$

$$\boxed{\frac{\bar{T}_w - \bar{T}}{\bar{T}_\tau} = Pr\, y^+}$$

(b) <u>partie dominée par la turbulence</u> $(k_t \gg k)$

$$-k_t\frac{d\bar{T}}{dy} = \bar{q}_w \qquad \text{et } Pr_t = \frac{\mu_t c}{k_t} = \frac{\nu_t}{\alpha_t}$$

$$-\frac{\mu_t c}{Pr_t}\frac{d\bar{T}}{dy} = \bar{q}_w$$

$$-\nu_t \frac{d\bar{T}}{dy} = \Pr_{t} \frac{\bar{q}_w}{\rho c} \quad \text{avec } \nu_t = K y \bar{u}_\tau$$

$$-K y \bar{u}_\tau \frac{d\bar{T}}{dy} = \Pr_t \frac{\bar{q}_w}{\rho c}$$

$$-y \frac{d\bar{T}}{dy} = \frac{1}{K} \Pr_t \left(\frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau} \right) = \frac{1}{K} \Pr_t \bar{T}_\tau$$

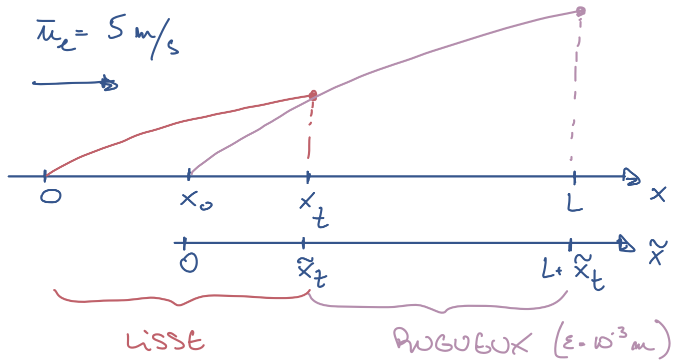
$$-\frac{d\bar{T}}{\bar{T}_\tau} = \frac{1}{K} \Pr_t \frac{dy}{y} = \frac{1}{K} \Pr_t \frac{dy^+}{y^+}$$

Car $\Pr_t = 1$

$$-\frac{d\bar{T}}{\bar{T}_\tau} = \frac{1}{K} \frac{dy^+}{y^+}$$

$$\boxed{\frac{\bar{T}_w - \bar{T}}{\bar{T}_\tau} = \frac{1}{K} \log y^+ + A(\Pr)} \quad \left(A = C \text{ lorsque } \Pr = 1 \right)$$

Partie exercice



- $x_t - x_0 = \tilde{x}_t = 23$ m

$\Rightarrow x_0 = 27$ m

1.) En $x = x_t^-$ (partie hydrauliquement lisse), on obtient :

- $C_f = 0.455 \log^{-2}(0.06\, Re_{x_t}) = 1.6664953 \times 10^{-3}$

  ↳ 4 chiffres significatifs au moins !

- $C_{f,m} = 1.15 \times C_f = 1.9164697 \times 10^{-3}$

- $\theta = \frac{1}{2} x_t C_{f,m} = 4.7911742 \times 10^{-2}$ m

- $\delta = \dfrac{\theta}{3.42 - 23 z^2} = 6.0663282 \times 10^{-1}$ m

- $\delta^* = 3.42 \times \delta = 5.9537676 \times 10^{-2}$ m

  ↳ 5.954×10^{-2}

NB : $z \triangleq \sqrt{\dfrac{C_f}{2}}$

2.) Même chose, mais en $x = x_t^+$ (partie hydrauliquement rugueuse) :

- $C_f = 2.87 + 1.58 \log_{10}^{-2.5}(x_t/\varepsilon) = 3.3589634 \times 10^{-3}$

  ↳ 3.359×10^{-4}

- $C_{f,m} = 1.89 + 1.62 \log_{10}^{-2.5}(x_t/\varepsilon) = 4.1659581 \times 10^{-3}$

  ↳ 4.166×10^{-3}

Comme x_0 a été calculé (pas demandé ici) en imposant la continuité de l'épaisseur de qté de mouvement θ à la transition, vérifions que c'est bien le cas :

$$\theta(x_t^-) = 4.791 \times 10^{-2}\,\text{m} \overset{?}{=} \theta(x_t^+) = \frac{1}{2} \tilde{x}_t C_{f,m} = 4.7908518 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

OK !

↳ 4.791×10^{-2}

↳ utiliser $\tilde{x}_t = 23$ m pas 50 ou 27...

3.) En bout de plaque (toujours hydrauliquement rugueux) :

- $C_f = 2.87 + 1.58 \log_{10}^{-2.5}\left(\dfrac{L - x_0}{\varepsilon}\right) = 2.763 \times 10^{-3}$

  ↳ = 73 m !

- $C_{f,m} = 1.89 + 1.62 \log_{10}^{-2.5}\left(\dfrac{L - x_0}{\varepsilon}\right) = 3.353 \times 10^{-3}$

- $\theta = \frac{1}{2}(L - x_0)\, C_{f,m} = 0.1224$ m

- $\delta = \dots = 1.294$ m

- $\delta^* = \dots = 0.1635$ m

même formule qu'au point (1)

4.

$$F_{lisse} = x_t B \frac{\rho \bar{u}_e^2}{2} C_{f,m}(x_t^-) = 1.198 \times 10^5 \text{ N}$$

Calculé au point 1

$$F_{rugueux} = B \frac{\rho \bar{u}_e^2}{2} \left[(L - x_0) C_{f,m} - \tilde{x}_t C_{f,m} \right] = 1.862 \times 10^5 \text{ N}$$

Calculé au point 3 — Calculé au point 2

De manière plus simple, on peut calculer :

$$F_{rugueux} = B \rho \bar{u}_e^2 \underbrace{\left[\theta(L) - \theta(x_t) \right]}_{= \Delta\theta} = 1.862 \times 10^5 \text{ N}$$

⇔ OK !

Finalement,

$$F_{tot} = B \rho \bar{u}_e^2 \theta(L) = 3.060 \times 10^5 \text{ N} = F_{lisse} + F_{rugueux}$$

5. Calculons ε^+ en bout de plaque :

$$\varepsilon^+ = \frac{\varepsilon u_\tau}{\nu} \cdot \frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_e} = \frac{\varepsilon \bar{u}_e}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{C_f}{2}} = 185.9$$

≥ 70 : OK, on est bien en régime hydrauliquement rugueux.

Comme C_f est une fonction décroissante, ε^+ ne peut qu'être plus grand en $x = x_t$ → si c'est hydrauliquement rugueux en bout de plaque, ça l'est aussi pour le reste (càpd $x = x_t$ bien sûr).