LMECA1321 NOM - Prénom:

Examen août 2024: écoulements turbulents Nr. encodage:

---

(20)

Rappel: en écoulement turbulent, on utilise des grandeurs moyennées dans le temps: $\overline{u}$, $\overline{u}_m$, etc.

(14)

On considère **l'établissement d'un écoulement turbulent hydrauliquement lisse dans l'entrée d'un canal** formé de deux plaques planes séparées par une distance d. La demi-hauteur du canal est notée $h = \frac{d}{2}$. La distance mesurée à partir de la paroi inférieure est notée y. En $x = 0$, l'écoulement est uniforme et à vitesse $\overline{u}_m$. Pour la région d'établissement, $0 < x < x_p$, des couches limites turbulentes se développent le long de chaque plaque. Leur épaisseur est notée $\delta(x)$, Les deux couches limites se rejoignent en $x = x_p$ (i.e., lorsque $\delta(x_p) = h$), et l'écoulement peut alors être considéré comme établi.

Dans ce problème, nous allons utiliser un profil de vitesse simplifié en exposant:

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} , \qquad (1)$$

pour lequel on a respectivement, pour les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{(n+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\theta}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} . \qquad (2)$$

Pour la suite, on supposera que $n = 7$.

3 1. Esquisser la géométrie du problème avec les deux couches limites qui se développent.

   Dessiner aussi, sur un autre graphe, les profils de vitesse $\frac{\overline{u}}{\overline{u}_m}$ en fonction de $\frac{y}{h}$: (a) pour un certain x dans la zone d'établissement, et (b) pour l'écoulement établi. **Attention**: Dessiner les deux profils sur le même graphe, pour bien les comparer!

3 { 2 2. La vitesse $\overline{u}_e$ de l'écoulement en dehors des deux couches limites est donc un fonction croissante de x: pourquoi? Obtenir la valeur de $\frac{\overline{u}_e(x_p)}{\overline{u}_m}$.

1 3. Pour la suite, nous allons négliger cette variation de la vitesse hors couches limites. Elle sera supposée constante, et sera prise comme la moyenne: $\overline{u}_e = \frac{1}{2}\left(\overline{u}_m + \overline{u}_e(x_p)\right)$. Obtenez la valeur de $\frac{\overline{u}_e}{\overline{u}_m}$.

3 4. Obtenir alors l'expression pour l'épaisseur $\delta(x)$ de couche limite avec $\overline{u}_e$ constant à partir de l'équation intégrale de von Karman et de la formule simplifiée de White:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \qquad \text{et} \qquad C_f \simeq \frac{0.0271}{Re(x)^{1/7}} \qquad (3)$$

   où $Re(x) = \frac{\overline{u}_e\, x}{\nu}$.

3 5. Obtenir enfin l'expression pour la longueur d'établissement, $\frac{x_p}{d}$, exprimée en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement en canal, $Re_d = \frac{\overline{u}_m\, d}{\nu}$ (et de rien d'autre!).

2 6. Calculer la longueur d'établissement $\frac{x_p}{d}$ pour le cas $Re_d = 1.0 \times 10^5$.

Comparer avec la longueur requise pour établir un écoulement laminaire en canal: $\frac{x_p}{d} \simeq 0.013\, Re_d$.

6 On considère finalement **l'écoulement turbulent et établi en canal**:

1 1. Définir $\overline{u}_\tau$ et y^+.

2.5 2. Obtenir la valeur de λ pour le cas $Re_d = 1.0 \times 10^5$, et avec 4 chiffres significatifs. (Pour la première valeur, utiliser $\lambda_0 = 1/100$)

Obtenir ensuite la valeur de $Re_\tau = \frac{\overline{u}_\tau\, h}{\nu}$, aussi avec 4 chiffres significatifs.

2.5 3. Dessiner, avec des axes chiffrés, le profil universel de vitesse $\frac{\overline{u}}{\overline{u}_\tau}$ en fonction de $\log_{10}(y^+)$ dans le cas présent. Définir clairement les différentes régions de l'écoulement, depuis la paroi jusqu'au centre du canal.

Note: Pour gagner du temps, on ne calculera pas ici la contribution de la fonction complément $G(\eta)$, qui est effectivement assez petite en canal (voir cours). On vous demande cependant d'indiquer sur votre graphe l'endroit à partir duquel sa contribution devient mesurable, et aussi d'esquisser son allure jusqu'au centre du canal.

Formules en canal hydrauliquement lisse:

Profil universel de vitesse pour la région complètement turbulente:

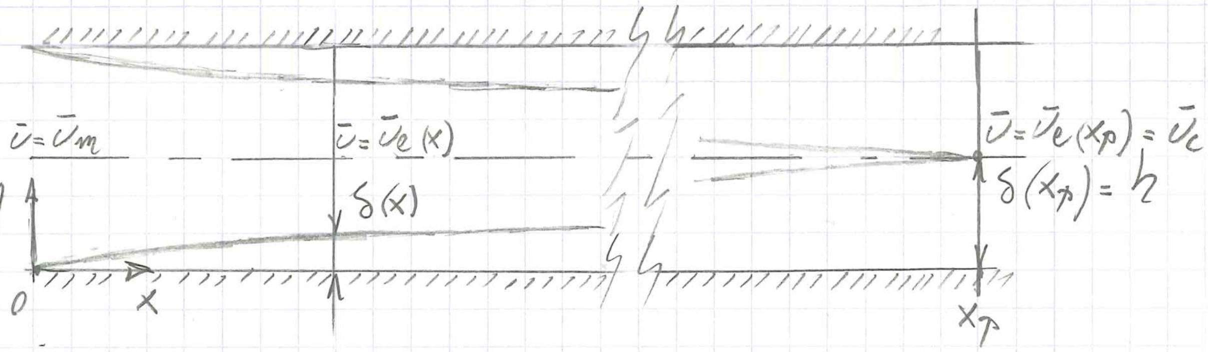
$$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_\tau} = \left(\frac{1}{\kappa}\log(y^+) + C\right) + G(\eta) \tag{4}$$

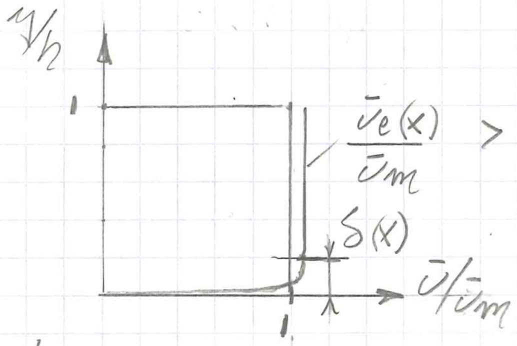
avec $\kappa = 0.383$ et $C = 4.25$, et où $G(\eta)$ est la fonction complément qui dépend de $\eta = \frac{y}{h}$.

Formule des pertes de charge:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -3.06\,\log_{10}\left(\frac{2.05}{Re_d}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) . \tag{5}$$

1.

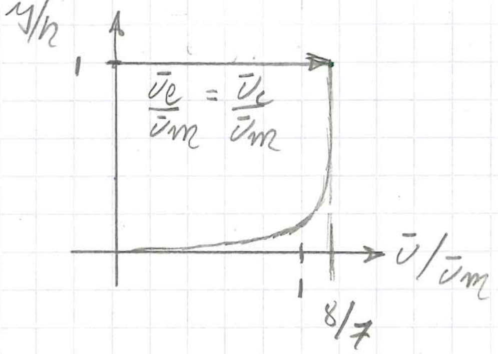




$\frac{\bar{u}_e(x)}{\bar{u}_m} > 1$ (par conservation du débit)

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e(x)} = \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{1/7}$$

en $x = x_p$
↳ $\bar{u}_e = \bar{u}_c$
$\delta = h$



$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_c} = \left(\frac{y}{h}\right)^{1/7}$$

2. $$\bar{u}_m h = \int_0^h \bar{u}\, dy = \bar{u}_e \int_0^h \left(\frac{y}{h}\right)^{1/7} dy = \bar{u}_e h \underbrace{\int_0^1 \eta^{1/7}\, d\eta}_{\left[\frac{\eta^{8/7}}{8/7}\right]_0^1 = \frac{7}{8}}$$

↳ $\bar{u}_m = \bar{u}_e \frac{7}{8}$ $\quad = \frac{n+1}{n}$

↳ $\frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_m} = \frac{8}{7} \simeq 1.143$

3. Vitesse $\bar{u}_e$ effective pour la suite:

$$\bar{u}_e = \frac{1}{2}\left(\bar{u}_m + \bar{u}_e(x_p)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{8}{7}\right)\bar{u}_m = \frac{1}{2}\,\frac{15}{7}\,\bar{u}_m = \frac{15}{14}\,\bar{u}_m$$

$$\frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_m} = \frac{15}{14} \simeq 1.0714 \quad = \frac{(2n+1)}{2}$$

4 $$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

$$\frac{7}{8*9}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2}\frac{0.0271}{(Re(x))^{1/7}} = \frac{1}{2}\frac{0.0271}{\left(\frac{U_e x}{\nu}\right)^{1/7}}$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{7}\times\frac{1}{2}\times 0.0271\frac{1}{(U_e/\nu)^{1/7}}\frac{1}{x^{1/7}}$$

$$d\delta = 0.1394\frac{1}{(U_e/\nu)^{1/7}}x^{-1/7}\,dx$$

$$\delta(x) = 0.1394\frac{1}{(U_e/\nu)^{1/7}}\frac{x^{6/7}}{6/7}$$

$$\boxed{\delta(x) = \underset{\substack{\shortparallel \\ (6*0.0271)}}{0.1626}\frac{x}{\left(\frac{U_e x}{\nu}\right)^{1/7}} = 0.1626\frac{x^{6/7}}{\left(\frac{U_e}{\nu}\right)^{1/7}}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}\times 0.0271\frac{1}{(U_e/\nu)^{1/7}}x^{-1/7}$$

$$\theta(x) = 0.01355\frac{1}{(U_e/\nu)^{1/7}}\frac{x^{6/7}}{6/7}$$

$$\theta(x) = 0.0158\frac{x}{\left(\frac{U_e x}{\nu}\right)^{1/7}}$$

5. $$\delta(x_p) = 0.1626\frac{x_p^{6/7}}{(U_e/\nu)^{1/7}}$$

$$\shortparallel$$

$$h = \frac{d}{2} = 0.1626\frac{x_p^{6/7}}{(U_e/\nu)^{1/7}}$$

$$d = 0.3252\frac{1}{(U_e/\nu)^{1/7}}x_p^{6/7}$$

$$d^{6/7}\cdot d^{1/7} = 0.3252\frac{1}{(U_e/\nu)^{1/7}}x_p^{6/7}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{x_p}{d}\right)^{6/7} = 3.0750\left(\frac{U_e d}{\nu}\right)^{1/7}$$

$$\frac{x_p}{d} = (3.0750)^{7/6}\left(\frac{U_e d}{\nu}\right)^{1/6}$$

$$= 3.7081\left(\frac{U_e d}{\nu}\right)^{1/6}$$

$$= 3.7081\left(\frac{\bar{U}_e}{\bar{U}_m}\right)^{1/6}\left(\frac{U_m d}{\nu}\right)^{1/6}$$

Si pris simplement $U_e = U_m$

$$\frac{x_p}{d} \simeq 3.71\,(Re_d)^{1/6}$$

@ $Re_d = 10^5$

avec $\frac{\bar{U}_e}{\bar{U}_m} = \frac{15}{14} \rightarrow \boxed{\frac{x_p}{d} \simeq 3.751\left(\frac{U_m d}{\nu}\right)^{1/6} = 3.751\,Re_d^{1/6}} = 25.56$

6. Cas laminaire $\boxed{\frac{x_p}{d} \simeq 0.013\ Re_d} \simeq 1300$ 1300 !

$\hookrightarrow$ 51 fois moins long!

Eclt turbulent et établi en canal

1. $\bar{v}_\tau = \sqrt{\dfrac{\bar{\tau}_w}{\rho}}$ vitesse de frottement

$y^+ = \dfrac{y\,\bar{v}_\tau}{\nu}$

2. $C_f = \dfrac{\bar{\tau}_w}{\frac{1}{2}\rho\,\bar{v}_m^2} = 2\,\dfrac{\bar{v}_\tau^2}{\bar{v}_m^2} \rightarrow \dfrac{\bar{v}_\tau^2}{\bar{v}_m^2} = \dfrac{C_f}{2} = \dfrac{\lambda}{4}$ (car $\lambda = 2C_f$ en canal)

$\rightarrow \dfrac{\bar{v}_\tau}{\bar{v}_m} = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{2}$

a) $Re_d = 1.0\ 10^5$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 10 \rightarrow 11.286 \rightarrow 11.125 \rightarrow 11.144 \rightarrow 11.142$ convergé

$\hookrightarrow \sqrt{\lambda} = 0.089748 \rightarrow \dfrac{\bar{v}_\tau}{\bar{v}_m} = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0.04487$

$\hookrightarrow \lambda = 0.008055$

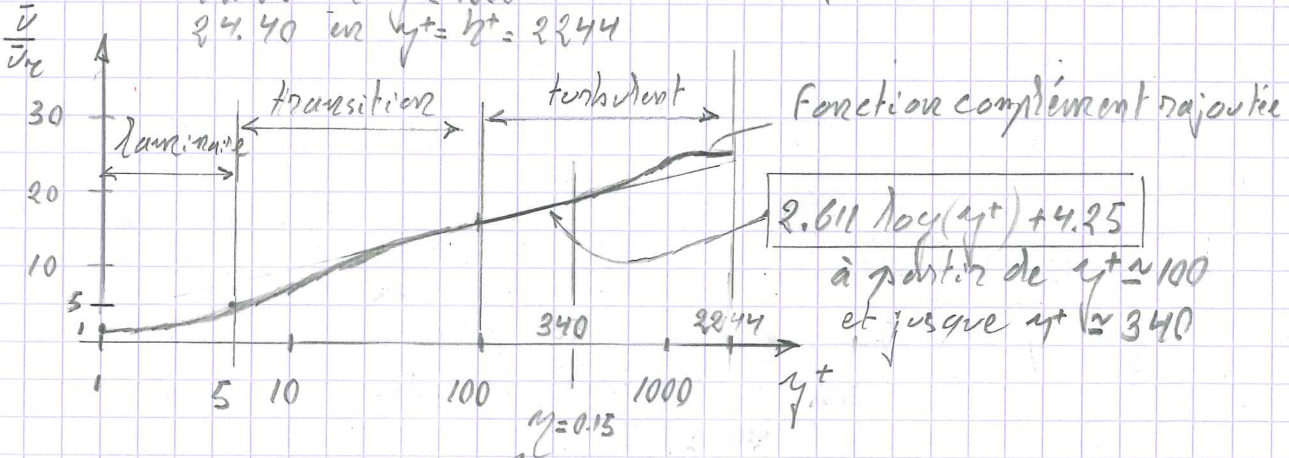
$Re_\tau = \dfrac{\bar{v}_\tau h}{\nu} = \dfrac{\bar{v}_\tau}{\bar{v}_m}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{v_m d}{\nu} = \dfrac{\bar{v}_\tau}{\bar{v}_m}\,\dfrac{1}{2}\,Re_d = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{4}\,Re_d = 2244 = h^+$

3. $\dfrac{\bar{v}}{\bar{v}_\tau} = \left(\dfrac{1}{K}\log(y^+) + C\right) + G(\eta)$

$= \left(\underbrace{2.611\,\log(y^+) + 4.25}\right) + G(\eta)$

16.27 en $y^+ = 100$
22.29 en $y^+ = 1000$
24.40 en $y^+ = h^+ = 2244$

$\log_{10}(h^+) = 3.351$



Début de la fonction complément est en $\eta \simeq 0.15$
" Fin de la "région proche de la paroi"

$\hookrightarrow y^+ \simeq 0.15 \times 2244 \simeq 340$

- Sous-couche laminaire $0 \leq y^+ \leq 5$
- Région complètement turbulente : $y^+ \gtrsim 100$

(OK si utilise plutôt 70 ou 90 !)