Séance 12 - Couches limites turbulentes

20

1. Esquisser le profil de vitesse et l'évolution de l'épaisseur de la couche limite en fonction de x :
2. Estimer la position x_c où la couche limite devient turbulente :
   La plupart des écoulements laminaires deviennent instables et transitionnent vers la turbulence à partir d'une certaine valeur du paramètre adimensionnel qui les caractérise. Pour les couches limites, cette valeur critique est le $Re_{\delta^*} = (u_e\delta^*)/\nu = 400$. Connaissant le lien entre Re_{δ^*} et Re_x, on obtient une valeur critique pour $Re_x \simeq 54000$. On a ainsi:

$$\begin{aligned} Re_{x_c} &= \frac{\bar{u}_e x_c}{\nu} \\ \rightarrow x_c &= \frac{\nu Re_{x_c}}{\bar{u}_e} \end{aligned}$$

   L'application donne $x_c = 0,0054$, soit 5.4mm !

3. Démontrer la relation $\bar{u}_\tau/\bar{u}_e = \sqrt{C_f/2}$ où C_f est le coefficient de frottement et $\bar{u}_e$ est la vitesse extérieure moyennée dans le temps :

   Par définition, on a:

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{\bar{\tau}_w}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}_e^2} \\ \bar{u}_\tau^2 &= \frac{\bar{\tau}_w}{\rho} \end{aligned}$$

   On en déduit donc immédiatement:

$$C_f = \frac{2\bar{u}_\tau^2}{\bar{u}_e^2}$$

   et finalement:

$$\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_e} = \sqrt{\frac{C_f}{2}} \tag{1}$$

4. Déduire la relation implicite liant le coefficient de frottement et le nombre de Reynolds Re_δ en calculant $\bar{u}^+$ en $y = \delta$ avec le profil obtenu par la loi composite de Coles :

   On repart de la loi composite de Coles évaluée en $y = \delta$, ce qui donne:

$$\frac{\bar{u}_e}{\bar{u}_\tau} = \left[\frac{1}{\kappa}\log\left(\frac{\delta\bar{u}_\tau}{\nu}\right) + C\right] + D\left[sin^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right] \tag{2}$$

   On commmence par réécrire $\frac{\delta\bar{u}_\tau}{\nu}$ en fonction de Re_δ et C_f en utilisant l'équation (1) :

$$\frac{\delta\bar{u}_\tau}{\nu} = \frac{\delta\bar{u}_e}{\nu}\frac{\bar{u}_\tau}{\bar{u}_e} \tag{3}$$

$$= Re_\delta\sqrt{\frac{C_f}{2}} \tag{4}$$

   On remplace ensuite le membre de gauche par l'expression donnée par l'équation (1) et on réinjecte (4) dans (2) pour obtenir:

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \left[\frac{1}{\kappa}\log\left(Re_\delta\sqrt{\frac{C_f}{2}}\right) + C\right] + D\left[sin^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right]$$

que l'on peut réécrire:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{C_f}} &= -\frac{1}{\kappa}\log\left(\frac{1}{Re_\delta}\sqrt{\frac{2}{C_f}}\right)+\frac{1}{\kappa}\log\left(\exp\left(\kappa(C+G(1))\right)\right)\\ &= -\frac{1}{\kappa}\log\left(\frac{1}{Re_\delta}\sqrt{\frac{2}{C_f}}\frac{1}{\exp\left(\kappa(C+G(1))\right)}\right)\end{aligned}$$

où $G(1)$ est la fonction de Coles évalue en $\eta = 1$: $G(1) = D\left[sin^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right]$.

5. Calculer les valeurs numériques de a et de b :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\kappa}\\ &= 2.44\\ b &= \frac{1}{\exp\left(\kappa(C+G(1))\right)}\\ &\simeq \frac{1}{22}\end{aligned}$$

6. Démontrer que l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta = \int_0^h \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\right)dy \tag{5}$$

satisfait l'équation intégrale de von Karman

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{u}_e^2} \tag{6}$$

Nous sommes ici dans un cas de couche limite non accélérée; $dp/dx = 0$. Cette équation intégrale de Von Karman s'obtient en intégrant selon y l'équation de quantitée de mouvement selon x. Cette intégration se fait de $y = 0$ à $y = h \gg \delta(x)$. Cette intégration est réalisée jusqu'à une hauteur constante et nettement supérieure à $\delta(x)$ pour deux raisons :

- 1. La hauteur h est maintenue constante afin de pouvoir sortie la dérivée de l'intégrale sans avoir de terme additionnel dû à une dépendance des bornes selon x (cfr Théorème de Leibniz - voir plus loin dans la démonstration).
- 2. Une hauteur h nettement supérieure à $\delta(x)$ de façon à avoir $\bar{u}(y = h) = \bar{u}_e$, égal à une constante (voir démo).

L'équation de quantitée de mouvement moyénnée dans le temps selon x est :

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\sigma}_{xx}+\bar{\sigma}^t_{xx}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\sigma}_{xy}+\bar{\sigma}^t_{xy}\right)$$

où :

- $\frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\rho} = -\frac{\bar{p}}{\rho}+\nu\frac{d\bar{u}}{dx}$. La dérivé de $\bar{p}$ selon x tombe car la couche limite n'est pas accélérée ($d\bar{u}_e/dx = 0$). Le second terme est quant à lui négligeable. En effet, $\frac{d\bar{u}}{dx} \simeq O\left(u_e/x\right) \ll \frac{d\bar{u}}{dy} \simeq O\left(u_e/\delta\right)$.
- $\frac{\bar{\sigma}^t_{xx}}{\rho} = -\overline{u'u'}$. La dérivée selon x de ce terme est négligeable. Pour plus de détails, voir le cours de turbulence en master.

- $\dfrac{\bar{\sigma}_{xy}}{\rho} = \nu \dfrac{d\bar{u}}{dy}$ qui est non négligeable.
- $\dfrac{\bar{\sigma}^t_{xy}}{\rho} = \nu_t \dfrac{d\bar{u}}{dy}$ qui est non négligeable.

Si on intègre cette équation simplifiée, on obtient dès lors que :

$$\underbrace{\int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\int_0^h \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy}_{\text{Term 2}} = \underbrace{\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{d\bar{u}}{dy} + \nu_t\frac{d\bar{u}}{dy}\right) dy}_{\frac{-\tau_w}{\rho}} \tag{7}$$

où on constate que le membre de droite est égal à $-\tau_w/\rho$. Si on développe ensuite le 2e terme du membre de gauche, on peut d'abord exprimer $\bar{v}$ comme étant l'intégrale de sa dérivée par rapport à y, et ensuite remplacer cette dérivée par celle de $\bar{u}$ par rapport à x en utilisant la conservation de la masse :

$$\begin{aligned}
\text{Term 2} &= \int_0^h \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy \\
&= \int_0^h \int_0^y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} ds \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy \\
&= -\int_0^h \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy \\
&= -\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds\, dy
\end{aligned}$$

Remarquant que l'intégrant $\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\displaystyle\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds\right)$ de l'équation ci-dessus peut se réécrire comme un des terme d'une dérivée de produit;

$$\frac{d}{dy}\left(\bar{u}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds\right) = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds\right) + u\frac{d\bar{u}}{dx}$$

on peut continuer continuer le développent du 2e terme comme :

$$\begin{aligned}
\text{Term 2} &= -\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds\, dy \\
&= -\int_0^h \frac{d}{dy}\left(\bar{u}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds\right) dy + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy \\
&= -\left[\left(\bar{u}\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds\right)\right]_0^h + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy \\
&= -\left[\underbrace{\bar{u}(y=h)}_{\bar{u}_e}\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds - 0\right] + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy \\
&= -\bar{u}_e\int_0^h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy + \int_0^h \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy
\end{aligned}$$

Si on injecte ce 2e terme dans le membre de droite, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\text{Term1} + \text{Term 2} &= \int_0^h 2\,\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy - \bar{u}_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy \\
&= \int_0^h \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x}dy - \bar{u}_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}dy \\
&= -\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}\left(\bar{u}_e - \bar{u}\right)\right)dy
\end{aligned}$$

Divisant ensuite cette expression par u_e^2 et l'injectant dans l'équation (7), on obtient :

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\right)\right)dy = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{u}_e^2} \tag{8}$$

Les bornes de l'intégrale ne dépendant pas de x, on peut sortir la dérivée sans termes additionnels [1] et on obtient alors bien l'équation intégrale de Von Karman pour une couche limite non accélérée :

$$\frac{d\,\theta}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^h \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}\right)dy\right) = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{u}_e^2}$$

7. Calculer le rapport $\frac{\theta}{\delta}$ pour un profil de vitesse simplifié $\bar{u}(\eta) = U\eta^{\frac{1}{n}}$:

   On repart de (5) et on effectue le changement de variable $\eta = \frac{y}{\delta}$. On a ainsi:

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{\delta} &= \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}}\left(1-\eta^{\frac{1}{n}}\right)d\eta \\
&= \int_0^1 \left(\eta^{\frac{1}{n}} - \eta^{\frac{2}{n}}\right)d\eta \\
&= \left[\frac{n}{n+1}\eta^{\frac{n+1}{n}} - \frac{n}{n+2}\eta^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^1
\end{aligned}$$

   Finalement, le rapport $\frac{\theta}{\delta}$ s'écrit:

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \tag{9}$$

   ce qui donne $\frac{\theta}{\delta} = \frac{7}{72}$ pour $n = 7$.

8. Obtenir l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire $\delta(x)$ pour ce profil de vitesse simplifié avec $n = 7$ et en utilisant l'approximation $C_f = 0.02Re_\delta^{-\frac{1}{6}}$:

   On dispose d'une relation concernant la dérivée de θ (via l'équation 6) et d'une relation entre θ et δ (via l'équation 9). On obtient donc facilement:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} &= \frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{u}_e^2} \\
&= \frac{C_f}{2}
\end{aligned}$$

[1] En effet, le théorème de Leibniz dit que $\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = f\big(x,b(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}b(x) - f\big(x,a(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt$.

Compte tenu de l'approximation proposée, qui relie directement C_f à δ, on en déduit l'équation différentielle sur δ suivante:

$$\begin{aligned}\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} &= 0.01 Re_\delta^{-\frac{1}{6}} \\ &= 0.01\left(\frac{\bar{u}_e \delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

9. Résoudre l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire $\delta(x)$ avec $\delta_{x=0} = 0$.
En déduire l'expression de $\delta(x)$, de $C_f(x)$ et de $C_{f,m}(x)$.

Pour $\delta(x)$, il suffit de reprendre l'EDO de la question précédente et de l'intégrer ;

$$\delta'(x)(\delta(x))^{1/6} = \frac{72}{700}\left(\frac{\bar{u}_e}{\nu}\right)^{-1/6}$$

En isolant ensuite $\delta(x)$ dans le membre de droite;

$$\begin{aligned}\frac{6}{7}(\delta(x))^{7/6} &= \frac{72}{700}\left(\frac{\bar{u}_e}{\nu}\right)^{-1/6} x \\ \frac{6}{7}\left(\frac{\delta(x)}{x}\right)^{7/6} &= \frac{72}{700}\left(\frac{\bar{u}_e\, x}{\nu}\right)^{-1/6} \\ \delta(x) = x\left[\frac{72}{600}\right]^{6/7} &\left[\frac{1}{Re(x)}\right]^{1/7}\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\delta(x) = 0.162\, x\, [Re(x)]^{-1/7} \tag{10}$$

Pour $C_f(x)$, on repart de l'équation de Von Karman et on y inject le lien entre θ et δ valable pour les profils en exposant;

$$C_f(x) = 2\frac{d\theta}{dx} = \frac{14}{72}\frac{d\delta}{dx}$$

On y injecte ensuite l'expression pour $\delta(x)$ (Eq.10) et on la dérive :

$$\begin{aligned}C_f(x) &= \frac{14}{72}\frac{d\delta}{dx} \\ &= \underbrace{\frac{14}{72}0.162}_{0.0316}\left[\frac{\bar{u}_e}{\nu}\right]^{-1/7}\frac{d}{dx}\underbrace{\left[x^{6/7}\right]}_{\frac{6}{7}x^{-1/7}} \\ &= 0.0316\,\frac{6}{7}\,[Re(x)]^{-1/7}\end{aligned}$$

On obtient finalement pour C_f :

$$C_f(x) = 0.0271\,[Re(x)]^{-1/7} \tag{11}$$

Pour le coefficient de frottement moyen, C_{fm}, on repart du lien entre celui-ci et θ, et du lien entre θ et δ :

$$\begin{aligned}C_{f,m}(x) &= \frac{2\theta}{x} \\ &= \frac{14}{72}\frac{\delta}{x} \\ &= \frac{14}{72}\left(\frac{72}{600}\right)^{\frac{6}{7}} Re_x^{-\frac{1}{7}}\end{aligned}$$

On obtient finalement pour C_{fm} :

$$C_{fm}(x) = 0.0316\ [Re(x)]^{-1/7} \tag{12}$$

10. Calculer la force de trainée et la puissance requise pour le moteur de bateau.
    Comparer la valeur avec celle déduite de la formule approchée de White.

    La force de trainée est donnée par le produit de la surface mouillée et de la contrainte pariétale, soit:

    $$F = bL * \frac{1}{2}\rho \bar{u}_e^2 C_{f,m}(x = L)$$

    soit une force de trainée égale à $F_{drag} = 1,637\,10^5$N en utilisant l'expression pour le coefficient de frottement moyen obtenue à la question 9 (Eq.12)), C_{fm} vaut $1,63\,10^{-3}$. Avec la formule approchée de White, il faut faire le même calcul avec $C_{fm} = 1,637\,10^{-3}$.
    La puissance est donnée par:

    $$P = F\bar{u}_e$$

    ce qui donne $P = 1.637\,10^6$ Watt.

11. Finalement, calculer la force de trainée pour une paroi très rugueuse avec $\epsilon = 2$mm. Comparer les valeurs obtenues pour un paroi hydrauliquement lisse et une paroi rugueuse.

    Pour obtenir le $C_{f,m}$ pour une paroi très rugueuse, on utilise la formule de Schlichting.

    $$\begin{aligned} C_{f,m}(L) &= \left[1.89 + 1.62\log_{10}\left(\frac{100}{2.10^3}\right)\right]^{-2.5} \\ &= 3,593\,10^{-3} \end{aligned}$$

    En recalculant la force de trainée et la puissance pour cette nouvelle valeur de $C_{f,m}$, on trouve:

    $$\begin{aligned} F &= 3,593\,10^5\ [N] \\ P &= 3,593\,10^6\ [W] \end{aligned}$$

    La force de trainée est donc deux fois plus grande dans le cas d'une paroi très rugueuse que dans le cas d'une paroi lisse. La puissance requise pour le moteur du bateau est donc elle aussi deux fois plus grande, d'où l'importance de préserver une surface aussi lisse que possible !