

Séance 10 - Ecoulements turbulents en canal

21

1. Définir $\bar{\sigma}_{xx}^t$, $\bar{\sigma}_{xy}^t$, $\bar{\tau}_{xx}^t$, $\bar{\tau}_{xy}^t$ et \bar{k} en termes de fluctuations de vitesses si $w' = 0$.

Si on moyenne l'équation de quantité de mouvement on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu \bar{d}_{ij} - \overline{\rho v'_i v'_j}) \quad (1)$$

On définit le tenseur de contraintes effectives additionnelles dues à la turbulence (ou tenseur de Reynolds) comme :

$$\bar{\sigma}_{ij}^t \stackrel{\text{def}}{=} -\overline{\rho v'_i v'_j} \quad (2)$$

$\bar{\sigma}_{xx}^t$ et $\bar{\sigma}_{xy}^t$ sont donc respectivement égaux à $-\overline{\rho u' u'}$ et $-\overline{\rho u' v'}$.

On peut toujours décomposer un tenseur en la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur de trace nulle (déviateur). On peut donc réécrire $\bar{\sigma}^t$ comme :

$$\bar{\sigma}_{ij}^t = \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk}^t + \bar{\tau}_{ij}^t \quad (3)$$

où $\bar{\tau}_{ij}^t$ est la partie déviatoire. Le tenseur sphérique $\frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk}^t$ est défini comme $-2/3 \rho \bar{k} \delta_{ij}$ où \bar{k} est appelé l'énergie cinétique de turbulence et donc égal à $\bar{k} = \overline{v'_k v'_k} / 2 = -\bar{\sigma}_{kk}^t / 2 \rho$. Le tenseur des contraintes peut dès lors se réécrire comme :

$$\bar{\tau}_{ij}^t \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\sigma}_{ij}^t - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk}^t \delta_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^t + \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \quad (4)$$

$\bar{\tau}_{xx}^t$ et $\bar{\tau}_{xy}^t$ sont donc respectivement égaux à $\bar{\sigma}_{xx}^t + \frac{2}{3} \rho \bar{k}$ et $\bar{\sigma}_{xy}^t$. Il est important de noter que puisque $\overline{u' u'}$ n'est pas forcément égal à $\overline{v' v'}$, la diagonale de $\bar{\tau}^t$ n'est pas forcément nulle, contrairement au tenseur de cisaillement moléculaire.

2. Ecrire les équations moyennées de Reynolds pour un écoulement établi en canal et en déduire l'expression du profil de la contrainte effective totale. Que représentent $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}^t$ et $\bar{\tau}_w$?

On considère ici un écoulement **stationnaire** et **établi**, ce qui permet de supprimer tous les termes $\frac{\partial}{\partial t}$ et certains termes $\frac{\partial}{\partial x}$. L'écoulement étant établi, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$ et par continuité, on en déduit $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$. De plus, puisque le fluide colle aux parois ($v(0) = v(2h) = 0$) et $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$, la composante de vitesse verticale est donc nulle $v = 0$. L'équation selon $\hat{\mathbf{e}}_x$ se simplifie dès lors ainsi:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} \bar{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}^t}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}^t}{\partial y} \quad (6)$$

Note: $\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}^t}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{\rho u' u'}}{\partial x}$ est donc bien nul car l'écoulement est établi.

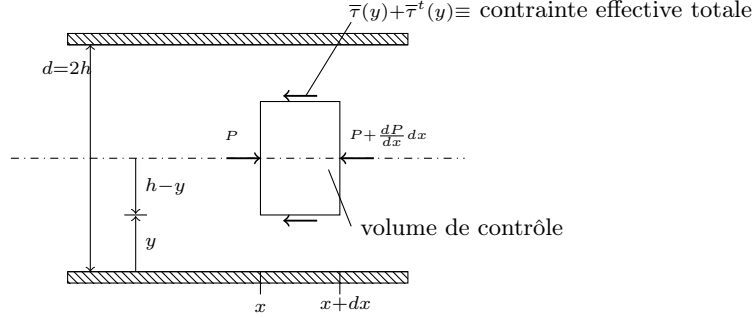
On doit donc intégrer cette équation par rapport à y entre 0 et $2h$. On sait que $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ est constant puisque l'écoulement est établi. De plus, la contrainte totale (linéaire car $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ constant) étant égale à $-\tau_w$ en $2h$ et à τ_w en 0, l'équation (6) devient alors:

$$\bar{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) \quad (7)$$

où $\bar{\tau}(y) = \bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}^t(y) = \bar{\tau}_{xy}^t = \bar{\sigma}_{xy}^t$

3. Obtenir la même relation mais en effectuant des bilans sur des volumes de contrôle.

Soit un volume de contrôle symétrique par rapport au centre du canal tel qu'illustré à la Fig.3.



Le flux de quantité de mouvement entrant dans le volume de contrôle en x , à savoir

$$\left(\rho \int_y^h \bar{u} dy \right)_x$$

et le flux de quantité de mouvement sortant du volume de contrôle en $x + dx$, à savoir

$$\left(\rho \int_y^h \bar{u} dy \right)_{x+dx}$$

sont égaux étant donné que l'écoulement est établi. Leur contribution est donc nulle. De plus, sur les deux autres frontières, le champ de vitesse moyen n'a pas de composante normale à la surface; il n'y a donc pas de flux massique moyen au travers de ces surfaces. On peut donc écrire, pour la direction horizontale

$$\sum \text{forces} = 0$$

En considérant chacune des quatres surfaces de contrôle, on obtient alors

$$\begin{aligned} & (\bar{p}(x) - \bar{p}(x + dx)) (h - y) - (\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y)) dx = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{\bar{p}(x + dx) - \bar{p}(x)}{dx} (h - y) = (\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y)) \end{aligned}$$

$$\boxed{-\frac{d\bar{p}}{dx} (h - y) = (\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y))} \quad (8)$$

avec $-\frac{d\bar{p}}{dx}$ constant car l'écoulement est établi. Si on évalue cette équation en $y = 0$ (i.e. cas d'un volume de contrôle allant jusqu'à la paroi), on obtient

$$\boxed{-\frac{d\bar{p}}{dx} h = \bar{\tau}_w} \quad \text{avec } \bar{\tau}_w \text{ la contrainte pariétale} \quad (9)$$

En insérant l'équation (9) dans l'équation (8), on obtient

$$\boxed{\bar{\tau}(y) + \bar{\tau}^t(y) = \bar{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{h}\right)} \quad (10)$$

4. Démontrer la relation $\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_m} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ où λ est le coefficient de perte de charge et \bar{u}_m est la vitesse de débit moyennée dans le temps.

Pour rappel,

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho \bar{u}_m^2}{2} \lambda \frac{1}{2h} \quad (11)$$

ce qui nous donne une relation pour λ . De plus en utilisant la définition de \bar{u}_τ et l'équation (9), on a:

$$\lambda = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{4h}{\rho \bar{u}_m^2} \quad (12)$$

$$\bar{u}_\tau = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}} \quad (13)$$

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} h = \bar{\tau}_w \quad (14)$$

Des deux dernières équations, on déduit une relation liant $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ et \bar{u}_τ . On utilise ensuite la relation liant $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ et λ :

$$\bar{u}_\tau^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} h \quad (15)$$

$$= \frac{\lambda}{4} \bar{u}_m^2 \quad (16)$$

Finalement, on obtient bien la relation demandée.

$$\boxed{\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_m} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \quad (17)$$

5. En définissant adéquatement une viscosité cinématique de turbulence $\nu_t(y)$, obtenir la relation $\nu \frac{d\bar{u}}{dy}(y) + \nu_t(y) \frac{d\bar{u}}{dy}(y) = \bar{u}_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right)$:

Le modèle de viscosité effective de turbulence permet de modéliser la partie déviatoire du tenseur de Reynolds $\bar{\tau}_{ij}^t$. Ce modèle propose d'écrire $\bar{\tau}_{ij}^t$ comme étant égal à $2\mu_t(y)\bar{d}_{ij}$ où \bar{d}_{ij} est le tenseur taux de déformation moyenné dans le temps et $\mu_t(y)$ est la viscosité dynamique de turbulence qui, doit elle-même être modélisée (voir dernière question). Si on concentre sur $\bar{\tau}^t = \bar{\tau}_{xy}^t$, on obtient alors que celui est égal à $\mu_t(y) \frac{d\bar{u}}{dy}$. Si on injecte cette expression dans l'équation (10) et connaissant la définition pour la vitesse de frottement, on obtient alors

$$\nu(y) \frac{d\bar{u}}{dy}(y) + \nu_t(y) \frac{d\bar{u}}{dy}(y) = \bar{u}_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (18)$$

6. Comment est-ce que von Karman et Prandtl simplifient encore cette relation dans la région proche de la paroi caractérisée par $0 \leq y/h \leq 0.15$.

Dans la zone proche paroi (zone I, II, III-a), von Karman et Prandtl ont supposé que le rapport $\frac{y}{h}$ était négligeable devant l'unité. Ils ont donc simplifié le membre de droite de l'équation (18) et ont obtenu

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy}(y) + \nu_t(y) \frac{d\bar{u}}{dy}(y) = \bar{u}_\tau^2. \quad (19)$$

Si cette hypothèse est raisonnable en zone I, elle est très discutable en zone III-a ...

7. Obtenir le profil $\bar{u}^+(y)$ dans la zone à dominance laminaire (zone I) de cette région. La zone I est caractérisée par $0 \leq y^+ \leq 5$:

Dans cette zone, la viscosité turbulente est négligeable par rapport à la viscosité moléculaire, l'équation (19) se simplifie donc pour donner

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2$$

L'intégration de cette EDO depuis la paroi (i.e. $y = 0$) entraîne

$$\begin{aligned} \nu \bar{u} &= \bar{u}_\tau^2 y \quad \text{car } \bar{u} = 0 \text{ en } y = 0 & (20) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\bar{u}}{\bar{u}_\tau}}_{\triangleq \bar{u}^+} &= \underbrace{\frac{y \bar{u}_\tau}{\nu}}_{\triangleq y^+} & (21) \end{aligned}$$

et enfin, par définition de \bar{u}^+ et y^+ ,

$$\boxed{\bar{u}^+ = y^+} \quad (22)$$

Cette zone se termine en $y^+ \simeq 5$.

8. Obtenir le profil $\bar{u}^+(y)$ dans la zone à dominance turbulente (zone III-a) de cette région. La zone III-a est caractérisée par $70 - 90 \leq y^+$ et $y/h \leq 0.15$. Montrer que les quatre modèles permettent d'obtenir le profil logarithmique. Quelle hypothèse peut-on, doit-on lever avec le dernier modèle ? :

Dans cette zone, la viscosité moléculaire est négligeable par rapport à la viscosité turbulente. L'équation (19) se simplifie alors pour donner

$$\nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 \quad (23)$$

Pour obtenir une solution à cette EDO, il est nécessaire de modéliser le terme ν_t . Dans un premier temps, on considère le modèle de von Karman et Prandtl, pour lequel

$$\nu_t = l^2 \frac{d\bar{u}}{dy}$$

avec l une longueur de mélange. Sous cette hypothèse, l'équation (23) devient

$$\begin{aligned} l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 &= \bar{u}_\tau^2 \\ \Leftrightarrow l \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau \end{aligned}$$

Prandtl : le modèle de Prandtl suppose que $l = \kappa y$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \kappa y \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau \\ \Leftrightarrow \kappa \left(\frac{y \bar{u}_\tau}{\nu} \right) \frac{d(\bar{u}/\bar{u}_\tau)}{d\left(\frac{y \bar{u}_\tau}{\nu}\right)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \kappa y^+ \frac{d\bar{u}^+}{dy^+} &= 1 \\ \Leftrightarrow \boxed{\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C} \end{aligned}$$

von Karman : le modèle de von Karman suppose que $l = \kappa \frac{d\bar{u}}{dy} / \left(-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)$. En réalité, si on repart de l'équation obtenue avec le modèle de Prandtl, à savoir

$$\kappa y \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau \iff \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{u}_\tau}{\kappa y}$$

et qu'on dérive les deux membres par rapport à y , on trouve

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} = -\frac{\bar{u}_\tau}{\kappa y^2} \implies \frac{d\bar{u}}{dy} / \left(-\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) = y \implies l = \kappa y$$

Le modèle de von Karman est donc identique à celui de Prandtl dans la zone turbulente proche de la paroi.

Modèle direct - viscosité turbulente linéaire (sans utiliser de longueur de mélange) : on suppose ici que $\nu_t = \kappa y \bar{u}_\tau$. Sous cette hypothèse, l'équation (23) se réécrit

$$\begin{aligned} (\kappa y \bar{u}_\tau) \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau^2 \\ \iff \kappa y \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau \\ \iff \bar{u}^+ &= \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C \end{aligned}$$

On obtient bien la même solution que précédemment.

Viscosité turbulente quadratique : comme dit précédemment, supposer y/h négligeable relativement à 1 dans la zone III-a est très discutable et à vrai dire faux. Les modèles direct, de Prandtl et de Von Karman ne sont pas faux néanmoins; les auteurs de ces modèles ont simplement calibrer leur ν_t de façon à fitter la courbe logarithmique pour \bar{u}^+ . Ces modèles donnent donc la bonne courbe pour \bar{u}^+ mais sont erronés pour fitter les mesures faites en simulation numérique pour $\nu_t(y)$, puisqu'il a fallu en effet compenser dans le modèle pour ν_t l'erreur commise en négligeant y/h . Un dernier modèle permettant à la fois de ne pas négliger y/h et d'obtenir la courbe logarithmique pour \bar{u}^+ existe néanmoins; c'est le modèle de Viscosité turbulente quadratique. Pour rappel, après injection du modèle effective de turbulence, on a obtenu l'équation (18)

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dy} + \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} = \bar{u}_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) = \bar{u}_\tau^2 (1 - \eta)$$

Dans la zone III-a, on a en fait, sur base de mesures au sein de simulation numériques très précises et assez récentes, que

$$\nu_t = \kappa y \bar{u}_\tau (1 - \eta)$$

, c'est le modèle de Viscosité turbulente quadratique. Si on se rappelle que $\nu_t \gg \nu$ en zone III-a, on trouve successivement

$$\begin{aligned} \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau^2 (1 - \eta) \\ \iff (\kappa y \bar{u}_\tau (1 - \eta)) \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau^2 (1 - \eta) \\ \iff \kappa y \frac{d\bar{u}}{dy} &= \bar{u}_\tau \\ \iff \bar{u}^+ &= \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C \end{aligned}$$

On obtient finalement la même solution que précédemment. Le modèle de viscosité turbulente quadratique permet donc de retrouver la célèbre courbe pour \bar{u}^+ tout en travaillant avec une viscosité turbulente très proche de la réalité.