

Séance 11

Pertes de charges turbulentes en canal

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= -a \log_{10} \left(\frac{b}{Re_d} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\ Re_d &= \frac{2h\bar{u}_m}{\nu} \\ Re_\tau &= \frac{h\bar{u}_\tau}{\nu} = h^+\end{aligned}$$

21

On souhaite calculer les pertes de charge d'un écoulement turbulent établi entre deux plaques planes situées en $y = 0$ et $y = 2h = d$ en considérant le cas *hydrauliquement lisse*, dont on connaît la valeur de Re_d obtenu à partir du débit mesuré. Rappelons que la distance à la paroi peut être adimensionnalisée de deux manières : η qui est une adimensionnalisation purement géométrique ou y^+ qui est l'adimensionnalisation déduite de la vitesse de frottement.

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{y}{h} \\ y^+ &= \frac{y\bar{u}_\tau}{\nu} & \bar{u}_\tau &= \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}}\end{aligned}$$

où $\bar{\tau}_w$ et \bar{u}_τ sont la contrainte à la paroi et la vitesse de frottement.

Pour calculer les pertes de charges, on va utiliser un profil composite de Coles qui est valable dans toute la zone à dominance turbulente (zone III).

$$\bar{u}^+(y) = \underbrace{\left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y\bar{u}_\tau}{\nu} \right) + C \right]}_{f(y^+)} + D \underbrace{\left[3 \left(\frac{\alpha y}{h} \right)^2 - 2 \left(\frac{\alpha y}{h} \right)^3 \right]}_{G(\eta)}$$

où on utilisera les valeurs suivantes pour les constantes $\kappa = 0.384$, $C = 4.15$, $D = 0.37$ et $\alpha = \frac{4}{3}$.

1. Avec `python`, dessiner le profil composite de Coles en fonction de η pour $Re_\tau = 5200$. Comparer ensuite ce profil avec les données numériques disponibles à cette valeur¹.
2. Dédire la formule implicite classique des ingénieurs pour le calcul des pertes de charges en calculant \bar{u}_m^+ la moyenne sur la section du profil obtenu par la loi composite de Coles.

¹Simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes : Myoungkyu Lee and Robert D. Moser, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 5200$, 2015, Journal of Fluid Mechanics, vol. 774, pp. 395-415 https://turbulence.odn.utexas.edu/channel2015/content/Data_2015_5200.html

3. Calculer les valeurs numériques de a et de b .
4. Calculer λ pour 10^4 , 10^5 et 10^6 .
Il suffit d'effectuer quelques itérations simples sur $1/\sqrt{\lambda}$ avec la formule implicite classique en utilisant la formule explicite de Blasius pour estimer le candidat initial :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx 1.778 Re_d^{1/8}$$

5. Obtenir Re_d correspondant à la simulation numérique effectuée pour $Re_\tau = 5200$.
Comparer la valeur prédite de λ avec celle obtenue dans la simulation numérique.

22

On considère toujours le même écoulement en canal et on se propose de suivre l'approche de Nikuradse qui a suggéré d'approcher le profil de vitesse dans la zone turbulente en utilisant une loi de puissance sous la forme :

$$\bar{u}(y) = \bar{u}_c \left(\frac{y}{h} \right)^{1/n}$$

où \bar{u}_c est la vitesse au centre du profil en $y = h$. L'objectif est de comparer ce profil avec celui obtenu avec la loi composite de Coles après avoir calculé pour les deux profils l'intégrale adimensionnelle du déficit de vitesse :

$$I = \int_0^1 \frac{\bar{u}_c - \bar{u}(\eta)}{\bar{u}_\tau} d\eta$$

et identifier l'exposant de Nikuradse afin que les deux intégrales coïncident.

1. Obtenir l'expression de \bar{u}_m en fonction de \bar{u}_c et n pour la loi de Nikuradse.
2. Obtenir I_{Nik} l'expression de l'intégrale du déficit de vitesse en termes de λ et de n pour la loi de Nikuradse.
3. Ecrire l'expression du déficit de vitesse $\bar{u}_c^+ - \bar{u}^+$ en fonction de η pour la loi composite de Coles.
4. Obtenir I_{Coles} la valeur universelle de l'intégrale du déficit de vitesse pour la loi composite de Coles.
5. Démontrer que l'exposant n de la loi de Nikuradse doit satisfaire la relation

$$n = \frac{c}{\sqrt{\lambda}}$$

afin que les deux intégrales coïncident $I_{\text{Nik}} = I_{\text{Coles}}$.
Calculer la valeur numérique de la constante c .

6. Avec `python`, représenter les profils de Nikuradse et de Coles $Re_d = 10^4$, 10^5 et 10^6 .
7. Tracer les profils obtenus pour les lois de Nikuradse et Coles et comparer les courbes avec les résultats des simulations numériques de Lee et Moser (2015).