Séance 6

Couches limites laminaires

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\,\frac{dp_e}{dx} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

12 Nous souhaitons utiliser les équations de la couche limite pour calculer les coefficients de frottement global d'une plaque de longueur L, plongé dans un écoulement d'eau à température ambiante. On suppose que la vitesse $u_e = U$ loin de la plaque est constante.

1. Quelles sont les hypothèses requises pour utiliser ces équations ?
2. Les inconnues du système d'équations ci-dessus sont les deux composantes de la vitesse.
   Ecrire les conditions aux limites qu'il convient d'appliquer à ces deux composantes de vitesse.
3. On résout ce problème avec les équations de la couche limite en introduisant la variable de similitude $\eta(x,y)$ dans l'expression de la fonction de courant :

   $$\psi(x,y) = U\;\delta(x)\;f(\eta(x,y)) \qquad\qquad \eta(x,y) = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\sqrt{\dfrac{\nu x}{U}}}$$

   Donner la forme de l'équation différentielle ordinaire[1] et les conditions aux limites que doit satisfaire la fonction $f(\eta)$.
4. Ecrire un programme `python` pour résoudre numérique le problème de Blasius
   par la méthode du tir et de la méthode de Heun.
5. En déduire une expression des coefficients de frottement local et global
   en sachant que $f''(0) = 0.332$.
6. Donner l'ordre de grandeur de la valeur de la viscosité cinématique de l'eau à température ambiante avec les unités !
7. Calculer le coefficient de frottement global pour $L = 10$ m, $U = 1$ m/s et la viscosité cinématique de l'eau à température ambiante avec l'expression que vous venez d'obtenir.
8. Quel est la pertinence de la valeur obtenue ?
   En d'autres mots, les hypothèses sont-elles satisfaites ?

[1] Attention, ce n'est pas exactement le changement de variable des notes de cours :-) Vous devez donc obtenir une équation différentielle ordinaire légèrement différente que celle qui se trouve dans les notes de cours!

13 Une feuille de plastique est extrudée à une vitesse constante U au départ d'une filière dans de l'air ambiant stagnant (ρ, ν constants et $u_e = 0$). L'extrusion des feuilles de plastique se fait le long de l'axe x et la sortie de filière se trouve en $x = 0$.

Le long de cette feuille, l'air est mis en mouvement et deux couches limites laminaires identiques (au dessus et en dessous de la feuille de plastique) se forment à partir de $x = 0$. Pour chaque valeur de x, on définit une région d'une épaisseur effective $\delta(x)$ au dessus de laquelle, la vitesse est considérée comme nulle. Pour définir cette région de manière plus rigoureuse, on va imposer que les profils de vitesse dans cette couche limite puissent être vus comme semblables et écrire :

$$u(x, y) = U\ f(\eta(x, y)) \qquad\qquad \eta(x, y) = \frac{y}{\delta(x)}$$

1. Réaliser un dessin du problème.
   Esquisser l'évolution du profil de vitesse et de la couche limite le long de l'axe x.
2. Donner les conditions aux limites à imposer à la fonction $u(x, y)$.
3. Démontrer à partir des équations de Prandtl que l'épaisseur de quantité de mouvement

   $$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(\frac{u_e}{U} - \frac{u}{U}\right) dy$$

   satisfait l'équation suivante :

   $$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2},$$

4. Désormais[2], nous allons supposer que le profil de vitesse peut être approché par un polynôme du second degré en écrivant $f(\eta) = a + b\eta + c\eta^2$. Donner les paramètres a, b et c afin que les conditions frontières soient satisfaites et que la tension de cisaillement soit nulle en $y = \delta$.
5. Calculer le rapport θ/δ.
6. Démontrer la relation suivante $\tau_w = \dfrac{2\mu U}{5\theta}$.
7. Ecrire l'équation différentielle que doit satisfaire θ^2 et la résoudre avec $\theta|_{x=0} = 0$.
   En déduire l'expression de $\theta(x)$ et de $\delta(x)$.
8. Calculer la constante d dans l'expression du coefficient de frottement local

   $$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{\sqrt{\dfrac{Ux}{\nu}}}$$

   et le comparer avec le résultat exact $d = -0.8875$.

[2] En d'autres mots et pour éviter toute ambiguïté, nous allons donc considérer ce profil de vitesse polynomial pour toutes les sous-questions qui suivent. Il faut résoudre ces questions successivement car on utilise systématiquement le résultat de la sous-question précédente. Les sous-questions 6 et 8 permettent de vérifier vos calculs en cours de route.