Séance 10

Ecoulements turbulents en canal

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} &= 0 \\
\rho \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \,\overline{u}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \,\overline{u}\,\overline{v}}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\sigma}^t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma}^t_{xy}}{\partial y} \\
\rho \left[\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \,\overline{v}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \,\overline{v}\,\overline{v}}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\sigma}^t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma}^t_{yy}}{\partial y}
\end{aligned}
$$

20 On considère un écoulement turbulent et établi entre deux plaques planes situées en $y = 0$ et $y = 2h$. On suppose qu'on est dans le cas *hydrauliquement lisse*[1].

Il s'agit d'analyser le profil de la vitesse moyenne $\overline{u}(y)$ de l'écoulement.

Pour la région proche de la paroi, on définit y^+ la distance adimensionelle à la paroi comme suit :

$$
\overline{u}_\tau = \sqrt{\frac{\overline{\tau}_w}{\rho}} \qquad\qquad y^+ = \frac{y\,\overline{u}_\tau}{\nu}
$$

où $\overline{\tau}_w$ est la contrainte moyenne à la paroi
et $\overline{u}_\tau$ est une vitesse de frottement définie à partir de cette contrainte moyenne à la paroi.

Ensuite, on adimensionalise aussi le profil de vitesse moyenne comme suit: $\overline{u}^+(y) = \dfrac{\overline{u}(y)}{\overline{u}_\tau}$.

1. Définir $\overline{\sigma}^t_{xx}$, $\overline{\sigma}^t_{xy}$, $\overline{k}$, $\overline{\tau}^t_{xx}$ et $\overline{\tau}^t_{xy}$ en termes de fluctuations de vitesses.
2. Ecrire les équations moyennées de Reynolds pour un écoulement établi en canal et en déduire l'expression du profil de la contrainte effective totale :

   $$\overline{\tau}(y) + \overline{\tau}^t(y) = \overline{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

   Que représentent ici les notations $\overline{\tau}$ et $\overline{\tau}^t$?
3. Obtenir la même relation mais en effectuant des bilans sur des volumes de contrôle.
4. Démontrer la relation suivante :

$$\frac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_m} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$$

[1] La hauteur des aspérités est significativement plus petite que la hauteur qui caractériserait une zone I de type sous-couche laminaire. Une sous-couche laminaire peut donc exister tout près de la paroi.

où λ est le coefficient de pertes de charge
et $\overline{u}_m$ est la vitesse moyenne (i.e., la moyenne sur la section du canal du profil de vitesse moyennée dans le temps, $\overline{u}(y)$), qui est aussi appelée vitesse de débit.

5. En définissant adéquatement une viscosité cinématique de turbulence $\nu_t(y)$, obtenir la relation :

$$\nu \frac{d\overline{u}}{dy}(y) + \nu_t(y) \frac{d\overline{u}}{dy}(y) = \overline{u}_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

6. Comment est-ce que von Karman et Prandtl simplifient encore cette relation dans la région proche de la paroi, qui correspond à $0 \leq y/h \leq 0.15$?
7. Obtenir le profil $\overline{u}^+(y)$ dans la zone à dominance laminaire (zone I) de cette région. La zone I est caractérisée par $0 \leq y^+ \leq 5$.
8. Obtenir le profil $\overline{u}^+(y)$ dans la zone à dominance turbulente (zone III-a) de cette région. La zone III-a commence en $y^+ = \mathcal{O}(100)$[2] et se termine en $y/h = 0.15$.
Il est évidemment nécessaire de modéliser la viscosité turbulente :-)

Montrer que les quatre modèles ci-dessous permettent d'obtenir le bon profil dans la zone III-a. Quelle hypothèse peut-on, doit-on lever avec le dernier modèle ?

$\nu_t(y) = l^2(y) \dfrac{d\overline{u}}{dy}(y)$	$l(y) = -\kappa \dfrac{\dfrac{d\overline{u}}{dy}(y)}{\dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2}(y)}$	von Karman (1930)
$\nu_t(y) = l^2(y) \dfrac{d\overline{u}}{dy}(y)$	$l(y) = \kappa\, y$	Prandtl (1933)
$\nu_t(y) = \kappa\, y\, \overline{u}_\tau$		viscosité turbulente linéaire
$\nu_t(y) = \kappa\, y \left(1 - \dfrac{y}{h}\right) \overline{u}_\tau$		viscosité turbulente avec correction quadratique

[2] On verra plus tard que la valeur dépend du nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement, $Re_\tau = h^+$.