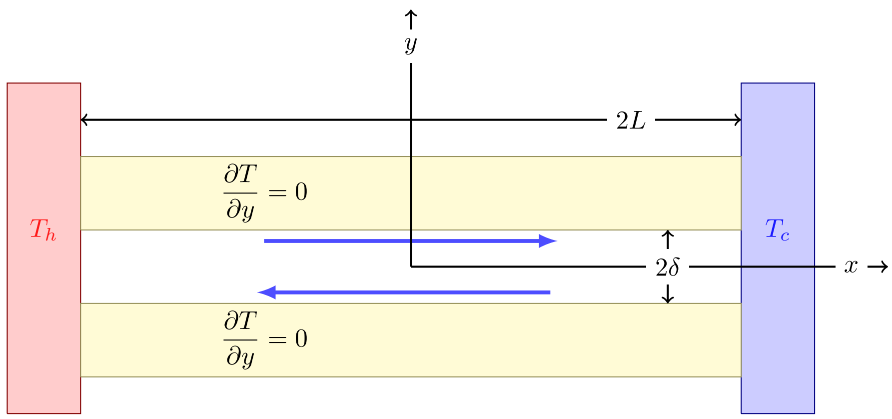
Séance 9

Convection naturelle

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\
&\qquad -\rho g (1 - \beta (T - T_0)) \\
\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}
$$

17 Considérons un écoulement bidimensionnel et stationnaire de fluide entre deux plans horizontaux (en $y = -\delta$ et $y = \delta$) thermiquement isolés. Le fluide colle à ces deux plans solides. En $x = -L$ et en $x = L$, il y a deux parois verticales où la température est maintenue à T_h et $T_c < T_h$. Sous l'effet des conditions aux limites, une cellule de convection apparaît. L'air près de la paroi chaude se dilate légèrement sous l'effet de la chaleur et s'élève naturellement sous l'effet de la force d'Archimède tandis qu'il descend du côté de la paroi froide. La couche de fluide est de faible épaisseur : $L \gg 2\delta$. On définit $\Delta T = T_h - T_c$ et $T_0 = (T_h + T_c)/2$.



1. Ecrire les équations que l'on peut considérer loin des bords $x = -L$ et $x = L$, si on néglige la dissipation visqueuse.
2. Montrer que si on néglige aussi la convection thermique, on peut écrire :

$$\frac{T(x) - T_0}{\Delta T} \approx -\frac{x}{2L}.$$

3. A partir de l'expression de T ainsi déduite, trouver les coefficients a et b de la pression :

$$p(x, y) - p_0 = a\frac{y}{\delta} + b\frac{xy}{L\delta}$$

4. Quelles sont les trois conditions supplémentaires à imposer pour obtenir $u(y)$?
   Il y a deux conditions aux limites et une contrainte sur le débit.
   En déduire le coefficient U du profil de vitesse :
$$u(y) = U \left[\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right].$$
5. Esquisser ce profil de vitesse.
   Calculer la position des extrémés.
6. Quel est le nombre adimensionnel qui mesure la vigueur de la cellule de convection ?
   Définir ce nombre physiquement et symboliquement.
   Etablir ensuite la relation entre U et ce nombre adimensionnel défini sur base de l'écart 2δ.
7. Jusqu'à présent, la température n'est pas influencée par le mouvement du fluide. Il est toutefois plus rigoureux d'inclure une perturbation induite par la convection dans l'expression de la température
$$\frac{T(x,y) - T_0}{\Delta T} \approx -\frac{x}{2L} + \frac{\widetilde{T}(y)}{\Delta T}.$$
   Déduire une estimation de $\widetilde{T}(y)$ en injectant le profil de vitesse obtenu précédemment[1] dans l'équation d'énergie.
   Pour obtenir une expression unique, il est logique d'imposer aussi que $\widetilde{T}(0) = 0$.
   Esquisser cette perturbation $\widetilde{T}(y)$ de température le long du plan défini par $x = 0$.
8. Calculer le flux de chaleur traversant le plan défini par $x = 0$ au centre du domaine.
   Bien détailler votre calcul en distinguant flux de chaleur conductif et convectif.

Introduire une variable adimensionnelle
$$\eta = \frac{y}{\delta}$$
permet vraiment d'alléger fortement l'algèbre.
Toutefois, soyez alors bien attentifs aux facteurs δ dans les opérations d'intégration ou de dérivation.

18

On considère la convection naturelle entre deux plaques planes verticales de longueur infinie et séparées par une distance 2δ. Elles sont maintenues à une température constante T_h et T_c respectivement avec $T_h > T_c$. Le gradient de pression vertical est purement hydrostatique.

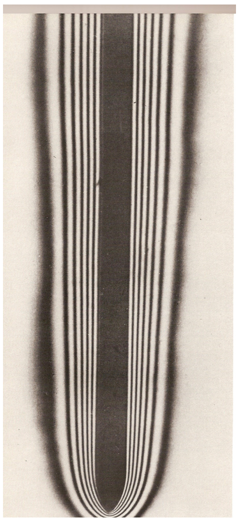
1. Réaliser un schéma du problème.
   Esquisser le profil de température et de vitesse avant d'effectuer un quelconque calcul.
2. En négligeant la dissipation visqueuse, obtenir le profil de température.
3. Déterminer le profil de vitesse et la position des maxima.
   Les résultats seront sous forme adimensionnelle en y faisant apparaître le nombre de Grashof.
4. Finalement, est-il pertinent de négliger la dissipation visqueuse ?
   Définir le critère à satisfaire.
   Et concrètement, peut-on négliger la dissipation visqueuse pour l'air avec $\delta = 0.05\ m$ et deux plaques respectivement à une température de 0 ^oC et de 100 ^oC ?

[1] C'est bien une estimation puisque ce profil de vitesse avait lui-même été déduit sur base du profil de pression obtenu lui-même à partir d'une température linéaire qui n'est plus valable maintenant !

19 Il existe aussi une solution de similitude pour le cas particulier de la convection naturelle le long d'une plaque verticale plane dont le bas est situé en $y = 0$. La plaque est chauffée à une température T_w supposée constante. Loin de la plaque, le fluide est au repos $u = v = 0$ et est à une température $T_e < T_w$. En supposant que l'écoulement n'existe que dans une couche limite proche de la plaque, on peut utiliser les équations de Prandtl en y ajoutant le terme lié à la poussée d'Archimède. On néglige la dissipation visqueuse dans ce problème.

On peut obtenir solution de similitude pour ce problème en définissant :

$$
\begin{aligned}
\eta(x,y) &= \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{y}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{1/4} \\
\theta(\eta(x,y)) &= \frac{T(x,y) - T_e}{T_w - T_e} \\
f(\eta(x,y)) &= -\frac{\psi(x,y)}{4\nu}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{-1/4}
\end{aligned}
$$



1. Réaliser un schéma du problème.
2. Donner l'expression de l'épaisseur de la couche limite $\delta(y)$: en particulier quel est l'exposant de y ?
3. Ecrire les équations de la couche limite qu'il faut considérer ici.
4. Trouver les deux équations différentielles ordinaires que doivent satisfaire θ et f ?
   Le seul paramètre qui doit y apparaître est le nombre de Prandtl.
5. Donner les cinq conditions aux limites pour f et θ.
6. Ecrire un programme `python` pour obtenir la solution numérique. Oui, c'est un beau challenge et ce n'est pas facile !

Cet exercice est facultatif et n'est proposé qu'aux étudiants qui estiment le cours trop facile...
Mais, c'est vraiment un très chouette problème à analyser et une superbe solution numérique à obtenir.