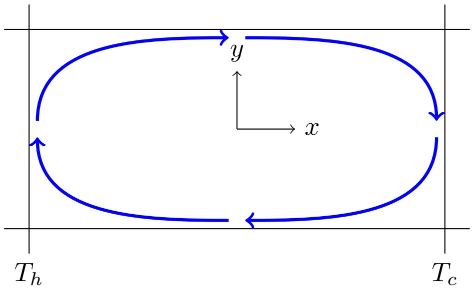
Séance 9 - Convection naturelle

17 1. Ecrire les équations que l'on peut considérer loin des bords, si on néglige la dissipation visqueuse:



Loin des bords :

- écoulement 1D $\mathbf{u} = (u(x, y), 0)$
- écoulement établi: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement se simplifie donc à:

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu \dfrac{d^2 u}{dy^2} & (1) \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \rho\left(1 - \beta\left(T - T_0\right)\right) g & (2) \end{cases}$$

L'équation de la conservation de l'energie s'écrit:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

2. Le profil de températue si on neglige la convection thermique :
En négligeant le terme $u\dfrac{\partial T}{\partial x}$ dans l'Eq. (3), cette dernière se simplifie à:

$$0 = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Des conditions de Neumann homogènes étant supposées d'une part au contact des plans horizontaux (surface isolée thermiquement) et des conditions de dirichlet constantes étant supposées sur les parois verticales, seule une variation linéaire en fonction de x est possible pour la solution de cette équation. Le profil de température se réduit donc à : $T(x) = ax + b$. Considérant nos conditions aux limites sur les faces verticales, $T(-L) = T_h$ et $T(L) = T_c$; on obtient les coefficients a et b:

$$a = \frac{T_c - T_h}{2L} = \frac{-\Delta T}{2L} \quad \text{et} \quad b = \frac{T_c + T_h}{2} = T_0$$

ce qui nous ramène bien à l'expression proposée dans l'énoncé :

$$\frac{T(x) - T_0}{\Delta T} = \frac{-x}{2L}$$

3. Le profil de la pression peut être déterminé à partir de l'Eq. (2) en y remplaçant T par son expression :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho - \rho\beta\frac{\Delta T}{2L}x$$

$$p(x,y) = -\rho y - \frac{\rho\beta\Delta T}{2L}xy + p_0$$

d'où

$$a = -\rho\delta \quad \text{et} \quad b = -\frac{\rho\beta\Delta T}{2}\delta$$

4. La vitesse aux parois est nulle (no slip condition): $u(y=-\delta) = u(y=\delta) = 0$. Considéron un volume de controle de longueur Δx. La variation de la masse de ce volume dans le temps est égal la différence entre le flux massique rentrant et celui sortant :

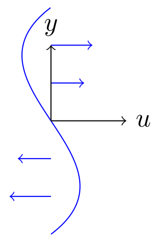
$$\Delta(\rho A dx) = \rho Q(x) - \rho Q(x+\Delta x)$$

Si on fait tendre Δx vers 0 et qu'on dérive temporellement l'expression ci-dessous, on obtient alors la forme local de la conservation de la masse : $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Puisque notre section est constante, on en déduit que $Q = cste$; le débit volumique est donc constant selon x. Selon le shéma on en déduit également que la vitesse est antisymetrique, ce qui implique que $Q = \int_{-\delta}^{\delta} u(y)dy = 0$. Cette condition ne permet néanmoins pas de déterminer U. L'amplitude de ce profil dépend en fait du gradient de pression, comme n'importe quel écoulement interne (et donc des pertes de charges, comme dans un écoulement de Poiseuille). L'obtention de U nécessite donc un retour vers l'Eq. (1). En injectant la forme de $u(y)$ dans cette équation, on obtient (b est le coefficient calculé à la question précédente):

$$0 = -\frac{by}{L\delta} - \frac{6\nu U}{\delta^3}y \implies U = \frac{-\delta^2 b}{6\nu L} = \frac{\rho\beta\Delta T}{12\nu L}\delta^3$$

5. La position des extrémés:

$$\frac{du}{dy} = 0 \implies 1 - 3\frac{y^2}{\delta^2} = 0 \implies y = \pm\frac{\delta}{\sqrt{3}}$$



6. Le nombre de Grashof (Gr) est un nombre adimensionel utilisé pour caractériser la convection libre dans un fluide.

Gr$=\frac{\text{archimède x inertie}}{(\text{visqueuse})^2} = \frac{\rho g\beta\Delta T\,\rho U^2/D}{(\mu U/D^2)^2} = \frac{g\beta\Delta T D^3}{\nu^2}$

avec D la longueur caractéristique considérée. Pour notre cas en prenant $D = 2\delta$ on a :

$$U = Gr\frac{\nu}{L}\frac{1}{96}$$

7. On considère maintenant que le champ de température est influencé par le champs de vitesse (on ne néglige plus l'effet de convection). La contribution du champs de vitesse est représenté par un terme $\tilde{T}(y)$:

$$\frac{T(x,y)-T_0}{\Delta T} = \frac{-x}{2L} + \frac{\tilde{T}(y)}{\Delta T}$$

L'équation de l'énergie (Eq.3) s'écrit alors (pour simplifier les calculs, on va utiliser la température adimensionnalisée $\frac{T(x)-T_0}{\Delta T}$ et une variable adimensionnelle $\eta = \frac{y}{\delta}$):

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T-T0}{\Delta T}\right) = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{T-T0}{\Delta T}\right) + \alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{T-T0}{\Delta T}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T-T0}{\Delta T}\right) = -1/2L \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{T-T0}{\Delta T}\right) = 0$$

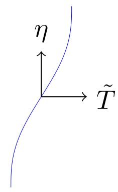
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T0}{\Delta T}\right) = \frac{1}{\Delta T}\frac{d\eta}{dy}\tilde{T}^{'}(\eta) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{T-T0}{\Delta T}\right) = \frac{1}{\Delta T \delta^2}\tilde{T}^{''}(\eta)$$

$$U(\eta-\eta^3)(-1/2L) = \frac{\alpha}{\delta^2 \Delta T}\tilde{T}^{''}(\eta)$$

$$\tilde{T}^{''}(\eta) = -\frac{\Delta T \delta^2}{2L\alpha}U(\eta-\eta^3)$$

Le flux de chaleur vertical étant nul aux parois horizontales, $\tilde{T}^{'}(1) = \tilde{T}^{'}(-1) = 0$. Le profil de vitesse étant anti-symmétrique et centré en y=0, il n'y a pas de convection en y=0, $\tilde{T}(0) = 0$, on a alors:

$$\tilde{T}(\eta) = \frac{\Delta T \delta^2 U}{2L\alpha}\left(\frac{\eta^5}{20} - \frac{\eta^3}{6} + \frac{\eta}{4}\right)$$



8.Calcul du flux de chaleur en $x = 0$: On peut décomposer le flux de chaleur en un flux convectif et un flux conductif.

$$Q = \int_{-\delta}^{\delta} -k\frac{\partial T}{\partial x}dy + \int_{-\delta}^{\delta} \rho c R(\mathbf{u}\cdot n)dy$$

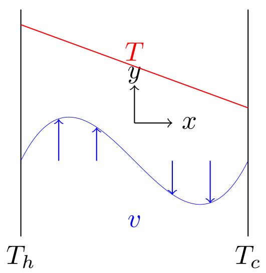
Ce dernier est donné par $\displaystyle\int_S -k\nabla T \cdot n dS$. Sur la tranche verticale la normale est n=(1,0) donc $\nabla T \cdot n = \dfrac{\partial T}{\partial x}$. Le flux convectif est donné par $\displaystyle\int_S \rho c T u dS$.

$$\int_{-\delta}^{\delta} -k\frac{\partial T}{\partial x}dy = \frac{k\Delta T}{2L}\int_{-\delta}^{\delta} dy = \frac{k\Delta T\delta}{L}$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \rho c u T dy = \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \rho c u(\frac{-xT}{2L} + T_0)dy}_{=0} + \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \rho c u\tilde{T}dy}_{\frac{8}{315}\frac{\rho c\delta^3 U^2}{L\alpha}}$$

donc: $\quad Q = \dfrac{k\Delta T\delta}{L} + \dfrac{8}{315}\dfrac{\rho c\delta^3 U^2}{L\alpha}$

18 1. Schéma du problème:



2. Le transfert de chaleur est établi donc $\dfrac{\partial T - T_m}{\partial y} = \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0$. La dissipation visqueuse étant négligeable et la vitesse horizontale étant nulle, l'équation de la conservation de l'energie se simplifie en:

$$0 = k\frac{d^2T}{dx^2} \qquad \Longrightarrow T(x) = ax + b$$

Considérant les conditions aux limites du problème, $T(-\delta) = T_h$ et $T(\delta) = T_c$, on a :

$$T(x) = \frac{T_c - T_h}{2\delta}x + \frac{Tc + T_h}{2} = -\frac{\Delta T}{2\delta}x + T_0$$

3. L'écoulement est purement vertical et établi, donc $u = 0$ et $dv/dy = 0$, et la pression est hydrostatique ($dp/dy = -\rho g$). L,'équation de la conservation de la quantité de mouvement verticale devient donc :

$$0 = \mu\frac{d^2v}{dx^2} - \rho_0 g + \rho_0 g(1 - \beta(T - T_0)) \implies v(x) = \frac{\beta g\Delta T}{2\nu\delta}(\frac{x^3}{6} + ax + b)$$

Considérant les conditions aux limites du problème: $v(-\delta) = v(\delta) = 0$ on a :

$$v(x) = \frac{\beta g \Delta T \delta^2}{12\nu}\left(\left(\frac{x}{\delta}\right)^3 - \frac{x}{\delta}\right)$$

Considérant que la longueur caractéristique est δ, le nombre de Grashof est $Gr = \dfrac{\beta\Delta T g\delta^3}{\nu^2}$. La vitesse peut donc s'écrire $v(x) = Gr\dfrac{\nu}{12\delta}\left(\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^3 - \dfrac{x}{\delta}\right)$

La vitesse est maximale lorsque $dv/dx = 0 \implies x = \pm\dfrac{\delta}{\sqrt{3}}$, avec $V_{max} = Gr\dfrac{\nu}{12\delta}\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

4. La dissipation visqueuse peut être négligée si elle est beaucoup plus petite que le terme diffusif.

$$\frac{\mu}{\rho c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \ll \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

En procédant à une analyse dimensionnelle, on obtient

$$\frac{\mu}{\rho c}\left(\frac{V}{\delta}\right)^2 \ll \alpha\frac{\Delta T}{\delta^2}$$

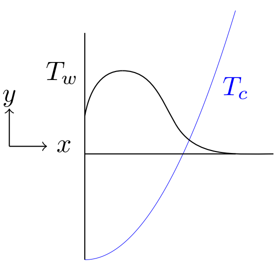
$$\frac{\nu}{\alpha}\frac{V^2}{c\Delta T} \ll 1$$

Il faut donc que Pr.Ec$\ll$ 1pour que la dissipation visqueuse puisse être négligée. La vitesse caractéritique de l'écoulement V n'étant pas connue, elle est calculée en fonction du nombre de Grashof: $V = \dfrac{Gr\nu}{12\delta}$. La condition devient alors

$$\frac{\beta^2 g^2 \Delta T \delta^4}{144\nu c\alpha} \ll 1$$

19

1.



2. $Gr(y) = \dfrac{\beta g \Delta T}{\nu^2} y^3$ et $\dfrac{x}{\delta(y)} = \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$
En combinant ces deux expressions, on trouve

$$\delta(y) = \left(\frac{4\nu^2 y}{\beta g \Delta T}\right)^{0.25}$$

3.On part des équations générales. La pression est hydrostatique et la dissipation visqueuse ainsi que les termes visqueux verticaux (par analyse dimensionnelle vis-à-vis des termes visqueux horizontaux) sont négligés.

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = g\beta(T - T_0) + \nu\dfrac{\partial^2 v}{dx^2} & (4) \\ u\dfrac{\partial T}{\partial x} + v\dfrac{\partial T}{\partial y} = \alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (5) \end{cases}$$

4.On part de la fonction de courant donnée dans l'énoncé:

$$\psi(x, y) = -4\nu(\eta)(0.25Gr(y)^{0.25})$$

Le champs de vitesse peut facilement se calculer à partir de la fonction de courant mais c'est un brin calculatoire. Dans ce correctif, on vous fournit quelques calculs intermédiaires et le résultat final. A vous de faire tout le développement. Les composantes de la vitesse sont $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$. Voici les dérivées nécessaires pour les calculer:

$$\frac{\partial \left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}{\partial y} = \frac{3}{4y}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{y}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\eta}{4y}$$

$$v(x, y) = \frac{4\nu}{y} f'(\eta)\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u(x, y) = \frac{\nu\eta}{y} f'(\eta)\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{3\nu}{y} f(\eta)\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4\nu}{y^2} f''\eta)\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4\nu}{y^3} f'''\eta)\frac{Gr(y)}{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu^2}{y^3} Gr(y)\left(2f'(\eta)f('\eta) - 3f(\eta)f''(\eta)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \Delta T\theta'(\eta)\frac{1}{y}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \Delta T \theta''(\eta) \frac{1}{y^2} \left(\frac{Gr(y)}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\Delta T \theta'(\eta) \frac{\eta}{4y}$$

Les équations deviennent

$$\begin{cases} f'''(\eta) + 3f(\eta)f''(\eta) - 2f'(\eta)f'(\eta) + \theta(\eta) = 0 & (6) \\ \theta''(\eta) + 3Prf(\eta)\theta'(\eta) = 0 & (7) \end{cases}$$

5. Les deux composantes du champs de vitesse sont nulles à la parois et loin de celle-ci. $u(0) = 0$ donne $f(0) = 0$, $v(0) = 0$ donne $f'(0) = 0$ et $u(\infty) = 0$ donne $f'(\infty) = 0$.

La température vaut T_w à la parois et T tend vers une constante loin de celle-ci, ce qui donne $\theta(0) = 1$ (car $T = T_w$) et $\theta(\infty) = 0$ (car $\nabla T = 0$, T étant uniforme loin de la parois)

6. Le système à résoudre numériquement est le suivant

$$\begin{cases} f'''(\eta) + 3f(\eta)f''(\eta) - 2f'(\eta)f'(\eta) + \theta(\eta) = 0 & (8) \\ \theta''(\eta) + 3Prf(\eta)\theta'(\eta) = 0 & (9) \\ f(0) = 0 & (10) \\ f'(0) = 0 & (11) \\ f'(\infty) = 0 & (12) \\ \theta(0) = 1 & (13) \\ \theta(\infty) = 0 & (14) \end{cases}$$

Amusez-vous bien :-)