Séance 8

Couches limites thermiques

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dp_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2
\end{aligned}
$$

15 Considérons la couche limite thermique laminaire d'une plaque plane horizontale de longueur L dont la température est T_w. Le fluide hors de la zone de la couche limite a une température constante $T_e < T_w$ et une vitesse horizontale constante $u_e = U$.

Les composantes de vitesse sont données par les expressions :

$$
u(x,y) = U \; f'(\eta(x,y)) \qquad\qquad v(x,y) = U \; \delta'(x) \; \Big(\eta(x,y) f'(\eta(x,y)) - f(\eta(x,y)) \Big)
$$

où $\eta(x,y) = \dfrac{y}{\delta(x)}$ est la variable de similitude et $f(\eta)$ est la solution du problème de Blasius :

$$
\left\{
\begin{aligned}
f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) &= 0 \\
\\
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 0 \\
\lim_{\eta \to \infty} f'(\eta) &= 1
\end{aligned}
\right.
$$

En outre, on sait que $Pr \approx 7$ et $Ec \ll 1$.

1. Faire un dessin du problème : la plaque est définie par $y = 0$ et $0 < x < L$.
2. Donner l'expression de la couche limite $\delta(x)$ en termes de x, ρ, μ et $u_e = U$ qu'on utilise ici !
3. Définir les nombres adimensionnels de Prandt (Pr) et d'Eckert (Ec).
   En donner l'interprétation physique pour ce problème particulier.
4. Proposer un fluide pour lequel la valeur de $Pr = 7$ est réaliste.
5. Simplifier adéquatement l'équation d'énergie pour $Pr \approx 7$ et $Ec \ll 1$: justifier !
6. En déduire le problème aux conditions limites que satisfait $\theta(\eta)$ défini par :

$$
\theta(\eta(x,y)) = \frac{T(x,y) - T_e}{T_w - T_e}
$$

7. Donner l'expression du flux de chaleur à la paroi $q_w = -k \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$ en fonction de $\theta'|_{\eta=0}$.
8. Donner les unités de q_w.
9. Proposer deux adimensionnalisations de q_w en termes de nombres de Stanton ou de Nusselt. Donner l'interprétation physique de ces deux adimensionnalisations.
10. Ecrire un programme `python` qui permet d'obtenir les profils de vitesse et de température pour une valeur quelconque du nombre de Prandtl.

Le rapport des couches limites....

En fait, c'est pas vraiment le rapport habituel : $\frac{\delta_T(x)}{\delta(x)} = \sqrt{\frac{1}{Pr}}$

Le démarche basée sur un simple ordre de grandeur des termes de l'équation est un peu trop simpliste, car le développement de la couche limite thermique dépend aussi du développement de la couche limite de vitesse. En d'autres mots, utiliser $u_e = U$ comme ordre de grandeur de vitesse est une sous-estimation si l'épaisseur de la couche de vitesse n'est pas petit par rapport à l'épaisseur de la couche thermique.

Utiliser une racine carrée est pertinent si le nombre de Prandtl et très très très petit. Dans ce cas, l'épaisseur de la couche de vitesse est très très très petite par rapport à l'épaisseur de la couche thermique qui se développe alors principalement dans un champ à vitesse constante $u_e = U$.

Une racine cubique est souvent plus pertinente pour les autres valeurs de Prandtl.
En général, on écrit donc :

$$\frac{\delta_T(x)}{\delta(x)} \approx \frac{1}{Pr^a}$$

Pour $Pr \ll 1$, on observe sur la solution numérique : $a = 0.5$.
Pour $Pr \approx 1$, on observe sur la solution numérique : $a = 0.37 \ldots 38$.
Pour $Pr \geq 100$, on observe sur la solution numérique : $a = 0.33 \ldots 0.34$.

Plus concrètement, on peut négliger la dissipation visqueuse lorsque :

$$Pr^{1-2a}\, Ec \ll 1$$

16 On utilise de l'eau pour refroidir une plaque horizontale maintenue à une température constante: $T_w = 50\,°C$. L'épaisseur caractéristique de la couche limite thermique est notée $\delta_T(x)$ La vitesse de l'eau hors de la couche limite est $u_e = U = 1 m/s$ et sa température est $T_e = 20\,°C$. Pour de telles températures, on peut estimer que le nombre de Prandtl de l'eau est $Pr = 7$.

1. Obtenir par une argumentation physique simple[1] :

$$\delta_T(x) \approx \sqrt{\frac{\alpha\ x}{U}}$$

$$\frac{\delta_T(x)}{\delta(x)} \approx \sqrt{\frac{1}{Pr}}$$

2. En déduire la condition qui permet de considérer que dissipation visqueuse est négligeable.
3. Vérifier que la dissipation visqueuse est ici effectivement tout à fait négligeable.

[1]Tout en gardant à l'esprit la petite note qui précède :-)