Séance 2

Freinage d'un bolide

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + r$$

$$\mathbf{q} = -k\ \nabla T$$

6 On se propose d'estimer la température atteinte au point de contact entre des plaquettes de frein en carbone et des disques en acier inox, lors d'un freinage brutal effectué en $t = 0$. Les plaquettes et les disques sont supposés suffisamment grands par rapport à leur épaisseur afin de pouvoir négliger tous les effets de bord. En d'autres mots, on suppose que le problème n'a qu'une dimension spatiale perpendiculaire à l'interface plaquette-disque.

Considérons, tout d'abord, le cas du disque. Nous allons donc considérer un milieu semi-infini de température uniforme $T_e = 0^0C$ qui est brutalement soumis à un flux de chaleur constant $q\ Wm^{-2}$ pendant la durée du freinage, sur la face $x = 0$. La distribution de température dans l'axe du disque satisfait la relation suivante :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

où α est un paramètre matériel de l'acier inox. Le problème est évidemment totalement semblable pour la plaquette. Lorsque le besoin s'en fera sentir, nous distinguerons α_d et α_p, ainsi qu'un q_d et q_p respectivement. Notre objectif final est d'estimer la température atteinte à l'interface à la fin du freinage et de la comparer avec les températures limites d'utilisation de l'acier inox et du carbone.

1. Effectuer un dessin schématique du problème en esquissant le profil de température au sein des plaquettes et des disques à plusieurs temps distincts.
2. Définir et donner les unités du symbole α.
3. Donner les conditions aux limites nécessaires pour déterminer $T(x,t)$.
4. Trouver l'équation différentielle ordinaire que satisfait la fonction f :

$$T(x,t) - T_e = \underbrace{\frac{q\sqrt{4\alpha t}}{k\sqrt{\pi}}}_{T_*(t)}\ f(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}_{\eta})$$

où η est une variable de similitude et $T_*(t)$ une température caractéristique à un instant t.

5. Démontrer que la fonction f est de la forme suivante

$$f(\eta) = A\ \exp(-\eta^2) + B\ \eta + C\ \eta\ \mathrm{erf}(\eta)$$

et trouver les valeurs des constantes A, B et C en termes de α et q.

A propos de la fonction erf(x)

$$\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-s^2) ds.$$

$$\mathrm{erf}(0) = 0$$
$$\lim_{\eta\to\infty} \mathrm{erf}(\eta) = 1$$

6. Estimer la durée du freinage t_f, si nous considérons que la vitesse décroît de 360 Km/h à 180 Km/h sur une distance de 100 m. La masse totale de la voiture (y compris le pilote) est de 480 kg et la décélération est constante.
7. Donner un ordre de grandeur de la décélération subie par le pilote, mesurée comme un multiple de l'accélération de la gravité.
8. En supposant que la totalité de l'énergie cinétique est totalement convertie en énergie thermique par frottement sur les deux plaquettes de frein des quatre roues, estimer[1] la valeur numérique (avec des unités !) de $q_d + q_p$. La surface de contact de chaque plaquette de frein est de 50 cm^2.
9. Démontrer que la température au point de contact peut s'écrire sous la forme

$$T(0,t) = T_e + 2q_d\sqrt{\frac{t}{k_d\rho_d c_d\pi}} = T_e + 2q_p\sqrt{\frac{t}{k_p\rho_p c_p\pi}}$$

10. Calculer le rapport $\dfrac{q_d}{q_p}$
11. Calculer la valeur de $T(0,t_f)$ et comparer cette valeur aux valeurs limites d'utilisation $T_{lim,d}$ de l'acier et $T_{lim,p}$ du carbone.

Valeurs numériques

k_d	20.0	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$
c_d	500.0	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
ρ_d	8100.0	$kg\ m^{-3}$
$T_{lim,d}$	1400.0	^0C
k_p	60.0	$W\ m^{-1}\ K^{-1}$
c_p	1350.0	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
ρ_p	2250.0	$kg\ m^{-3}$
$T_{lim,p}$	2000.0	^0C

[1] Les étudiants astucieux remarqueront que supposer une puissance dissipée constante et une décélération constante sont des hypothèses incompatibles :-) C'est pourquoi, on estimera le flux de chaleur comme la moyenne temporelle du flux de chaleur pendant la totalité du freinage :-)