Séance 13 - Ecoulement turbulent en conduite

24

1. Calculer la masse volumique de l'air :

   La loi des gaz parfaits approxime très bien le comportement de l'air à faible température. Cette loi implique la connaissance de la constante des gaz parfaits pour l'air (noté R^*_{air}) qui est le ratio entre la constante des gaz parfaits ($R = 8.314\, J/(mole\, K)$) et la masse molaire de l'air ($M_m^{air} = 2.9\, 10^{-2}\, kg/mole$) :

   $$R^*_{air} = \frac{R}{M_m^{air}} = 287.1\, J/(kg\, K)$$

   Connaissant la température moyenne ($T = 20\,°C$) dans la conduite et la pression moyenne ($p = 1\, atm$), on obtient via l'équation des gaz parfaits :

   $$\rho = \frac{p}{R^*_{air}\, T} = 1.204\, kg/m^3$$

   Des pertes de charge ayant lieu dans la conduite, la pression va diminuer et la densité va varier. On suppose toutefois ici une variation relativement faible de cette densité dans les calculs suivants.

2. Calculer le nombre de Reynold Re de l'écoulement. Est-ce que l'écoulement est turbulent ? :

   Les longueur et vitesse caractéristiques sont respectivement le diamiètre D et la vitesse de débit $\bar{u}_m$. Le nombre de Reynolds est donc :

   $$Re_D = \frac{\bar{u}_m\, D}{\nu} = 1.7\, 10^5$$

   connaisant ν pour la valeur de densité calculée ci-avant : $\nu = \mu/\rho = 1.5\, 10^{-5}$. Ce nombre de Reynolds est bien supérieur à la valeur limite ($Re = 2300$) prise dans l'industrie pour séparer écoulement turbulent et lamimaire; l'écoulement est donc bien turbulent.

3. Calculer le nombre de Prandtl du problème :

   Par définition du nombre de Prandtl :

   $$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu\, c_p}{k} = 0.7$$

4. Est-ce que la dissipation visqueuse peut être négligée dans ce problème ? :

   La dissipation visqueuse est négligeable dans l'équation d'énergie par rapport au terme diffusif de température si le produit Eckert et Prandtl est nettement inférieur à l'unité. En effet, dans le cas d'un écoulement en conduite, le ratio de l'ordre de grandeur du terme de dissipaton visqueuse sur l'ordre de grandeur du terme diffusif est égal au produit Eckert $\times$ Prandtl. L'Eckert est le ratio de l' énergie cinétique et de l'énergie interne :

   $$Ec = \frac{\bar{u}_m^2}{c_p\left(\bar{T}_m - T_w\right)} = 0.25.$$

   Le produit de ces deux nombres donne : $Ec\, Pr = 0.176$. La dissipation visqueuese est donc faible mais pas totalement négligeable.

5. Est-il légitime de considérer que l'écoulement est incompressible ? :

   Vous verrez l'année prochaine dans le cadre du cours de *Mécanique des fluides 2* les écoulements compressibles. Dans le cadre de ce cours, on apprend à juger si l'approximation incompressible est valable ou non pour différents types d'écoulements. Le critère de validité pour l'approximation incompressible est basé sur la valeur du nombre de Mach. Celui-ci est défini comme étant :

$$M = \frac{\bar{u}_m}{c}$$

où c est la vitesse du son pour le fluide étudié. La vitesse du son est définie comme étant : $c = \sqrt{\gamma\, R^*\, T}$. Utilisant la vitesse de débit et les propriétés de l'air pour le cas considéré ici, on obtient un nombre de Mach $M = 0.14$. On considère l'approximation incompressible valable lorsque $M < 0.3$.

6. Démontrer que $Nu = Re\, Pr\, St = Pe\, St$:

   En partant de la définition du Nusselt (rapport entre le flux de chaleur à la paroi q_w et un flux de chaleur conductif caractéristique) et en développant cette définition, on voit rapidement apparaître les nombres de Stanton, de Reynolds, de Prandtl et de Peclet :

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{\bar{q}_w\, D}{k\, \Delta T} \\ &= \frac{\bar{q}_w}{\rho\, c\, \bar{u}_m\, \Delta T}\, \frac{\rho\, c\, \bar{u}_m\, D}{k} \\ &= \underbrace{\frac{\bar{q}_w}{\rho\, c\, \bar{u}_m\, \Delta T}}_{\text{St}}\, \underbrace{\underbrace{\frac{\mu\, c}{k}}_{Pr}\, \underbrace{\frac{\rho\, \bar{u}_m\, D}{\mu}}_{Re_D}}_{\text{Pe}} \end{aligned}$$

7. Démontrer que $\lambda = 4\, C_f$ en conduite :

   Cette démonstation a été faite lors de la première séance. Pour obtenir cette relation, il faut dans un premier temps relier le gradient de pression ($d\bar{p}/dx$) à la contrainte de cisaillement à la paroi ($\bar{\tau}_w$). Cette relation est obtenue en faisant un bilan de quantité de mouvement (ou de forces) sur un volume de contrôle de longueur Δx :

$$\pi\, R^2\, \Delta p = -2\, \pi\, R\, \Delta x\, \bar{\tau}_w$$

   Après mise en évidence du gradient de pression, on obtient :

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -2 \frac{\tau_w}{R}$$

   Injectant ensuite cette relation dans la définition de λ, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-dp/dx\, D}{1/2 \rho \bar{u}_m^2} \\ &= \frac{2\, \bar{\tau}_w}{R}\, \frac{2\, D}{\rho \bar{u}_m^2} \\ &= 4\, \underbrace{\frac{\bar{\tau}_w}{1/2 \rho u_m^2}}_{C_f} \\ &= 4\, C_f \end{aligned}$$

   et on retrouve finalement la relation à démontrer.

8. Calculer les pertes de charges et le transfert de chaleur dans le cas *hydrauliquement lisse* :

   Le coefficient de pertes de charge est obtenu en résolvant l'équation implicite de Colebrook développée pour les régimes hydrauliquement lisses :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re_D}\, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

Après résolution de cette équation, on obtient : $\lambda = 1.621\,10^{-2}$, ce qui correspond à un gradient de pression $dp/dx = 4.89\,10^{-3}\; bar/m$ et un delta de pression aux bornes de la conduite $\Delta p = 4.89\,10^{-1}\, bar$.

Le Stanton est lui obtenu en utilisant la formule explicite de Petukhov :

$$St = \frac{\lambda}{8}\left(1 + 13\,\left(Pr^{2/3} - 1\right)\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right)^{-1} = 2.31\,10^{-3}$$

, ce qui correspond à $Nu = 2.71\,10^2$ et à un flux de chaleur $\bar{q}_w = 1.39\,10^3\, Watt/m^2$.

9. Calculer les pertes de charges et le transfert de chaleur avec une rugosité $\epsilon = 0.5\, mm$:

   Le coefficient de pertes de charge est obtenu en résolvant l'équation implicite de Colebrook développée pour les régimes hydrauliquement rugueux, c'est-à-dire en rajoutant le terme rugueux :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10}\left(\frac{2.51}{Re_D}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71}\frac{\epsilon}{2\,R}\right)$$

   Après résolution de cette équation, on obtient : $\lambda = 3.82\,10^{-2}$, ce qui correspond à un gradient de pression $dp/dx = 1.15\,10^{-2}\; bar/m$ et un delta de pression aux bornes de la conduite $\Delta p = 1.15\,10^{-1}\, bar$.

   Le Stanton est lui obtenu en utilisant la formule explicite de Petukhov en enlevant le terme "lisse" :

$$St = \frac{\lambda}{8} = 4.78\,10^{-3}$$

   ce qui correspond à $Nu = 5.61\,10^2$ et à un flux de chaleur $\bar{q}_w = 2.88\,10^3\, Watt/m^2$.

   Le passage du régime turbulent permet donc d'augmenter le transfert de chaleur mais augmente aussi les pertes de charge et donc le travail de la pompe en amont du circuit.

10. Comparer les valeurs obtenues avec celles fournies pour un écoulement laminaire (virtuel :-) :

   Le coefficient de pertes de charge est obtenu en utilisant l'équation explicite pour les écoulements laminaires :

$$\lambda = \frac{64}{Re} = 3.84\,10^{-4}$$

   ce qui correspond à un gradient de pression $dp/dx = 1.16\,10^{-4}\; bar/m$ et un delta de pression aux bornes de la conduite $\Delta p = 1.16\,10^{-2}\, bar$.

   Le Stanton est lui obtenu en utilisant l'analogie de Reynolds :

$$St = \frac{C_f}{2\,Pr^{2/3}} = 6.07\,10^{-5}$$

   ce qui correspond à $Nu = 7.12$ et à un flux de chaleur $q_w = 3.66\, Watt/m^2$.

   Un écoulement laminaire virtuel permmettrait donc de diminuer drastiquement les pertes de charge mais diminuerait également fortement le transfert de chaleur.

11. Est-il légitime de négliger les variations des propriétés matérielles de l'air ?

Comme rappelé plus haut, le coefficient de pertes de charge est lié au gradient de pression par la relation:

$$\lambda = -\frac{d\bar{p}}{dx}\frac{1}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}_m^2}D$$

Pour déterminer si les variations des propriétés matérielles de l'air sont négligeables, on peut calculer la variation de pression subie par l'air entre l'entrée et la sortie de la conduite et ainsi en déduire l'influence sur sa masse volumique (calculée à la question 1). On a donc:

$$\begin{aligned}
-\frac{d\bar{p}}{dx} &= \frac{\lambda}{D}\frac{1}{2}\rho\bar{u}_m^2 \\
\frac{\Delta p}{L} &= \frac{\lambda}{D}\frac{1}{2}\rho\bar{u}_m^2 \\
\Delta p &= \frac{L}{D}\lambda\frac{1}{2}\rho\bar{u}_m^2
\end{aligned}$$

ce qui donne $\Delta p = 0.049$ *bar* dans le cas hydrauliquement lisse et $\Delta p = 0.159$ *bar* dans le cas hydrauliquement rugueux pour une conduite longue de 10m.
On remarque ainsi que, si la température est supposée constante et pour une telle variation de pression, la masse volumique de l'air variera d'un facteur 2 entre les deux extremités de la conduite.

12. Dans la zone dite proche paroi, obtenir le profil universel de température $\bar{T}^+$ dans les cas *hydrauliquement lisse* et *rugueux* en considérant un nombre de Prandtl turbulent égal à l'unité ($Pr_t = \nu_t/\alpha_t \simeq 1$).
En supposant les profils de vitesse et de température établis et en négligeant la dissipation visqueuse, la conservation de l'énergie devient:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left((k+k_t)\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Dans le cas hydrauliquement lisse, on aura la présence des zones I, II et III-a, contrairement au cas hydrauliquement rugueux pour lequel les zones I et II n'existent pas. L'écoulement ne présente donc pas de sous-couche laminaire dans le cas hydrauliquement rugueux.

– *Hydrauliquement lisse*
  * zone I $\rightarrow \alpha >> \alpha_t$

$$\begin{aligned}
\bar{q} = -k\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} &= \bar{q}_w \\
-\frac{\mu c}{Pr}\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} &= \bar{q}_w \\
-\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} &= Pr\frac{\bar{q}_w}{\mu c} \\
&= Pr\frac{\bar{q}_w}{\rho c\bar{u}_\tau}\frac{\bar{u}_\tau}{\nu}
\end{aligned}$$

Par intégration, on obtient:

$$\bar{T} - \bar{T}_w = Pr\frac{\bar{q}_w}{\rho c\bar{u}_\tau}\frac{y\bar{u}_\tau}{\nu} \tag{1}$$

On définit $\bar{T}_\tau$ et $\bar{T}^+$ respectivement comme:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_\tau &= \frac{\bar{q}_w}{\rho c\bar{u}_\tau} \\
\bar{T}^+ &= \frac{\bar{T}_w - \bar{T}}{\bar{T}_\tau}
\end{aligned}$$

Avec ces definitions, l'equation (1) devient:

$$\bar{T}^+ = Pr\, y^+$$

ce qui donne le profil universel de température pour la zone I.

∗ zone III-a → $\alpha << \alpha_t$

$$\bar{q}^t = -k_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{q}_w \quad (2)$$

$$-\frac{\mu_t c}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \bar{q}_w \quad (3)$$

$$-\nu_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = Pr_t \frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_\tau} \bar{u}_\tau \quad (4)$$

$$= Pr_t\, \bar{T}_\tau\, \bar{u}_\tau \quad (5)$$

En utilisant le modèle de fermeture effective de turbulence $\nu_t = \kappa y \bar{u}_\tau$, l'équation (5) donne finalement:

$$-\kappa y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = Pr_t \bar{T}_\tau$$

$$-\frac{\nu}{\bar{u}_\tau} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{Pr_t}{\kappa y} \bar{T}_\tau \frac{\nu}{\bar{u}_\tau}$$

$$\frac{\bar{T}_w - \bar{T}}{\bar{T}_\tau} = \bar{T}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \log(y^+) + A(Pr)$$

ce qui donne le profil universel de température pour la zone III-a.

– *Hydrauliquement rugueux*
  En régime hydrauliquement rugueux, il n'y a pas de zone I ni de zone II. Le profil de température est donc donné par:

$$\bar{T}^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \log(\frac{y}{\epsilon}) + A(Pr_t)$$

13. Avec *python*, tracer les approximations des profils de vitesse $\bar{u}^+$ et de température $\bar{T}^+$ en fonction de y^+ dans les cas *hydrauliquement lisse* et *rugueux* :

14. Finalement, calculer le coefficient de transfert thermique $h = \dfrac{\bar{q}_w}{(\bar{T}_m - \bar{T}_w)}$ dans le cas *hydrauliquement lisse.*
    Le nombre de Stanton, calculé précedemment, est défini par:

$$St = \frac{\bar{q}_w}{\rho c \bar{u}_m (\bar{T}_m - \bar{T}_w)}$$

On en déduit ainsi facilement une expression pour le coefficient de transfert thermique en fonction du nombre de Stanton:

$$h = St\, \rho c \bar{u}_m$$

Comme calculés aux questions 1 et 8 respectivement, la masse volumique de l'air vaut $\rho = 1.204$ kg/m^3 et le nombre de Stanton vaut $St = 2,31.10^{-3}$. D'après l'énoncé, la vitesse moyenne vaut $u_m = 50$ m/s. Ainsi, on obtient, pour le coefficient de transfert thermique, $h = 2.78$ $W/(m^2K)$