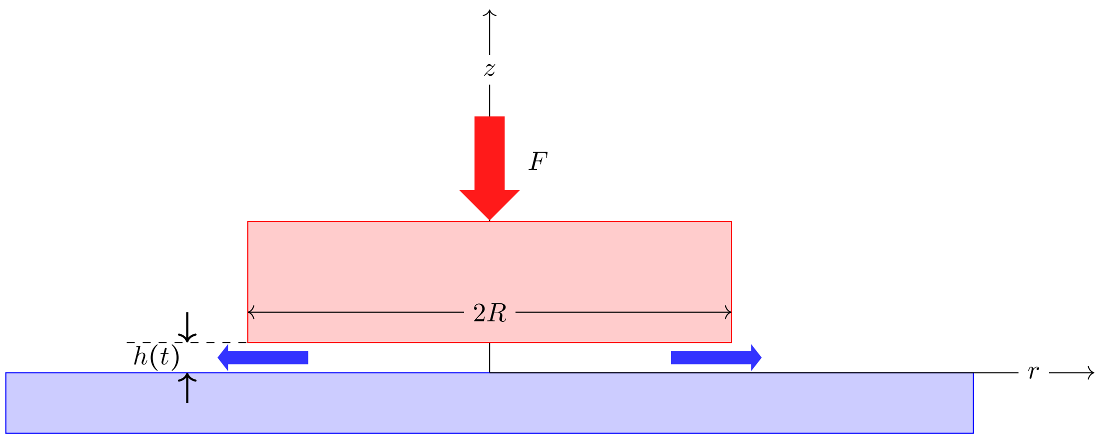
Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Janvier 2025	Bloc - filières :	

1 Force appliquée sur un palier circulaire *(50 %)*

Un palier circulaire de rayon R repose sur un très fin film d'huile visqueuse d'épaisseur $h(t)$. Une charge constante F fait descendre très lentement le palier avec une vitesse $V(t)$: ce qui expulse progressivement le liquide qui se trouve sous le palier. La pression extérieure est nulle et l'effet de la gravité est négligeable.



En supposant que $h << R$, que le viscosité de l'huile est grande et que la vitesse V est très petite, il est possible d'utiliser les équations de la lubrification en coordonnées cylindriques, en gardant à l'esprit que l'écoulement n'est pas stationnaire, même si on a négligé le terme d'accélération dans les équations ci-dessous !

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r u_r\Big) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

1. Donner l'expression du profil de vitesse u_r en fonction du gradient de pression.

Il suffit d'intégrer le bilan de quantité de mouvement dans la direction radiale :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$$

En imposant que la vitesse radiale est nulle en $z = 0$ et $z = h$,

$$u_r = \frac{h^2}{2\mu}\left[-\frac{\partial p}{\partial r}\right]\frac{z}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

L'expression demandée est donc : $\boxed{u_r = \frac{h^2}{2\mu}\left[-\frac{\partial p}{\partial r}\right]\frac{z}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)}$

Il ne faut rien écrire de plus !
Donner uniquement l'expression finale est parfaitement adéquat !

2. Intégrer ce profil afin d'obtenir le débit $Q(r,t)$
au travers d'un anneau cylindrique de rayon r et de hauteur $h(t)$.

Le débit s'obtient directement en intégrant le profil de vitesse obtenu :

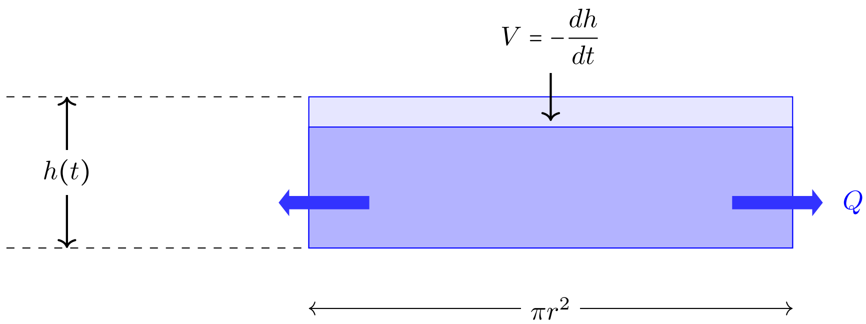
$$Q(r,t) = 2\pi r \int_0^{h(t)} u_r(r,z,t)\; dz = \frac{h^3 \pi r}{\mu}\left[-\frac{\partial p}{\partial r}\right]\int_0^1 \eta - \eta^2 \; d\eta$$

$$= \frac{h^3 \pi r}{\mu}\left[-\frac{\partial p}{\partial r}\right]\underbrace{\left[\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3}\right]_0^1}_{\frac{3-2}{6}}$$

Il suffit juste donc de conclure : $\boxed{Q(r,t) = -\frac{h^3 \pi r}{6\mu}\frac{\partial p}{\partial r}}$

3. En utilisant un volume de contrôle qui se déforme, démontrer que $Q(r,t) = \pi r^2 \; V(t)$.

Il suffit de faire un bilan de masse sur un cylindre de rayon r contenant l'huile sous le palier !
La surface supérieure descend avec une vitesse V et expulse le fluide !



$$-\pi r^2 \frac{dh}{dt}(t) = Q(r,t)$$

En observant que $V(t) = \dfrac{dh}{dt}(t)$,

$$\pi r^2 V(t) = Q(r,t)$$

Et zou, c'est démontré : so easy !
Un simple petit dessin et le correcteur était content :-)
Pilou, pilou, pilou !

4. Obtenir les paramètres α, β et γ de l'expression suivante :

$$p(r,t) = \gamma \; V(t) \; h^{\alpha}(t) \; \left(R^{\beta} - r^{\beta} \right)$$

Il suffit de substituer l'expression de Q dans l'expression qu'on vient de démontrer !

$$Q = \pi r^2 V$$

Car $Q = -\dfrac{h^3 \pi r}{6\mu} \dfrac{\partial p}{\partial r}$,

$$-\frac{h^3 \pi r}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \pi r^2 V$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\mu V r}{h^3}$$

En intégrant par rapport à r *et en imposant que* $p(R) = 0$,

$$p(r,t) = \frac{3\mu V(t)}{h^3} \; \left(R^2 - r^2 \right)$$

Et on peut donc conclure : $\boxed{\alpha = -3 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 3\mu}$

Pas trop compliqué quand même !
Tout était fourni, l'algèbre était élémentaire :-)
On peut aussi dériver l'expression proposée et en déduire les valeurs de α, β *et* γ.

5. Démontrer que la hauteur $h(t)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{2Fh^3}{3\pi\mu R^4} = 0$$

Il suffit d'écrire F comme l'intégrale de la pression sur base du palier !

$$F = 2\pi \int_0^R p(r)\ r\ dr$$

Comme $p = \dfrac{3\mu V}{h^3}\left(R^2 - r^2\right)$ *et* $V = -\dfrac{dh}{dt}$,

$$F = \frac{6\pi\mu}{h^3}\ \frac{dh}{dt} \int_0^R r^3 - R^2 r\ dr$$

$$F = \frac{6\pi\mu}{h^3}\ \frac{dh}{dt} \underbrace{\left[\frac{r^4}{4} - \frac{R^2 r^2}{2}\right]_0^R}_{-\frac{R^4}{4}}$$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{2Fh^3}{3\pi\mu R^4} = 0 \qquad \square$$

A nouveau, le point d'arrivée était fourni : il suffisait de tracer la route avec un peu d'intuition ! Attention à ne pas oublier r dans le volume élémentaire d'intégration :-)

6. Obtenir l'expression $h(t)$ en intégrant cette équation avec la condition initiale h_0.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle ordinaire !
Noter qu'il était possible de résoudre la fin de l'examen
sans avoir répondu aux questions précédentes, puisque l'équation différentielle vous est fournie :-)

$$-\frac{dh}{dt}\,\frac{1}{h^3} = \frac{2F}{3\pi\mu R^4}$$

En intégrant par rapport au temps t des deux côtés,

$$\frac{1}{2h^2} + C = \frac{2Ft}{3\pi\mu R^4}$$

En imposant que $h(0) = h_0$,

$$\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} = \frac{4Ft}{3\pi\mu R^4}$$

L'expression demandée est donc : $\boxed{h(t) = \left[\frac{1}{h_0^2} + \frac{4Ft}{3\pi\mu R^4}\right]^{-\frac{1}{2}}}$

Pour certains étudiants, cette sous-question était un cadeau salutaire !
Mais beaucoup d'étudiants n'arrivent pas à résoudre ce problème simple et se perdent dans l'algèbre !
Calcul la primitive d'une puissance négative reste une tâche inaccessible pour pas mal d'étudiants.
Et l'obtention de la toute dernière expression se fait avec d'horribles erreurs d'algèbre impardonnables !

7. Calculer numériquement la vitesse initiale pour les données numériques.
   Observer que la valeur obtenue est bien petite !

   C'est à nouveau un calcul élémentaire qu'il faut juste faire avec soin !
   La vitesse initiale est directement fournie par l'équation différentielle de la sous-question 6 :-)

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \frac{2Fh_0^3}{3\pi\mu R^4} \\
V_0 &= \frac{2 \times 100 \times 27 \times 10^{-15}}{3\pi \times 9 \times 10^{-1} \times 81 \times 10^{-4}} \\
V_0 &= \frac{54 \times 10^{-13}}{27\pi \times 81 \times 10^{-5}} = \frac{2}{3.14 \times 0.81}\ 10^{-10} = \frac{2}{2.54}\ 10^{-10}
\end{aligned}
$$

La valeur finale est : $\boxed{V_0 = 0.78\ 10^{-10}\ \mathrm{m/s}}$

   Attention aux unités !
   La calcul est vraiment élémentaire et à faire avec soin !
   A nouveau, le cadeau se révèle parfois indigeste pour beaucoup d'étudiants.

8. Supposons maintenant que la force exercée tire le palier vers le haut au lieu de le comprimer.
   Démontrer que le temps requis pour détacher le palier est donné par l'expression suivante.

$$
t_\infty = \frac{3\pi\mu R^4}{4Fh_0^2}
$$

   Lorsque h_0 est très petit, ce temps devient très grand. Ceci est la base du phénonène d'adhésion visqueuse que l'on observe avec le papier collant ou l'adhésion apparente de surfaces métalliques parfaitement lisses.

   Il suffit de reprendre la solution et d'estimer le temps pour obtenir une hauteur infinie h_∞ !
   Il faut aussi changer le signe de la force F :-)

$$
\underbrace{\frac{1}{h_\infty^2}}_{=0} - \frac{1}{h_0^2} = -\frac{4Ft_\infty}{3\pi\mu R^4}
$$

$$
t_\infty = \frac{3\pi\mu R^4}{4Fh_0^3} \qquad \square
$$

   Les trois dernières sous-questions pouvaient être résolues, même en échouant à toutes les précédentes !
   Il est donc vraiment impardonnable de ne pas du tout y répondre :-)
   Oui : l'examen était vraiment simple :-)

(bonus) Obtenir de manière rigoureuse les équations de la lubrification utilisée ici
à partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques sans variation azimuthale :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r u_r\Big) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0 \\
\rho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2}\right] \\
\rho\left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]
\end{aligned}
$$

Les hypothèses connues sont : $h \ll R$ et que V est petit !
Attention : cela ressemble à ce qui a été fait au cours : mais ici, on connaît V au lieu de U !
De la conservation de la masse, on peut relier les vitesses caractéristiques radiale U et verticale V.

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r u_r\Big) & = & -\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\
 & \Big\downarrow & \\
\mathcal{O}\left(\dfrac{U}{R}\right) & = & \mathcal{O}\left(\dfrac{V}{h}\right)
\end{array}
$$

On peut donc écrire que :

$$V = \frac{Uh}{R} \ll U$$

En d'autres mots, la vitesse radiale n'est pas si petite que cela a priori :-)
Considérons ensuite la version stationnaire des deux dernières équations.
On peut assez aisément obtenir l'ordre de grandeur de tous les termes de vitesse.

$$
\begin{aligned}
\rho\overbrace{\left[u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right]}^{\mathcal{O}\left(\frac{U^2}{R}\right)} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\overbrace{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - \frac{u_r}{r^2}\right]}^{\mathcal{O}\left(\frac{U}{R^2}\right)} + \mu\overbrace{\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]}^{\mathcal{O}\left(\frac{U}{h^2}\right)} \\
\rho\underbrace{\left[u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]}_{\mathcal{O}\left(\frac{UV}{R}\right)} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\underbrace{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right]}_{\mathcal{O}\left(\frac{V}{R^2}\right)} + \mu\underbrace{\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]}_{\mathcal{O}\left(\frac{V}{h^2}\right)}
\end{aligned}
$$

On observe immédiatement que les termes visqueux bleus sont négligeables par rapport aux termes visqueux verts car $h \ll R$. Le rapport entre les termes d'inertie et le terme dominant visqueux est donné par :

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\rho U R}{\mu}\,\frac{h^2}{R^2} = \underbrace{\frac{\rho V R}{\mu}}_{\approx 1}\,\frac{h}{R} \ll 1$$

Ici, on suppose que le nombre de Reynolds

$$\frac{\rho V R}{\mu}$$

reste raisonnable car V est vraiment petite dans notre application (oui, oui :-)
Et donc les termes d'inertie peuvent être négligés :-)

Il reste alors à considérer la pression :-)
On compare les variations radiales et verticale de la pression.
L'ordre de grandeur des dérivées de pression est celui des termes visqueux dominants correspondants.

$$p(r,z) = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial r}\, r}_{\mathcal{O}\left(\frac{UR}{h^2}\right)} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}\, z}_{\mathcal{O}\left(\frac{Vh}{h^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{UR}{h^2}\,\frac{h^2}{R^2}\right)}$$

Les variations verticales de la pression sont négligeables
par rapport aux variations radiales de la pression car $h \ll R$.
La pression peut donc être considérée comme constante sur une droite verticale :-)

Pour les puristes, il restait alors à se poser la question des deux dérivées temporelles de vitesse.
On peut définir un temps caractéristique comme suit :

$$\tau = \frac{h}{V} = \frac{U}{R}$$

en se basant sur le temps nécessaire pour que le palier expulse la totalité du fluide. Ce temps sera très très grand si on effectue le calcul (dont je vous ai fait grâce dans l'examen, mais ce sont plusieurs heures pour passer de h_0 à $h_0/2$ si vous faites le calcul). On peut alors observer que :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{\tau}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{UV}{h}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{R}\right)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \mathcal{O}\left(\frac{V}{\tau}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{UV}{R}\right)$$

On observe que les dérivées temporelles ont exactement le même ordre de grandeur
que les termes d'inertie que nous avons négligés.
Il est donc aussi légitime de négliger ces termes.
Et notre démonstration assez approximative est faite :-)

Quelques étudiants m'ont donné des bribes de solution pour ce bonus,
mais de manière souvent partielle et incomplète.
C'était pourtant un très bel exercice de réflexion mathématique et logique.
Mais le temps de l'examen était limité.
Oui : ma partie de l'examen était vraiment trop simple :-)

Valeurs numériques

h_0	3×10^{-5}	m
R	3×10^{-1}	m
F	1×10^{2}	N
μ	9×10^{-1}	$Pa\ s$