Séance 7

Anouk, Arthur, David, Insaf & Philippe

March 19, 2020

1. Ecrire les équations de la couche limite laminaire, déduire ensuite ce problème aux conditions aux limites en utilisant les hypothèses de l'énoncé.

On part des équations de Prandtl pour la couche limite (cf. Section 4.2 du syllabus):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \tag{1}$$

On analyse l'écoulement pour des valeurs de $x \gg L$, c'est-à-dire quand la couche limite est développée. Il n'y a donc pas de variation dans la direction horizontale, ce qui implique $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (l'écoulement est établi). De plus, la pression extérieure est constante et vaut p_0 (ses dérivées sont donc nulles). Les équations deviennent donc

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dy} = 0 \\ v\dfrac{du}{dy} = \nu\dfrac{d^2 u}{dy^2} \end{cases} \tag{2}$$

La première ligne de l'équation 2 nous indique que la composante verticale de la vitesse ne varie pas dans la direction verticale. La composante verticale du champs de vitesse est donc constante, et est déterminée par la condition limite sur la plaque, en $y = 0$. Nous la noterons $-v_0$ (elle est négative car la vitesse verticale est dirigée vers le bas, comme montré sur le dessin). L'équation devient donc

$$-v_0\frac{du}{dy} = \nu\frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Les conditions limites correspondent à une couche limite : la vitesse horizontale est nulle à la paroi et vaut U_∞ loin de cette dernière. L'équation à résoudre et les conditions limites sont donc:

$$
\begin{cases}
-v_0 \dfrac{du}{dy} = \nu \dfrac{d^2u}{dy^2} \\
u(y=0) = 0 \\
u(y \to \infty) = U_\infty
\end{cases}
\tag{3}
$$

2. Obtenir l'expression du profil de vitesse u(y).

On obtient le profil de vitesse en résolvant l'équation différentielle obtenue (Eq. 3). Le polynôme caractéristique associé à cette équation est $-v_0\lambda = \nu\lambda^2$, soit $\lambda\left(v\lambda + v_0\right) = 0$. On calcule facilement les deux racines et on obtient

$$u(y) = Ae^{-\frac{v_0}{\nu}y} + B.$$

Les conditions limites sont

$$
\begin{cases}
u(0) = A + B = 0 \\
u(y \to \infty) = B = U_\infty
\end{cases}
\tag{4}
$$

Le champ de vitesse loin du bord d'attaque s'écrit alors :

$$u(y) = U_\infty \left(1 - e^{-\frac{v_0}{\nu}y}\right).$$

3. Calculer l'épaisseur constante de déplacement δ_*.

L'épaisseur de déplacement est donnée par

$$\delta_* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_\infty}\right) \,\mathrm{d}y.$$

En utilisant l'équation du profil de vitesse horizontale calculé ci-dessus, on obtient

$$\delta_* = \int_0^\infty e^{-\frac{v_0}{\nu}y} \,\mathrm{d}y = \frac{\nu}{v_0}$$

4. Quel est le sens physique ou géométrique du concept d'épaisseur de déplacement ?

L'épaisseur de déplacement est la distance à la paroi telle que le débit (donné par $\int_0^\infty u(y)\,\mathrm{d}y$) du profil de vitesse incluant la couche limite soit le même que le débit d'un profil sans couche limite mais dont la parois a été déplacée de δ_* (cf. page 128 du syllabus).

5. Calculer la contrainte de cisaillement τ_w exercée par le fluide sur la plaque.

La contrainte de cisaillement à la paroi est donnée par $\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$. En utilisant le profil de vitesse horizontale calculé à la question 2, on obtient

$$\tau_w = \rho U_\infty v_0.$$

6. Définir le coefficient de frottement C_f et obtenir la valeur numérique pour ce problème.
Le coefficient de frottement est donné par

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{2v_0}{U_\infty}.$$

On observe bien que l'on peut augmenter le frottement exercé par la couche limite sur la plaque en augmentant la vitesse d'aspiration v_0.

7. Obtenir l'évolution de l'ordre de grandeur de la couche limite $\delta(x)$ en fonction de x, μ, ρ et U_∞ lorsque $0 < x < L$. Il s'agit du même développement que celui fait pour obtenir les équations de la couche limite !
Les termes de gauche et de droite de l'équation différentielle (Eq. 1) sont du même ordre de grandeur. On a donc $v_0 \frac{U_\infty}{\delta} = \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$, ce qui peut se réécrire $\delta = \frac{\nu}{v_0}$. On nous demande décrire δ en fonction de x, μ, ρ et U_∞. Il faut donc exprimer v_0 en fonction de ces données. Pour ce faire, on utilise l'équation de continuité. Comme nous nous trouvons en $0 < x < L$, il n'est pas possible de négliger $\frac{\partial u}{\partial x}$. L'analyse des ordres de grandeur de l'équation de continuité nous donne donc

$$\mathcal{O}\left(\frac{U_\infty}{x}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{v_0}{\delta}\right),$$

ce qui permet d'écrire l'ordre de grandeur d'évolution de l'épaisseur de couche limite

$$\delta = \frac{\nu}{v_0} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}.$$

8. Estimer ensuite la valeur de L en termes de ρ, μ, V_0 et U_∞.
La couche limite croît depuis le bord d'attaque (en $x = 0$) jusqu'à une longueur L, à partir de laquelle elle est modélisée avec une épaisseur constante correspondant à l'épaisseur de déplacement δ_* (voir schéma !). On peut donc égaler l'expression de la couche limite $\delta(x)$ évaluée en L avec l'expression de δ_* obtenue précédemment :

$$\delta(L) = \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} = \delta_* = \frac{\nu}{v_0},$$

et on obtient la distance de raccord

$$L = \frac{\nu U_\infty}{v_0^2}.$$

Quand aucune aspiration n'est imposée, la longueur de raccord tend vers l'infini : cela correspond à la couche limite avec paroi imperméable, où la couche limite croît indéfiniment selon $\sqrt{x}$ (ou plutôt jusqu'au point de transition, où la couche limite devient turbulente). On observe qu'augmenter la vitesse d'aspiration permet de rapprocher le point de raccord L du bord d'attaque.

9. Démontrer l'équation de Bernouilli pour un écoulement bidimensionnel stationnaire irrotationnel. On s'intéresse ici à un écoulement bidimensionnel stationnaire irrotationnel dont les équations sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - g \end{cases} \tag{5}$$

Même si le fluide a une viscosité (par opposition à un fluide idéal, non-visqueux), l'écoulement est irrotationnel et présente des régions où le champ de vitesse est presque uniforme. En particulier, loin des parois, le cisaillement est faible/négligeable, et on peut considérer l'écoulement comme non-visqueux. Formellement, on a l'identité suivante sur un champ de vecteurs $\mathbf{F}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \tag{6}$$

Supposons que le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ corresponde au champ de vitesse $\mathbf{u}$, on obtient dès lors pour cette identité

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times \omega = -\nabla^2 \mathbf{u} \tag{7}$$

où le terme $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$ est nul puisque l'écoulement est incompressible. La diffusion du champ de vitesse est donc directement liée au champ de vorticité. L'écoulement étant supposé irrotationnel ($\omega = 0$), les termes de diffusion peuvent donc être supprimés et on obtient alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - g \end{cases} \tag{8}$$

L'écoulement étant irrotationnel ($\nabla \times \underline{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$), on peut aussi réécrire les termes $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ dans l'équation de quantité de mouvement et on obtient alors

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - g \end{cases} \tag{9}$$

On peut réécrire ces deux équations sous forme dite conservative, où toutes les variables apparaissent à l'intérieur des opérateurs de dérivées. On a alors :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}(u^2) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}(v^2) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}(u^2) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}(v^2) = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial y}(-gy) \end{cases} \tag{10}$$

où on a exprimé la force de volume $\rho\mathbf{g}$ comme le gradient d'un potentiel (la gravité est une force conservative !) :

$$\rho\mathbf{g} = \nabla(\rho\mathbf{g}y) = \frac{\partial}{\partial y}(-\rho g y\mathbf{j}).$$

On peut maintenant écrire toutes les quantités dans une même dérivée :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2+v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{u^2+v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + gy\right) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Ces composantes correspondent au gradient :

$$\nabla\left(\frac{u^2+v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy\right) = 0,$$

ce qui implique que la quantité scalaire à l'intérieur soit constante, soit

$$\frac{u^2+v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = constante.$$

Cette grandeur est une mesure de l'énergie mécanique contenue dans l'écoulement, sous les trois formes de (la norme de la) vitesse, pression et altitude. Cela correspond à une somme d'énergie cinétique, de pression et potentielle, qui est conservée dans l'écoulement, puisque celui-ci est non visqueux (il ne dissipe pas d'énergie !). Comme en mécanique du point conservative, l'énergie mécanique du système est constante : c'est bien ce que signifie le théorème de Bernoulli.

Informations complémentaires et dont la lecture est facultative (-: :

La mesure d'énergie entre parenthèse est souvent divisée par g, et est alors appelée la *charge* H, exprimée en mètres :

$$H = \frac{u^2+v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + y.$$

Elle intervient principalement en hydraulique et dans l'étude des pertes de charges par friction pour des écoulements en conduite.

Pour un écoulement rotationnel de fluide **non-visqueux** (équations d'Euler, le terme $\nu\nabla^2\mathbf{u}$ disparaît), le théorème de Bernoulli reste valable, mais l'énergie mécanique n'est conservée que sur *une ligne de courant*. Il n'y a pas une seule constante pour l'écoulement au complet, mais plutôt une constante pour chaque ligne de courant. En effet, on commence par considérer une différentielle de déplacement le long d'une ligne de courant $\mathbf{ds} = (\mathbf{dx}, \mathbf{dy})$ (parallèle à $\mathbf{u}$ par définition d'une ligne de courant). On projette ensuite l'équation de quantité de mouvement (sans le terme visqueux) sur le petit déplacement $\mathbf{ds}$:

$$\Big((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big)\cdot\mathbf{ds} = \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla(\mathbf{g}y)\right)\cdot\mathbf{ds}.$$

Le terme d'inertie peut s'exprimer comme la somme d'un terme de changement de norme et un terme de changement de direction, à partir de l'identité

$$\nabla\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{2}\right) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\omega = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \omega\times\mathbf{u},$$

soit

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \underbrace{\nabla\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{2}\right)}_{\text{Changement de norme}} + \underbrace{\omega\times\mathbf{u}}_{\text{Changement de direction}}$$

L'équation projetée (multipliée scalairement) devient :

$$\left(\nabla\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{2}\right) + \omega\times\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{ds} = \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla(\mathbf{g}y)\right)\cdot\mathbf{ds}$$

Le vecteur $(\omega\times\mathbf{u})$ est perpendiculaire aux deux vecteurs dont on prend le produit vectoriel, en particulier au vecteur vitesse $\mathbf{u}$. Comme $\mathbf{ds}$ est aligné avec le champ de vitesse, le produit scalaire $(\omega\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{ds}$ est nul, car produit de deux vecteurs perpendiculaires. Il reste alors

$$\nabla\left(\frac{u^2+v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy\right)\cdot\mathbf{ds} = 0,$$

ce qui signifie que le gradient d'énergie est normal à la ligne de courant : la ligne de courant est donc une courbe d'isovaleur d'énergie.