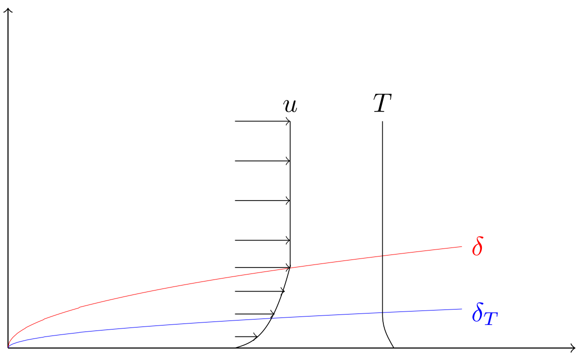
Séance 8 - Couches limites thermiques

15 1. Faire un dessin du problème: la plaque est définie par $y = 0$ et $0 < x < L$



2. On obtient l'ordre de grandeur de l'épaisseur de couche limite de vitesse avec un développement identique à celui du cours. Les équations pour la couche limite sont les équations de Prandtl :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{dp_e}{dx} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

À l'extérieur de la couche limite, l'écoulement est stationnaire, bidimensionnel et irrotationnel : il est régi par les équations d'Euler, soit

$$\rho u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{dp_e}{dx}.$$

Comme la vitesse extérieure $u_e(x) = U$ est constante, on a $dp_e/dx = 0$. La couche limite est définie comme le lieu de l'écoulement où les termes d'inertie sont du même ordre de grandeur que les termes visqueux : on impose alors que les termes de gauche et de droite dans (1) soient du même ordre de grandeur :

$$\begin{aligned} \rho U \frac{U}{x} &= \mu \frac{U}{\delta^2} \\ &\downarrow \\ \delta(x) &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \end{aligned}$$

Comme ce développement ne donne que l'ordre de grandeur pour δ, on peut se permettre de la définir à une constante $\mathcal{O}(1)$ près : on peut ajouter le fameux 2 dans la définition, qui n'est là que pour simplifier l'équation adimensionnelle qui va suivre :

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}}$$

3. Le nombre de Prandtl est défini comme le ratio des diffusivités d'un fluide :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha},$$

où α est la diffusivité thermique et ν la viscosité cinématique, toutes les deux en m^2/s. On peut évaluer l'épaisseur de la couche limite thermique à partir de l'équation d'énergie :

$$\delta_T(x) = \sqrt{\frac{\alpha x}{U}}$$

En prenant la première expression pour $\delta(x)$, le Pr exprime le ratio des épaisseurs de couche limite :

$$Pr = \left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2, \quad \text{soit} \quad \frac{\delta}{\delta_T} = Pr^{\frac{1}{2}}.$$

Comme la viscosité cinématique d'un fluide mesure sa tendance à diffuser la vitesse et que la diffusivité thermique mesure sa tendance à diffuser la température, il est assez intuitif que le ratio de ces propriétés mesure le rapport des épaisseurs de couche limite, que l'on peut voir comme des longueurs caractéristiques de diffusion.

Le nombre d'Eckert s'obtient à partir de l'équation d'énergie, en mesurant l'influence relative de la dissipation visqueuse par rapport à la conduction thermique :

$$\begin{aligned}
Ec &= \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \Big/ \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
&= \frac{\nu}{c}\frac{U^2}{\delta^2} \Big/ \alpha\frac{\Delta T}{\delta_T^2} \\
&= \underbrace{\frac{\nu}{\alpha}}_{Pr}\,\frac{U^2}{c\Delta T}\,\underbrace{\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2}_{1/Pr} \\
&= \frac{U^2}{c\Delta T}
\end{aligned}$$

Comme $Ec \ll 1$, on peut raisonnablement négliger la dissipation visqueuse dans le problème !

4. L'eau à 20°C est un bon candidat ! Deux autres Pr à retenir : les gaz ont un $Pr \simeq 0.7$, et les métaux liquides sont un exemple de fluide où la diffusion de la température est beaucoup plus rapide que la diffusion de vitesse : ils ont donc $Pr \ll 1$.

5. En tenant compte de la remarque sur le nombre d'Eckert, on peut négliger le terme de dissipation visqueuse et écrire

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{2}$$

6. On a la relation suivante[1] qui lie θ à la température T :

$$T(x,y) = (T_w - T_e)\,\theta\big(\eta(x,y)\big) + T_e.$$

[1]Ici, on définit θ comme l'écart de température adimensionnel par rapport à la température de l'écoulement T_e, alors qu'il est définit dans les transparents comme l'écart par rapport à la température de la plaque T_w : c'est pas bien grave.

On en déduit une expression pour les différents termes de (2) :

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial T}{\partial x} &= Uf'(\eta)(T_w - T_e)\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\theta'(\eta) \\
&= Uf'(\eta)(T_w - T_e)\left(-\frac{y\delta'}{\delta^2}\right)\theta'(\eta) \\
&= -Uf'(\eta)(T_w - T_e)\,\eta\,\frac{\delta'}{\delta}\,\theta'(\eta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v\frac{\partial T}{\partial y} &= U\delta'\big(\eta f'(\eta) - f(\eta)\big)(T_w - T_e)\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\,\theta' \\
&= U\delta'\big(\eta f'(\eta) - f(\eta)\big)(T_w - T_e)\,\frac{1}{\delta}\,\theta'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= (T_w - T_e)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\theta'' \\
&= (T_w - T_e)\,\frac{1}{\delta^2}\,\theta''
\end{aligned}$$

On réinjecte ensuite dans (2) :

$$\begin{aligned}
-U\,\frac{\delta'}{\delta}\,f(\eta)\,\theta' &= \alpha\,\frac{1}{\delta^2}\,\theta'' \\
&\downarrow \\
\alpha\frac{1}{\delta}\theta'' + U\delta' f\theta' &= 0
\end{aligned}$$

On peut encore simplifier un peu plus cette expression : comme $\delta(x) = \sqrt{2\nu x/U}$, on peut alors aussi obtenir une expression pour $\delta'(x)$,

$$\delta'(x) = \sqrt{\frac{\nu}{2Ux}},$$

et on peut faire apparaître le nombre de Prandtl avec $\alpha = \nu/Pr$, soit

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{Pr}\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}\theta'' + U\sqrt{\frac{\nu}{2Ux}}f\theta' &= 0 \\
&\downarrow \\
\theta'' + Prf\theta' &= 0,
\end{aligned}$$

qui est l'équation différentielle ordinaire satisfaite par le profil adimensionnel θ.

Il faut maintenant établir les conditions aux limites que doit respecter θ : la température à la plaque est imposée, et on a $T(x,0) = T_w$ d'une part. D'autre part, loin de la plaque, on retrouve la température de l'écoulement non perturbé :

$$\lim_{y\to+\infty} T(x,y) = T_e.$$

Comme $T(x,y) = (T_w - T_e)\,\theta(\eta) + T_e$, on adapte ces conditions limites et le problème pour θ s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
\theta'' + Prf\theta' &= 0 \\
\theta(0) &= 1 \\
\lim_{\eta\to+\infty}\theta(\eta) &= 0
\end{aligned}$$

7. Le flux de chaleur s'obtient directement :

$$q_w(x) = -k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -k\left(T_w - T_e\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{d\theta}{d\eta}\bigg|_{\eta=0} = -\frac{k(T_w - T_e)}{\delta(x)}\theta'(\eta)\bigg|_{\eta=0}$$

8. W/m^2

9. Le nombre de Stanton est un flux de chaleur à la paroi adimensionnalisé par un flux de chaleur *convectif* caractéristique dans l'écoulement :

$$St = \frac{q_w}{\rho c U(T_w - T_e)}.$$

Le flux convectif caractéristique auquel on compare q_w est bien $\rho c U \Delta T$ et non $\rho c U \Delta T/L$, qui correspond au terme de transport (*c.-à-d.* la convection) dans l'équation d'énergie. En effet, comme l'équation d'énergie s'écrit

$$\rho c(\mathbf{u}\cdot\nabla)T = -\nabla\cdot\mathbf{q} + 2\mu\mathbf{d}:\mathbf{d},$$

on compare la divergence du flux de chaleur à la paroi avec le terme convectif, soit

$$\frac{\nabla\cdot\mathbf{q}}{\rho c(\mathbf{u}\cdot\nabla)T} = \frac{q_w/L}{\rho c U\Delta T/L} = \frac{q_w}{\rho c U(T_w - T_e)}.$$

Le nombre de Nusselt, rencontré précédemment, est un flux de chaleur à la paroi adimensionnalisé cette fois par un flux *conductif* caractéristique dans l'écoulement :

$$Nu = \frac{q_w}{k(T_w - T_e)/L},$$

avec L une longueur caractéristique de diffusion de température : par exemple δ_T.

10. Un exemple d'implémentation[2] :

```python
import numpy as np

def definitelyNotAFakeFunction(Pr):
    print("Coucou")

definitelyNotAFakeFunction()
```

16

1. On obtient l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite thermique via l'analyse dimensionnelle de l'équation de l'énergie. La couche limite thermique est définie comme le lieu de l?écoulement où les termes convectifs sont du même ordre de grandeur que les termes conductifs. On impose donc que $\rho c u\frac{\partial T}{\partial x}$ soit du même ordre de grandeur que $k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, ce qui donne

$$\rho c U\,\frac{\Delta T}{x} = k\,\frac{\Delta T}{\delta_T^2(x)}$$

$$\downarrow$$

$$\delta_T(x) = \sqrt{\frac{k}{\rho c}\frac{x}{U}} = \sqrt{\frac{\alpha x}{U}}$$

L'analyse dimensionnelle des équations de Prandtl (cf. 15.2) permet d'écrire $\delta(x) = \sqrt{\nu x/U}$: le rapport entre $\delta_T(x)$ et $\delta(x)$ est donc donné par

$$\frac{\delta_T(x)}{\delta(x)} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha x}{U}}}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{Pr}}.$$

2. La dissipation visqueuse est négligeable si $Ec \ll 1$ (cf. 15.3).

3. $Ec = \dfrac{U^2}{c\Delta T} = \dfrac{1}{4\times 10^3 \times 30}$ est bien très petit : la dissipation visqueuse peut être négligée.

[2] En réalité c'est une petite blague.