GW → VL

17/12/24

Erreur séance 12

- $\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\rho} = -\frac{\bar{p}}{\rho} + 2\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$

⚠ Eq. de qté de mvt en y donne, avec approximations de couche limite :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'v'}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}} \rightarrow \frac{\bar{p}}{\rho} + \overline{v'v'} = \frac{\bar{p}_e}{\rho}(x)$$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}_e}{dx}}_{= u_e \frac{du_e}{dx}} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'v'})$$

$= 0$ lorsque la couche limite n'est pas accélérée/décélérée

$$\hookrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'v'}) + 2\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

- $\frac{\bar{\sigma}_{xy}}{\rho} = 2\nu \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) = \nu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\sigma}_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\sigma}_{xy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'v'}) + 2\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'v'}) + \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)}_{=0}$$

en couche limite $\left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right|$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\sigma}_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\sigma}_{xy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'v'}) + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}$$

- $\frac{\bar{\sigma}^t_{xx}}{\rho} = -\overline{u'u'}$

- $\frac{\bar{\sigma}^t_{xy}}{\rho} = -\overline{u'v'}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\sigma}^t_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\sigma}^t_{xy}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'u'}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'})}$$

⇓ verso

↳ Finalement :

$$\boxed{\bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'} - \overline{v'v'}\right)}_{\text{terme de Townsend}} = \overbrace{\bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{dy}}^{\text{0 ici}} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)}$$

⚠ Le terme de Townsend n'est pas nul car
$\overline{u'u'} \neq \overline{v'v'}$

Mais on suppose que sa dérivée selon x est négligeable.

+ On {modélise / définit} $-\overline{u'v'} \triangleq \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \iff \nu_t \triangleq \frac{-\overline{u'v'}}{\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}}$

$$\hookrightarrow \boxed{\bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \simeq \underbrace{\bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{dx}}_{\text{0 ici}} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right)}$$

$\nu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)$ et $\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ est non négligeable

- $\dfrac{\bar{\sigma}_{xy}}{\rho} = \nu \dfrac{d\bar{u}}{dy}$ qui est non négligeable.
- $\dfrac{\bar{\sigma}^t_{xy}}{\rho} = \nu_t \dfrac{d\bar{u}}{dy}$ qui est non négligeable.

Si on intègre cette équation simplifiée, on obtient dès lors que :

$= -\overline{u'v'} =$

$$\underbrace{\int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\int_0^h \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}dy}_{\text{Term 2}} = \underbrace{\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{d\bar{u}}{dy} + \nu_t\frac{d\bar{u}}{dy}\right)dy}_{\frac{-\tau_w}{\rho}} \tag{7}$$

où on constate que le membre de droite est égal à $-\tau_w/\rho$. Si on développe ensuite le 2e terme du membre de gauche, on peut d'abord exprimer $\bar{v}$ comme étant l'intégrale de sa dérivée par rapport à y, et ensuite remplacer cette dérivée par celle de $\bar{u}$ par rapport à x en utilisant la conservation de la masse :

$$\begin{aligned}
\text{Term 2} &= \int_0^h \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}dy \\
&= \int_0^h \int_0^y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}ds\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}dy \\
&= -\int_0^h \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}dy \\
&= -\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\,dy
\end{aligned}$$

Remarquant que l'intégrant $\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\displaystyle\int_0^y \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\right)$ de l'équation ci-dessus peut se réécrire comme un des terme d'une dérivée de produit;

$$\frac{d}{dy}\left(\bar{u}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\right) = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\right) + u\frac{d\bar{u}}{dx}$$

on peut continuer continuer le développent du 2e terme comme :

$$\begin{aligned}
\text{Term 2} &= -\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\,dy \\
&= -\int_0^h \frac{d}{dy}\left(\bar{u}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\right)dy + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy \\
&= -\left[\left(\bar{u}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds\right)\right]_0^h + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy \\
&= -\left[\underbrace{\bar{u}(y=h)}_{\bar{u}_e}\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}ds - 0\right] + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy \\
&= -\bar{u}_e\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy
\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{C_f}} &= -\frac{1}{\kappa}\log\left(\frac{1}{Re_\delta}\sqrt{\frac{2}{C_f}}\right) + \frac{1}{\kappa}\log\left(\exp\left(\kappa(C+G(1))\right)\right)\\ &= -\frac{1}{\kappa}\log\left(\frac{1}{Re_\delta}\sqrt{\frac{2}{C_f}}\frac{1}{\exp\left(\kappa(C+G(1))\right)}\right)\end{aligned}$$

où $G(1)$ est la fonction de Coles évalue en $\eta = 1$: $G(1) = D\left[sin^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right]$.

5. Calculer les valeurs numériques de a et de b :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\kappa}\\ &= 2.44\\ b &= \frac{1}{\exp\left(\kappa(C+G(1))\right)}\\ &\simeq \frac{1}{22}\end{aligned}$$

6. Démontrer que l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta = \int_0^h \frac{\bar u}{\bar u_e}\left(1 - \frac{\bar u}{\bar u_e}\right) dy \tag{5}$$

satisfait l'équation intégrale de von Karman

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\bar\tau_w}{\rho \bar u_e^2} \tag{6}$$

Nous sommes ici dans un cas de couche limite non accélérée; $dp/dx = 0$. Cette équation intégrale de Von Karman s'obtient en intégrant selon y l'équation de quantitée de mouvement selon x. Cette intégration se fait de $y = 0$ à $y = h \gg \delta(x)$. Cette intégration est réalisée jusqu'à une hauteur constante et nettement supérieure à $\delta(x)$ pour deux raisons :

- 1. La hauteur h est maintenue constante afin de pouvoir sortie la dérivée de l'intégrale sans avoir de terme additionnel dû à une dépendance des bornes selon x (cfr Théorème de Leibniz - voir plus loin dans la démonstration).
- 2. Une hauteur h nettement supérieure à $\delta(x)$ de façon à avoir $\bar u(y = h) = \bar u_e$, égal à une constante (voir démo).

L'équation de quantitée de mouvement moyennée dans le temps selon x est :

$$\bar u\frac{\partial \bar u}{\partial x} + \bar v\frac{\partial \bar u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar\sigma_{xx} + \bar\sigma^t_{xx}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar\sigma_{xy} + \bar\sigma^t_{xy}\right)$$

où :

- $\frac{\bar\sigma_{xx}}{\rho} = -\frac{\bar p}{\rho} + \nu\frac{d\bar u}{dx}$. La dérivé de $\bar p$ selon x tombe car la couche limite n'est pas accélérée ($d\bar u_e/dx = 0$). Le second terme est quant à lui négligeable. En effet, $\frac{d\bar u}{dx} \simeq O\left(u_e/x\right) \ll \frac{d\bar u}{dy} \simeq O\left(u_e/\delta\right)$.
- $\frac{\bar\sigma^t_{xx}}{\rho} = -\overline{u'u'}$. La dérivée selon x de ce terme est négligeable. ~~Pour plus de détails, voir le cours de turbulence en master.~~

Eq. de qté de mvt en y:

on obtient : $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'v'}) \Rightarrow \frac{1}{\rho}\bar p + \overline{v'v'} = \frac{1}{\rho}\bar p_e(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar p}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{d\bar p_e}{dx} - \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v'v'}) = -\frac{\partial}{\partial x}\overline{v'v'}$