NOM:

Prénom:

LMECA1321 NOMA:

Examen de juin 2019, partie GW Nr. encodage:

On considère des **écoulements établis et incompressibles en canal.** La distance mesurée à partir de la paroi inférieure est notée y. On définit aussi $\eta = \frac{y}{h}$. Dans la cas avec écoulement laminaire, le profil de vitesse est noté $u(y)$; dans le cas avec écoulement turbulent, il est noté $\overline{u}(y)$ (où "bar" désigné la moyenne temporelle). Le "nombre de Reynolds global", Re_d, est basé sur la distance $d = 2h$ entre les parois du canal, et sur la "vitesse moyenne" (="vitesse de débit": u_m ou $\overline{u}_m$, selon le cas): la définir.

1. On considère d'abord le cas avec **écoulement laminaire** (= écoulement de Poiseuille), et donc avec

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dy^2} \, .$$

   (a) Obtenez l'expression du profil de la contrainte visqueuse $\tau(y)$ pour $0 \leq \eta \leq 1$; puis, de là, celle du profil $u(y)$.

   (b) Obtenez l'expression de la vitesse de frottement u_τ. Pour la suite, on utilisera la notation u^+ pour désigner le rapport $\frac{u}{u_\tau}$.
   Exprimez alors le profil de vitesse sous la forme $u^+ = f(y^+, \eta)$, avec y^+ défini comme en écoulement turbulent.
   Au vu du résultat obtenu: que proposez-vous ici comme "bonne limite" pour la "zone proche de la paroi": $\eta \leq \ldots$?

   (c) Obtenez l'expression de h^+ en fonction de Re_d.

   (d) On considère le cas $Re_d = 1.0\ 10^5$ (oui, c'est beaucoup trop élevé pour que l'écoulement soit laminaire! Mais ça servira juste pour comparer avec le cas d'un écoulement turbulent considéré ci-après): obtenez la valeur de h^+ correspondante.

2. On considère ensuite le cas avec **écoulement turbulent hydrauliquement lisse**:

   On a alors obtenu l'expression générale du profil des contraintes: $\overline{\tau}(y)+\overline{\tau}^t(y) = \overline{\tau}_w\,(1-\eta)$, avec $\overline{\tau}_w$ la contrainte à la paroi, $\overline{\tau}(y)$ la contrainte due la viscosité μ, et $\overline{\tau}^t(y)$ la "contrainte effective due à la turbulence": la définir. Pour modéliser cette contrainte, on utilisera une "viscosité effective due à la turbulence" μ_t (avec aussi $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$): la définir aussi.

   On obtient alors que $\overline{u}^+ = y^+$ pour la **zone toute proche de la paroi à dominance laminaire** (zone I): comparez ceci avec le résultat obtenu ci-dessus pour le cas d'un écoulement laminaire. La fin de cette zone se situe en environ quelle valeur de y^+?

   Pour la suite, on considère uniquement la **zone à dominance turbulente** (zone III). Le début de cette zone se situe en environ quelle valeur de y^+?

	NOM:
	Prénom:
LMECA1321	NOMA:
Examen de juin 2019, partie GW	Nr. encodage:

On utilise ici un **modèle très simplifié** pour ν_t : $\nu_t = \kappa\, y\, \overline{u}_\tau (1-\eta)$ avec $\kappa = 0.385$ pour $\eta \leq \eta_r$ (zone III-a, proche de la paroi); et puis $\nu_t = \beta\, \overline{u}_\tau\, h$ avec $\beta = 0.070$ pour $\eta_r \leq \eta \leq 1$ (zone III-b):

(a) Dessinez (proprement et précisément!) le profil de $\frac{\nu_t}{\overline{u}_\tau h}$ en fonction de η: zone III-a et zone III-b.

Calculez aussi la valeur précise du point de transition η_r (car vous en aurez besoin pour la suite).

(b) On obtient alors, par intégration, que $\overline{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C$ dans la zone III-a (cela a été fait en séance de TP). La valeur calibrée de C est $C = 4.2$.

Obtenez ici, par intégration, l'expression pour le profil modèle de $\overline{u}^+$ dans la zone III-b. (**Aide**: imposer la continuité en $\eta = \eta_r$).

Le profil modèle obtenu peut finalement aussi s'écrire sous la forme $\overline{u}^+ = \left(\frac{1}{\kappa} \log y^+ + C\right) + G(\eta)$: obtenez l'expression pour la fonction complément modèle $G(\eta)$.

Note: Faites tous vos développements mathématiques en utilisant des symboles (η, η_r, κ, etc.), et non leur valeurs numériques! Fournissez chaque **résultat final encadré**.

Dessinez finalement (proprement et précisément!) la fonction complément modèle $G(\eta)$; bien sûr en utilisant cette fois les valeurs numériques.

(c) Pourquoi la dérivée du profil modèle obtenu, $\frac{d\overline{u}}{dy}$, est-elle aussi continue en $\eta = \eta_r$? (**Aide**: réponse très courte; aucun calcul requis!).

(d) On considère de nouveau le cas $Re_d = 1.0\ 10^5$; donc avec le même débit:

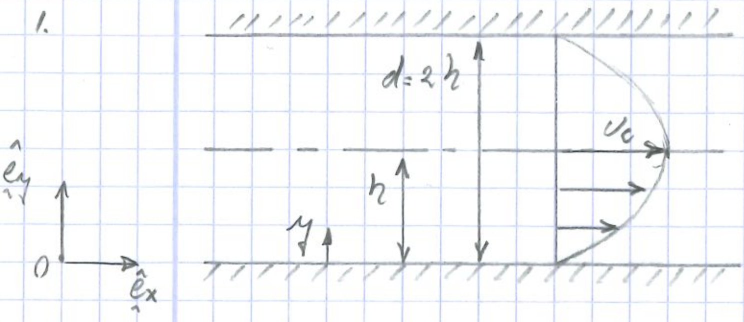
On devrait ici utiliser la formule des pertes de charge en canal en intégrant le profil modèle obtenu ci-dessus. Pour gagner du temps, on utilisera plutôt la formule déjà obtenue en séance de TP en intégrant un modèle plus sophistiqué:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -3.03 \log_{10}\left(\frac{2.03}{Re_d}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) .$$

Obtenez alors la valeur de λ (**Aide**: utiliser $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 10.0$ comme première valeur et itérer); puis, de là, celle de h^+.

Au vu du résultat obtenu: par combien de fois les pertes de charge en écoulement turbulent sont-elles ici plus importantes que celles en écoulement laminaire?

1.



$\eta \triangleq \frac{y}{h}$ $\quad \nu \triangleq \mu/\rho$ $\quad P \triangleq p/\rho$

$Re_d \triangleq \frac{u_m d}{\nu}$

(a) $0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dy^2}$ et $\left(-\frac{dp}{dx}\right) > 0$ constant (car écl^t établi)

$\hookrightarrow \mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$

$\hookrightarrow \tau(y) = \mu \frac{du}{dy}(y) = \frac{dp}{dx}(y + C)$ avec $\tau(h)=0 \longleftrightarrow C = -h$

$\hookrightarrow \tau(y) = \frac{dp}{dx}(y-h) = \left(-\frac{dp}{dx}\right)(h-y) = \left(-\frac{dp}{dx}\right) h \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \left(-\frac{dp}{dx}\right) h (1-\eta)$

$\hookrightarrow \tau_w = \tau(0) = \left(-\frac{dp}{dx}\right) h$

$\frac{du}{dy}(y) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)(h-y)$

$\hookrightarrow u(y) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(hy - \frac{y^2}{2} + D\right)$ avec $D=0$ car $u(0)=0$

$\hookrightarrow u(y) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(hy - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right) h^2 \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{h^2}\right)$

$= \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right) h^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\eta^2\right) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right) h^2 \eta \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right) h\, y \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$

(b) $u_\tau \triangleq \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right) h} \Leftrightarrow u_\tau^2 = \left(-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right) h$

$\hookrightarrow u(y) = \frac{1}{\nu}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right) h\, y \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{\nu} u_\tau^2\, y \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$

$\hookrightarrow \frac{u(y)}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu}\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$ $\qquad u^+ \triangleq \frac{u}{u_\tau}$ $\qquad y^+ \triangleq \frac{y u_\tau}{\nu}$

$\hookrightarrow u^+ = y^+\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$

Zone proche paroi est lorsque $\frac{\eta}{2} \ll 1$ (e.g. $\eta \leq 0.2$)

$\hookrightarrow u^+ = y^+$

(c) $u(y) = u_c \underbrace{(2\eta - \eta^2)}_{= 1 \text{ en } \eta = 1}$ avec $u_c = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2}$

$\hookrightarrow u_m h = \int_0^h u(y)\,dy = u_c h \int_0^1 (2\eta - \eta^2)\,d\eta \Rightarrow u_m = \frac{2}{3} u_c$

$\eta = \frac{y}{h}$ $\quad \underbrace{\left[\eta^2 - \frac{\eta^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}}$

$h^+ = \frac{h\, u_\tau}{\nu}$

$\hookrightarrow h^{+2} = \frac{h^2}{\nu^2} u_\tau^2 = \frac{h^2}{\nu^2}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right) h = \overbrace{\left[\frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2}\right]}^{= u_c} \frac{2h}{\nu}$

$= \frac{u_c\, d}{\nu} = \frac{3}{2}\,\frac{u_m d}{\nu} = \frac{3}{2} Re_d$

$\hookrightarrow h^+ = \sqrt{\frac{3}{2} Re_d}$

Note: utiliser $\lambda = \frac{24}{Re_d}$ est "tricher" car pas supposé connu (ce n'est pas un examen avec de l'étude "par coeur")

Note: utiliser $\lambda = \frac{64}{Re_d}$ est "tricher" et faux car c'est la formule en conduite.

(d) Cas $Re_d = 1.0\ 10^5 \longrightarrow h^+ = 387.3$

2 Cas turbulent

$$\bar{\tau}(y) = \mu \frac{d\bar{U}}{dy} \qquad \bar{\tau}^t(y) \stackrel{\Delta}{=} -\rho \overline{U'V'} \stackrel{M}{=} \mu_t \frac{d\bar{U}}{dy} = \rho \nu_t \frac{d\bar{U}}{dy}$$

$$\hookrightarrow \nu_t \stackrel{\Delta}{=} -\frac{\overline{U'V'}}{\frac{d\bar{U}}{dy}}$$

$$\nu \frac{d\bar{U}}{dy} + \nu_t \frac{d\bar{U}}{dy} = \bar{U}_\tau^2 (1-\eta)$$

zone I, fin en $y^+ \simeq 5$: $\nu \frac{d\bar{U}}{dy} = \bar{U}_\tau^2 \longrightarrow \frac{\bar{U}}{\bar{U}_\tau} = \frac{y \bar{U}_\tau}{\nu} \Leftrightarrow \bar{U}^+ = y^+$

zone III, débute en $y^+ \simeq 100$: $\nu_t \frac{d\bar{U}}{dy} = \bar{U}_\tau^2 (1-\eta) \qquad \frac{\nu_t}{\bar{U}_\tau h} = K \eta (1-\eta)$

Modèle simplifié :

(a) $\begin{cases} \text{zone III-a} & \nu_t = K y \bar{U}_\tau (1-\eta) \quad \text{avec } K = 0.385 \\ \text{zone III-b} & \nu_t = \beta \bar{U}_\tau h \quad \text{avec } \beta = 0.070 \end{cases}$

$$\hookrightarrow \frac{\nu_t}{U_\tau h} = \beta$$

$\eta_t = ?$

$$K y_t \bar{U}_\tau (1-\eta) = \beta \bar{U}_\tau h$$

$$K \eta_t (1-\eta_t) = \beta$$

$$\eta_t (1-\eta_t) = \frac{\beta}{K} \qquad \text{avec } \frac{\beta}{K} = \frac{0.070}{0.385} = 0.18181818$$

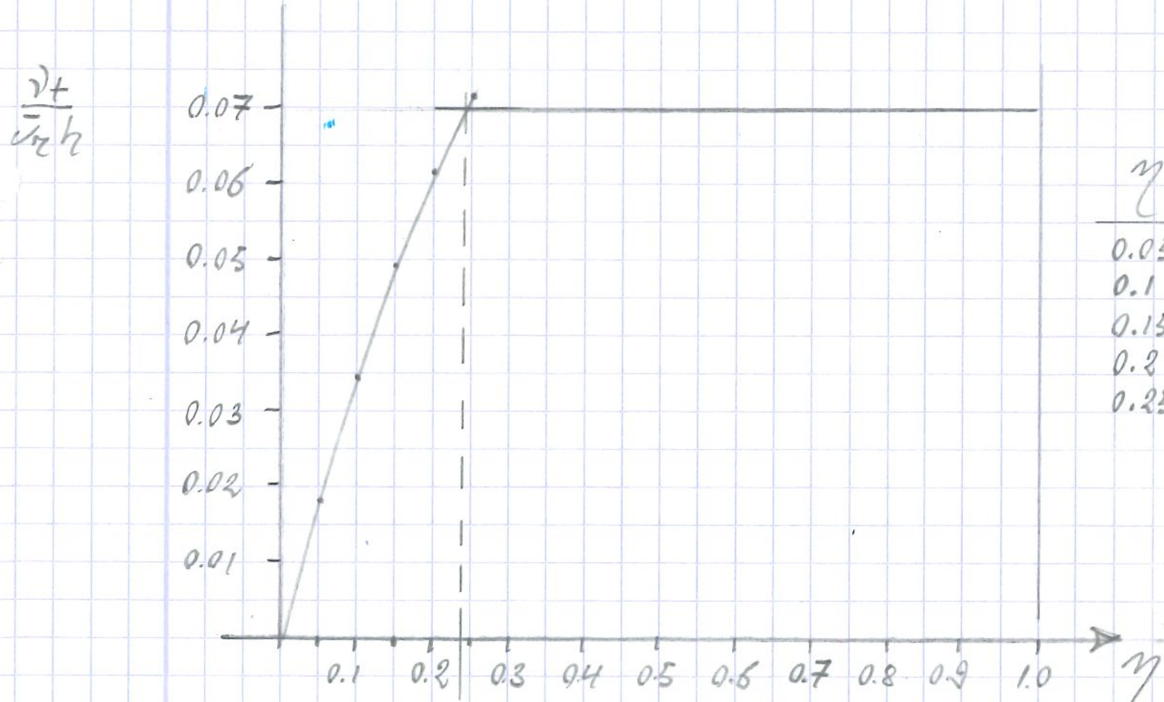
$$\eta_t^2 - \eta_t + \frac{\beta}{K} = 0$$

$$\eta_t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\beta/K}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0.2727727}}{2}$$

$0.2388835 = \eta_t$

$0.7611165 = 1 - \eta_t$

$\hookrightarrow$ peu proche de la paroi !



$\eta_t = 0.2389 \simeq 0.24$

η	$K\eta(1-\eta)$
0.05	0.0182875
0.1	0.03465
0.15	0.0490875
0.2	0.0616
0.25	0.0721875

(b) Zone III-a ($\eta \le \eta_2$) $\quad K y \cancel{\bar{v}_\tau} \cancel{(1-\eta)} \dfrac{d\bar{v}}{dy} = \bar{v}_\tau^{\cancel{2}} \cancel{(1-\eta)}$

$$\bar{v}^+ = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_\tau} \qquad K y \frac{d}{dy}(\bar{v}/\bar{v}_\tau) = 1$$

$$y^+ = \frac{y \bar{v}_\tau}{\nu} \qquad \boxed{K y^+ \frac{d\bar{v}^+}{dy^+} = 1} \rightarrow \boxed{\bar{v}^+ = \frac{1}{K} \log y^+ + C}$$

$C = 4.2$

Zone III-b ($\eta_2 \le \eta \le 1$) $\quad \beta \cancel{\bar{v}_\tau} h \dfrac{d\bar{v}}{dy} = \bar{v}_\tau^{\cancel{2}} (1-\eta)$

$$\beta \frac{d(\bar{v}/\bar{v}_\tau)}{d(y/h)} = (1-\eta)$$

$$\boxed{\beta \frac{d\bar{v}^+}{d\eta} = (1-\eta)}$$

$$\frac{d\bar{v}^+}{d\eta} = \frac{1}{\beta}(1-\eta)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\bar{v}^+ = \frac{1}{\beta}\left(\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) + E} = \frac{1}{\beta}\eta\left(1 - \frac{\eta}{2}\right) + E$$

Imposer la continuité du profil en $\eta = \eta_2 = \dfrac{y_2}{h} = \dfrac{y_2^+}{h^+} \rightarrow y_2^+ = h^+ \eta_2$

$$\frac{1}{K} \log \underbrace{(y_2^+)}_{= h^+ \eta_2} + C = \frac{1}{\beta}\left(\eta_2 - \frac{\eta_2^2}{2}\right) + E$$

$$\hookrightarrow \boxed{E = \left(\frac{1}{K} \log(h^+ \eta_2) + C\right) - \frac{1}{\beta}\left(\eta_2 - \frac{\eta_2^2}{2}\right)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\bar{v}^+ = \frac{1}{\beta}\left(\left(\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) - \left(\eta_2 - \frac{\eta_2^2}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{K}\log(h^+ \eta_2) + C\right)}$$

Aussi $\quad \bar{v}^+ = \left(\dfrac{1}{K} \log y^+ + C\right) + G(\eta)$

$$\hookrightarrow G(\eta) = \bar{v}^+ - \left(\frac{1}{K} \log y^+ + C\right)$$

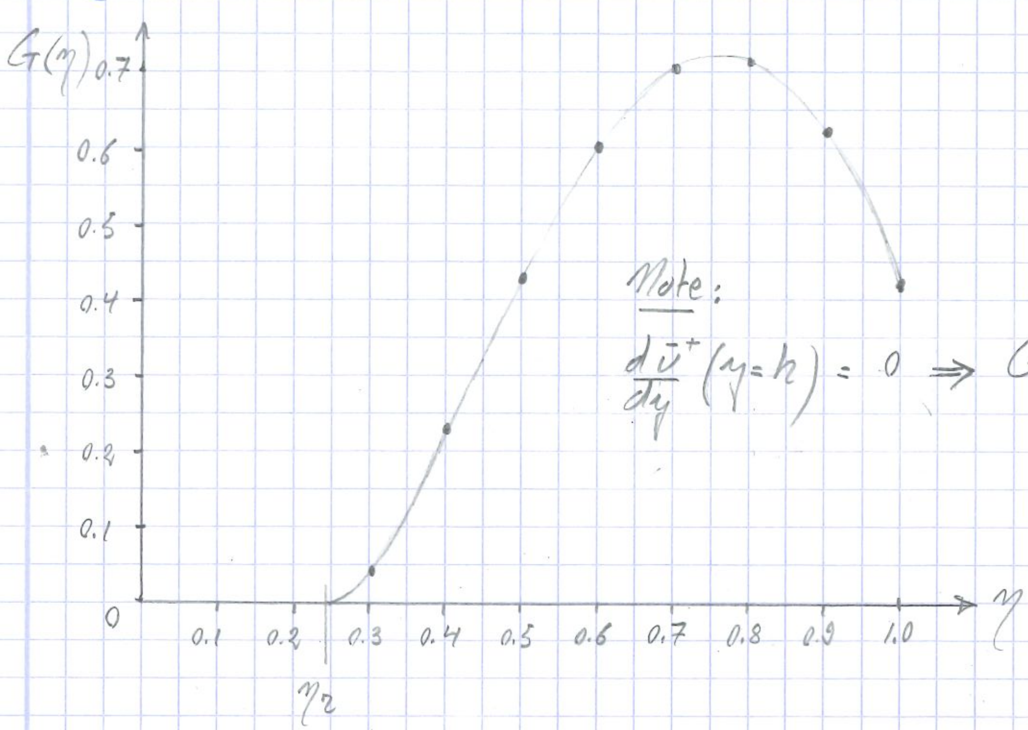
$$= \frac{1}{\beta}\left(\left(\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) - \left(\eta_2 - \frac{\eta_2^2}{2}\right)\right) + \frac{1}{K}\left(\underbrace{\log y_2^+ - \log y^+}_{= \log\left(\frac{y_2^+}{y^+}\right) = \log\left(\frac{\eta_2}{\eta}\right)}\right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{G(\eta) = -\frac{1}{K} \log\left(\frac{\eta}{\eta_2}\right) + \frac{1}{\beta}\left(\left(\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) - \left(\eta_2 - \frac{\eta_2^2}{2}\right)\right)}$$

$K = 0.385 \quad \beta = 0.070 \rightarrow \eta_r \simeq 0.2389$

$$G(\eta) = -\frac{1}{K}\log\left(\frac{\eta}{\eta_r}\right) + \frac{1}{\beta}\left((\eta-\eta_r) - \frac{1}{2}(\eta^2-\eta_r^2)\right)$$
$$= -\frac{1}{K}\log\left(\frac{\eta}{\eta_r}\right) + \frac{1}{\beta}(\eta-\eta_r)\left(1-\frac{(\eta+\eta_r)}{2}\right)$$

η	0.2389	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$G(\eta)$	0	0.046	0.227	0.434	0.603	0.702	0.713	0.621	0.419



<u>Note</u>:

$\frac{d\bar{u}^+}{dy}(y=h) = 0 \Rightarrow G'(\eta=1) = -\frac{1}{K}$

(c) $\nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2(1-\eta)$: $(1-\eta)$ est continue, ν_t est continue $\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dy}$ est continue

(d) Cas $Re_d = 1.0\ 10^5 \Rightarrow$ même débit.

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -3.03\log_{10}\left(\frac{2.03}{Re_d}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 10.0 \xrightarrow{\text{itérations}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 11.056$

$\hookrightarrow \lambda = 8.181\ 10^{-3}$

$$h^+ = \frac{h\bar{u}_\tau}{\nu} = \sqrt{\frac{\lambda}{4}}\frac{h\,u_m}{\nu} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4}\frac{d\,\bar{u}_m}{\nu} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4}Re_d = 2261$$

$$\frac{\bar{u}_\tau^2}{\bar{u}_m^2} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{u}_m^2} = \frac{C_f}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

$\hookrightarrow \frac{h^+_{turb}}{h^+_{lam}} = \frac{2261}{387.3} = 5.8378$

$\hookrightarrow \frac{\bar{\tau}_{w\,turb}}{\bar{\tau}_{w\,lam}} = (5.8378)^2 = 34.08$

34 fois plus de pertes en écoulement turbulent qu'en écoulement laminaire !