Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre bloc annuel, vos filières et votre numéro magique.

MECA1321	Nom - prénom :	**Numéro magique**
Août 2024	Bloc - filières :	

1 Dépôt d'une couche liquide sur un solide

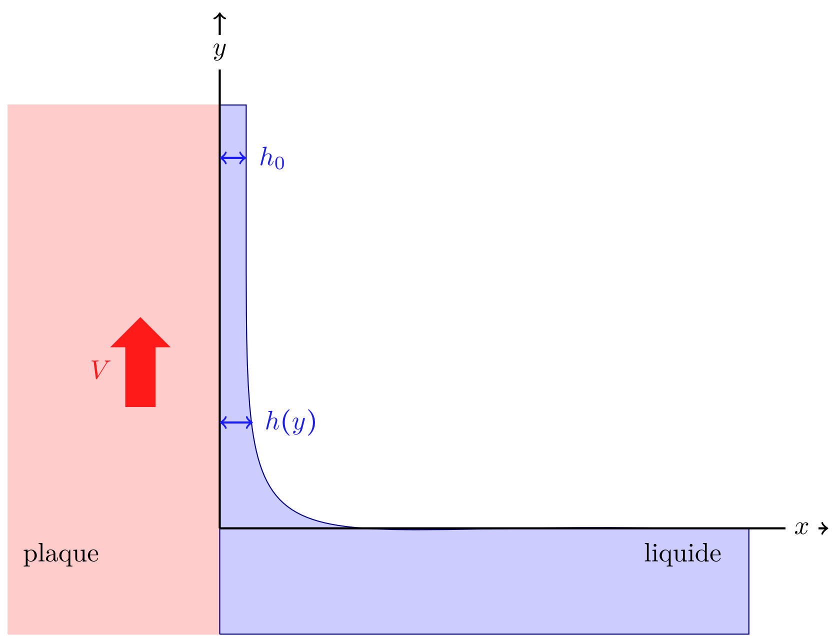
Pour y déposer un fin film liquide en surface, on tire une plaque plane à enduire d'un bain liquide à vitesse V constante. L'écoulement est stationnaire. La viscosité et la masse volumique du fluide sont μ et ρ. Le fluide colle à la plaque. On néglige totalement l'écoulement de l'air ambiant et l'effet de la gravité. La pression extérieure est supposée nulle. La tension interfaciale air-liquide est notée γ, tandis que l'épaisseur finale h_0 souhaitée est constante et connue. Pour la partie supérieure de l'écoulement où l'épaisseur $h(y)$ est petite, nous pouvons utiliser les équations de la lubrification :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0, \\[2ex] -\dfrac{dp}{dy} + \mu\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & = & 0. \end{array}\right.$$

La différence de pression à la surface du film sera uniquement fixée par la tension de surface donnée par :

$$p(y) - p_0 = -\ \gamma\ h''(y).$$

L'approximation de la courbure par la dérivée seconde de l'épaisseur du film $h(y)$ est légitime si on suppose que $|h'(y)| \ll 1$: ce qui est bien le cas pour la partie supérieure du problème.



1. Quelles sont les unités de γ ?

On écrit simplement les unités de tous les termes de l'expression fournie :

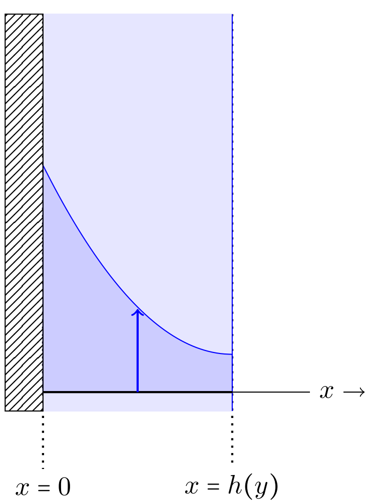
$$\underbrace{p(x) - p_0}_{\left[\frac{kg}{ms^2}\right]} = \underbrace{\gamma}_{\left[\frac{kg^3}{s^2}\right]} \underbrace{h''(x)}_{\left[\frac{m}{m^2}\right]}$$

On déduit donc que les unités de γ sont : $\boxed{\left[\frac{kg}{s^2}\right]}$

Non, γ n'est pas le rapport entre c_p et c_v !
Un nombre incalculable d'étudiants échouent à cette question totalement élementaire !

2. Ecrire les conditions aux limites pour la vitesse qu'il faut imposer en $x = 0$ et en $x = h(y)$.

On se met évidemment dans la zone asymptotique où l'écoulement est quasi-établi !
On considère donc aussi que les variations en y sont négligeables.
En $x = 0$, le fluide colle à la paroi et donc la vitesse est imposée à la valeur V.
E, $x = h(y)$, il n'y a pas de contrainte tangentielle, car nous avons une surface libre[1].



Il suffit juste d'écrire :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} v(0) & = & V \\ v'(h(y)) & = & 0 \end{array}}$$

Il ne faut rien écrire de plus !
Imposer une vitesse nulle en $h(y)$ n'est pas une bonne idée !

[1] Plus précisément, on considère que la viscosité de l'air est totalement négligeable par rapport à celle du fluide !

3. Trouver les constantes A et α de l'expression du champs de vitesse :

$$v(x,y) = V + A\ h'''(y)\ x\ \Big(h(y) - \alpha x\Big)$$

A partir du bilan de quantité de mouvement dans la direction verticale, on écrit :

$$0 = -p'(y) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)$$

En tenant compte que la pression est issue uniquement de la tension superficielle,

$$-\gamma h'''(y) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)$$

En intégrant une première fois dans l'axe x,
Et en tenant compte que $v'(h(y)) = 0$,

$$\frac{\gamma h'''(y)}{\mu}(h(y) - x) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

En intégrant une seconde fois dans l'axe x,
Et en tenant compte que $v(0) = V$,

$$V + \frac{\gamma h'''(y)}{\mu}\ x\ \left(h(y) - \frac{x}{2}\right) = v(x,y)$$

Les deux constantes sont donc : $\boxed{A = \frac{\gamma}{\mu} \qquad \alpha = \frac{1}{2}}$

4. Obtenir le débit volumique Q par unité de largeur de la plaque en effectuant une intégration transverse du profil de vitesse. Ce débit est-il indépendant de la position y ?

Le débit s'obtient directement en intégrant le profil de vitesse obtenu :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{h(y)} V + \frac{\gamma h'''(y)}{\mu}\ x\ \left(h(y) - \frac{x}{2}\right)\ dx \\ &= Vh(y) + \frac{\gamma h'''(y)}{\mu}\ \underbrace{\left[\frac{x^2 h(y)}{2} - x\frac{x^3}{6}\right]_0^{h(y)}}_{\dfrac{h^3(y)}{3}} \end{aligned}$$

Il suffit juste donc de conclure : $\boxed{Q = Vh(y) + \frac{\gamma h'''(y)}{\mu}\ \frac{h^3(y)}{3} = Vh_0}$

5. Trouver la constante B en démontrant que l'épaisseur $h(y)$ satisfait l'équation différentielle :

$$h^3(y)\ h'''(y) + B\ \Big(h(y) - h_0\Big) = 0$$

Le débit doit être constant par conservation et vaut Vh_0
car le terme de courbure est nul lorsqu'on atteint la hauteur finale h_0 !
On écrit donc ce qui avait été suggéré dans la sous-question précédente !

$$Vh(y) + \frac{\gamma h'''(y)}{\mu}\ \frac{h^3(y)}{3} = Vh_0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma h'''(y)}{\mu}\ \frac{h^3(y)}{3} + V\Big(h(y) - h_0\Big) &= 0 \\ h^3(y)\ h'''(y) + \frac{3\mu V}{\gamma}\ \Big(h(y) - h_0\Big) &= 0 \end{aligned}$$

Et on obtient donc : $\boxed{B = \frac{3\mu V}{\gamma}}$

6. Quelles sont les conditions aux limites à appliquer pour cette équation différentielle ?

   Il faut 3 conditions puisqu'on a une équation différentielle ordinaire d'ordre trois !
   Ces conditions s'appliquent lorsque $y \to \infty$ où on connaît l'épaisseur.
   On y exige en outre que la pente et la courbure soient nulles.

Il suffit donc d'écrire simplement :

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} y \to \infty & h & \to & h_0 \\ & h' & \to & 0 \\ & h'' & \to & 0 \end{array}}$$

7. La vitesse à la surface du film (en $x = h(y)$) s'annule à une épaisseur critique h_*.
   Calculer l'expression de h_* en fonction uniquement de h_0.

   On impose que la vitesse en $x = h_*$ s'annule en utilisant le profil calculé plus haut.

$$0 = V + \frac{\gamma h_*'''}{\mu}\, h_* \left(h_* - \frac{h_*}{2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$0 = V + \frac{\gamma h_*'''}{\mu}\, \frac{h_*^2}{2}$$

$$\downarrow \quad \textit{En tenant compte que } h'''\ h^3 + \frac{3\mu V}{\gamma}\left(h - h_0\right) = 0,$$

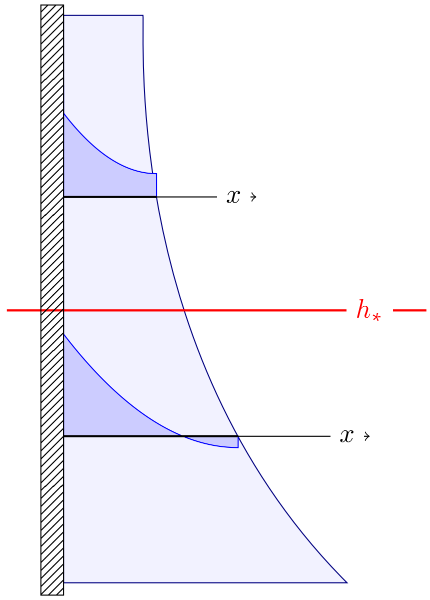
$$0 = V + \frac{\gamma}{2\mu}\, \frac{3\mu V}{\gamma h_*}\left(h_0 - h_*\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 2h_* + 3\left(h_0 - h_*\right) \\ h_* & = & 3h_0 \end{array}$$

Et on obtient donc : $\boxed{h_* = 3h_0}$

8. Esquisser les profils de vitesse au dessus et en dessous de cette épaisseur critique h_*.



9. Quel est le fluide considéré en tenant compte des valeurs numériques ci-dessous ?

$\boxed{\textit{C'est de l'eau !}}$

Il est possible de répondre aux deux dernières questions en n'ayant strictement rien répondu à tout ce qui précède.... Essayer de réfléchir physiquement et d'imaginer ce qui se passe dans l'écoulement avant de vous lancer dans des tas de calculs compliqués ☺☺☺

Valeurs numériques des paramètres

V	0.5	m/s
ρ	1000	kg/m^3
μ	0.001	$Pa\ s$
h_0	100	μm
γ	0.05	☺

Ne pas calculer de valeur numérique dans vos réponses, fournir uniquement l'expression symbolique de toutes les quantités demandées. Ces données doivent uniquement permettre de convaincre que l'approximation de lubrification est bien valide et de déduire le fluide à la toute dernière question.