Séance 1

Ecoulements incompressibles stationnaires établis

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot (2\mu\mathbf{d}) + \rho\mathbf{g} \\
\rho c(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})T &= 2\mu\mathbf{d} : \mathbf{d} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (k\boldsymbol{\nabla} T) + r
\end{aligned}
$$

1 Considérons l'écoulement incompressible stationnaire et établi d'un fluide newtonien en conduite cylindrique de section circulaire de rayon R. Le gradient de pression dp/dx, et la viscosité μ du fluide sont connus.

1. Calculer le profil de vitesse $u(r)$ et la vitesse moyenne u_m.
2. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur une tranche de conduite, identifier l'équation liant la tension à la paroi τ_w et le gradient de pression.
3. Calculer le coefficient de frottement C_f et les pertes de charges λ.
   Comment exprimer le bilan de quantité de mouvement en termes de ces deux coefficients ?
4. Calculer l'énergie dissipée par le travail des efforts internes dans l'écoulement.

Quelques ordres de grandeur de viscosité

Matériau	μ $[kg/ms]$
verre (à température ambiante)	10^{40}
verre (à 500^0C)	10^{12}
bitume	10^{8}
polymères fondus	10^{3}
miel	10^{1}
glycérine	10
huile d'olive	10^{-1}
huile industrielle	10^{-2}
eau	10^{-3}
air	10^{-5}

2 On souhaite analyser les écoulements incompressibles stationnaires et établis entre deux cylindres concentriques de rayon interne R_i et $R_e = R$. Le gradient de pression dp/dx, et la viscosité μ du fluide sont connus. On vous demande de :

1. Calculer le profil de vitesse $u(r)$.
2. Calculer la vitesse moyenne u_m.
3. Calculer les pertes de charges λ.
4. Qu'observe-t-on dans les deux cas limites donnés par $R_e - R_i \ll R_e$ et $R_i \ll R_e$?

3 On considère deux écoulements en conduite circulaire pour lesquels nous connaissons la masse densité ρ, la viscosité μ, le rayon de la conduite R et le débit massique Q. En identifiant les deux écoulement par les indices $_A$ et $_B$, on a observé les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_A &= 10\ \rho_B, \\ \mu_A &= 10\ \mu_B, \\ R_A &= 10\ R_B, \\ Q_A &= 10\ Q_B. \end{aligned}$$

L'écoulement identifié par l'indice $_A$ est turbulent.
Est-ce que le second écoulement est également turbulent?
Justifier brièvement votre réponse.

4 Pour un écoulement de cisaillement plan, on utilise souvent la relation suivante pour définir le comportement de certains fluides non-newtoniens :

$$\tau_{xy} = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy}$$

Les autres composantes du tenseur des extra-tensions sont nulles. On peut directement observer que lorsque $n = 1$, ce modèle connu sous le nom de *power law* ou de modèle de Ostwald-de Waele se réduit à l'équation de comportement du fluide newtonien.

1. Ecrire l'expression tensorielle générale du modèle de Ostwald-de Waele.
2. Déduire l'équivalent de la formule de Hagen-Poiseuille pour ce modèle.

5 De la pulpe de papier est pompée dans une filière horizontale de hauteur $2h$ et de longueur L en imposant en gradient de pression dp/dx. La largeur de la filière étant très grande, on supposera que l'écoulement est bidimensionnel. Comme la pulpe n'est pas un fluide Newtonien, son profil de vitesse est donné par l'expression :

$$u(y) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{m} \frac{dp}{dx} \right)^{1/n} \left(h^{(n+1)/n} - |y|^{(n+1)/n} \right)$$

où m et n sont des paramètres matériels strictement positifs. Les composantes diagonales de $\boldsymbol{\tau}$ sont nulles, tandis que l'unique composante de cisaillement τ_{xy} est indépendante de x.

1. Donner les unités des paramètres matériels n et m.
2. Calculer le gradient de pression requis pour transporter V un volume de pulpe par unité de temps et par unité de largeur de la filière.
3. En supposant que l'énergie interne et l'énergie cinétique restent constantes dans la filière, calculer la puissance calorifique par unité de largeur à évacuer en raison du travail de forces de surface.