Séance 12

Couches limites turbulentes

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{C_f}} &= -a \log\left(\frac{b}{Re_\delta}\sqrt{\frac{2}{C_f}}\right) \\
Re_\delta &= \frac{\delta \overline{u}_e}{\nu} \\
Re_x &= \frac{x \overline{u}_e}{\nu}
\end{aligned}
$$

Le plus gros paquebot d'Europe largue les amarres

Construit par les chantiers de Saint-Nazaire, le MSC Preziosa, dernier-né de la compagnie MSC Croisières, part aujourd'hui pour une première croisière de sept jours. Le paquebot mesure en effet 333 mètres de longueur, soit quasiment l'équivalent de la hauteur de la tour Eiffel, et 62 mètres de hauteur. Le monstre des mers compte ainsi 1751 cabines réparties sur 18 ponts et peut embarquer 4345 passagers et un équipage de 1370 personnes. Il peut atteindre une vitesse de 24 noeuds, soit 43 km/h.

(LeFigaro, 4 mars 2013)

23 On souhaite calculer la force de trainée de frottement exercée sur un bateau qui se déplace à une vitesse $U = 36$ km/h. Le bateau a une longueur longueur $L = 100$ m. La surface mouillée est estimée comme le produit $bL = 2000$ m^2 en considérant le cas *hydrauliquement lisse*. Considérons une couche limite turbulente avec $\overline{u}_e = U$ constante pour estimer cette force de trainée[1].

La distance à la paroi sera représentée de deux manières : η qui est une adimensionnalisation basée sur la couche limite ou y^+ qui est l'adimensionnalisation déduite de la vitesse de frottement.

$$\eta = \frac{y}{\delta} \qquad\qquad y^+ = \frac{y\overline{u}_\tau}{\nu}$$

Au sein de la couche limite turbulente, on considère un profil composite :

$$\overline{u}^+(y) = \underbrace{\left[\frac{1}{\kappa}\log\left(\frac{y\overline{u}_\tau}{\nu}\right) + C\right]}_{f(y^+)} + \underbrace{D\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\alpha y}{\delta}\right)\right]}_{G(\eta)}$$

où on utilisera les valeurs de Coles pour les constantes $\kappa = 0.41$, $C = 5.0$, $D = 2.683$ et $\alpha = 1.165$.

1. Esquisser le profil de vitesse et l'évolution de l'épaisseur de la couche limite en fonction de x.
2. Estimer la position x_c où la couche limite devient turbulente.

[1] En réalité, la bateau a aussi une trainée de forme lié au sillage turbulent et une trainée d'onde liée aux vagues produites.

3. Démontrer la relation suivante :

$$\frac{\overline{u}_\tau}{\overline{u}_e} = \sqrt{\frac{C_f}{2}}$$

où C_f est le coefficient de frottement
et $\overline{u}_e$ est la vitesse extérieure.

4. Déduire la relation implicite liant le coefficient de frottement C_f et le nombre de Reynolds Re_δ en calculant $\overline{u}^+$ en $y = \delta$ avec le profil composite de Coles.
5. Calculer les valeurs numériques de a et de b.
6. Démontrer que l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\overline{u}}{\overline{u}_e} \left(1 - \frac{\overline{u}}{\overline{u}_e}\right) dy$$

satisfait l'équation intégrale de von Karman

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\overline{\tau}_w}{\rho \overline{u}_e^2}$$

7. Calculer le rapport θ/δ pour un profil de vitesse simplifié

$$\overline{u}(\eta) = U\eta^{1/n}$$

8. Obtenir l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire $\delta(x)$ pour ce profil de vitesse simplifié avec $n = 7$ et en utilisant l'approximation suivante de la relation implicite :

$$C_f = 0.02 \ Re_\delta^{-1/6}$$

9. Résoudre l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire $\delta(x)$ avec $\delta_{x=0} = 0$.
En déduire l'expression de $\delta(x)$, de $C_f(x)$ et de $C_{f,m}(x)$.
10. Calculer la force de trainée et la puissance requise pour le moteur de bateau.
Comparer la valeur avec celle déduite de la formule approchée de White.
11. Finalement, calculer la force de trainée pour une paroi très rugueuse avec $\epsilon = 2$ mm.
Comparer les valeurs obtenues pour un paroi hydrauliquement lisse et une paroi rugueuse.

**Formules approximatives
obtenues sur base de résultats expérimentaux
pour les coefficients de frottement en couche limite turbulente**

	Laminaire	Turbulent Paroi lisse Formules de White	Turbulent Paroi rugueuse Formules de Schlichting
C_f	$0.664 \left[Re_x\right]^{-0.5}$	$0.455 \left[\log\left(0.060 \ \ Re_x\right)\right]^{-2}$	$\left[2.87 + 1.58 \ \log_{10}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right]^{-2.5}$
$C_{f,m}$	$1.328 \left[Re_x\right]^{-0.5}$	$0.523 \left[\log\left(0.060 \ \ Re_x\right)\right]^{-2}$	$\left[1.89 + 1.62 \ \log_{10}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right]^{-2.5}$