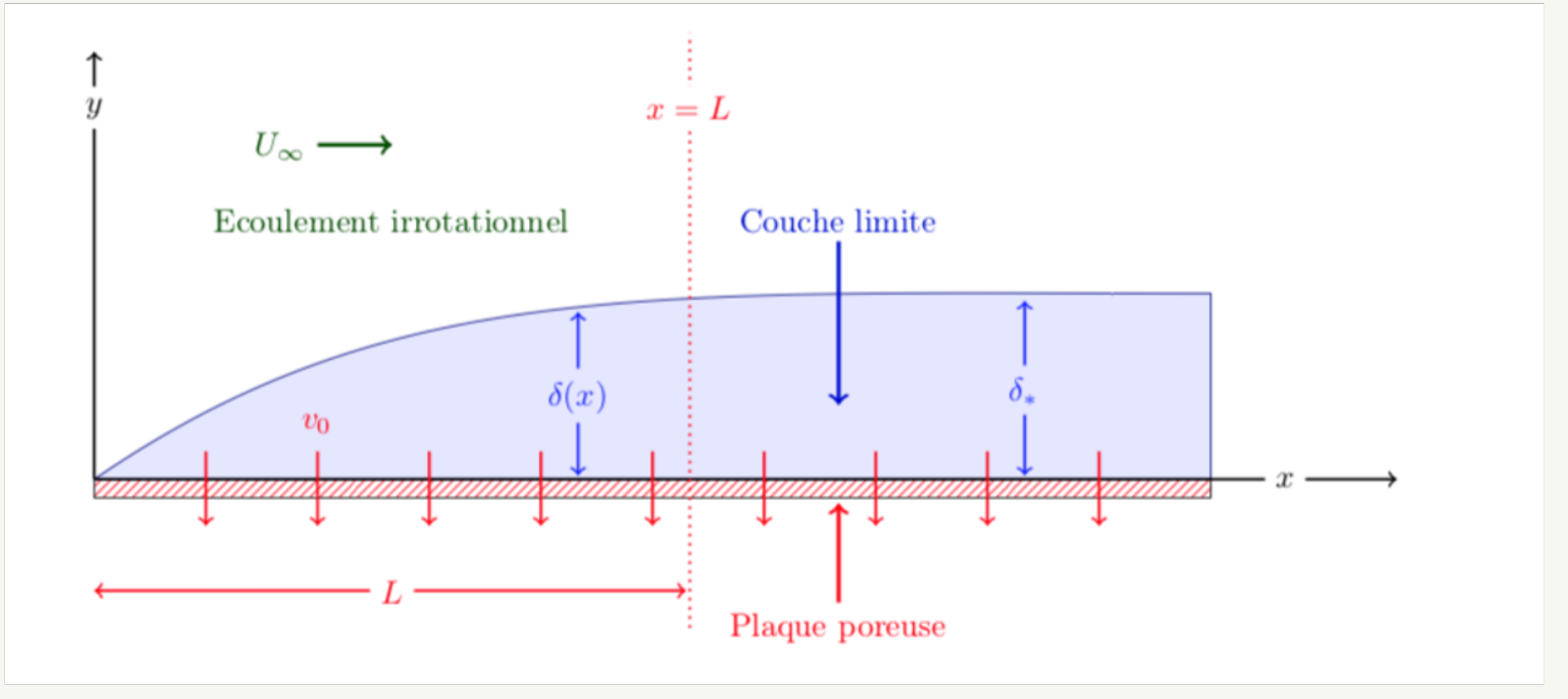
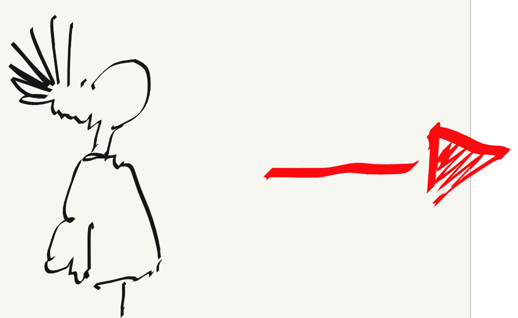
MECA 1321 : SEANCE 7

$$v(x,y) = -v_0$$
$$p(x,y) = p_0$$



Nous allons nous restreindre à l'analyse de l'écoulement pour les valeurs de $x \gg L$.
Dans ce cas, on peut obtenir $u(y)$ en résolvant le problème aux conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\rho v_0 \dfrac{du}{dy} & = & \mu \dfrac{d^2u}{dy^2} \\[2ex] u(0) & = & 0 \\[2ex] u(x \to \infty) & = & U_\infty \end{array} \right.$$



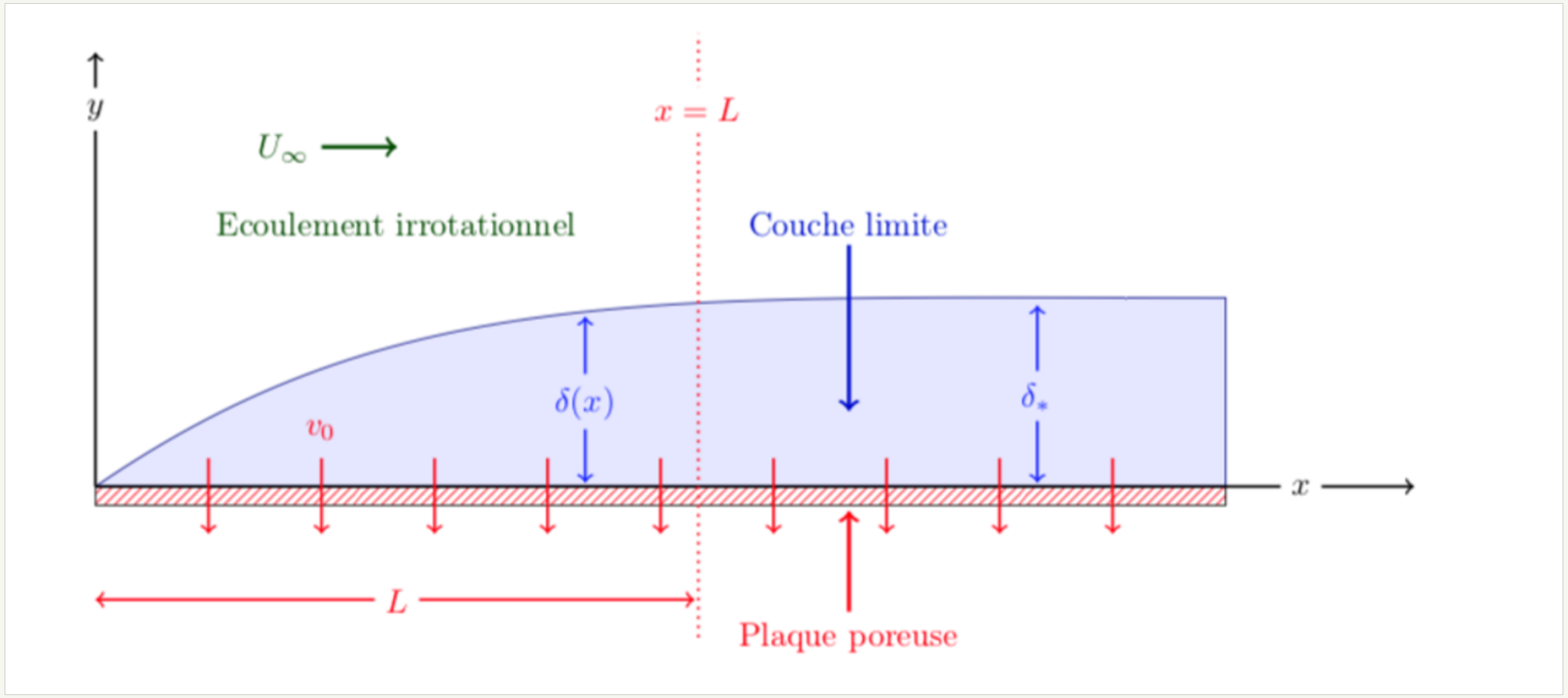
1. Ecrire les équations de la couche limite laminaire, déduire ensuite ce problème aux conditions aux limites en utilisant les hypothèses de l'énoncé.
2. Obtenir l'expression du profil de vitesse $u(y)$.
3. Calculer l'épaisseur constante de déplacement δ_* :

$$\delta_* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_\infty}\right) dy$$

4. Quel est le sens physique ou géométrique du concept d'épaisseur de déplacement ?
5. Calculer la contrainte de cisaillement τ_w exercée par le fluide sur la plaque.
6. Définir le coefficient de frottement C_f et obtenir la valeur numérique pour ce problème.
7. Obtenir l'évolution de l'ordre de grandeur de la couche limite $\delta(x)$ en fonction de ρ, μ, U_∞ et x, lorsque $0 < x < L$.
   Il s'agit du même développement que celui fait pour obtenir les équations de la couche limite !
8. Estimer ensuite la valeur de L en termes de ρ, μ, v_0 et U_∞.
9. Démontrer l'équation de Bernouilli
   pour un écoulement bidimensionnel stationnaire irrotationnel[1] :

$$p(x,y) + \frac{\rho u^2(x,y)}{2} + \frac{\rho v^2(x,y)}{2} + \rho g y = \text{constante}$$

L'idée est d'aspirer le fluide sur la plaque avec une vitesse du succion constante v_0 pour améliorer l'adhérence de la couche limite et cette idée a été étudiée depuis les années 40 par la NASA jusqu'à la mise au point de la version expérimentale du F-16XL.



$v(x,y) = -v_0$

$p(x,y) = p_0$

$$\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{=0} + \overbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}^{=0} = 0$$

$$u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{v}_{-v_0}\frac{\partial u}{\partial y} = -\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\boxed{1}$ TROUVER LES EQUATIONS

PIECE OF CAKE !

$$\boxed{\begin{gathered} -\rho v_0 u'(y) = \mu u''(y) \\ u(0) = 0 \\ u(y \to \infty) = U_\infty \end{gathered}}$$

$\boxed{2}$

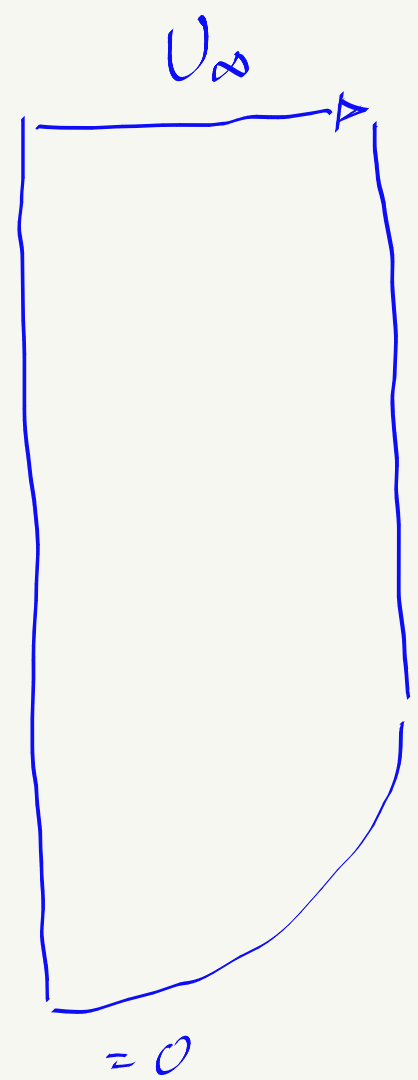
RESOUDRE LES EQUATIONS !

PIECE OF CAKE !

$$\boxed{\begin{aligned} -\rho v_0\, u'(y) &= \mu\, u''(y) \\ u(0) &= 0 \\ u(y\to\infty) &= U_\infty \end{aligned}}$$

$$-\frac{\rho v_0}{\mu}\, u'(y) = u''(y)$$

$$u(y) = A \exp\left(-\frac{\rho v_0}{\mu} y\right) + B$$



$$u(0) = 0$$

$$u(y\to\infty) = U_\infty$$

$$0 = A + B$$

$$U_\infty = B$$

$$u(y) = U_\infty\left(1 - \exp\left(-\frac{\rho v_0}{\mu} y\right)\right)$$

Nous allons nous restreindre à l'analyse de l'écoulement pour les valeurs de $x \gg L$.
Dans ce cas, on peut obtenir $u(y)$ en résolvant le problème aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} -\rho v_0 \dfrac{du}{dy} &= \mu \dfrac{d^2u}{dy^2} \\ u(0) &= 0 \\ u(x \to \infty) &= U_\infty \end{cases}$$

1. Ecrire les équations de la couche limite laminaire, déduire ensuite ce problème aux conditions aux limites en utilisant les hypothèses de l'énoncé.
2. Obtenir l'expression du profil de vitesse $u(y)$.
3. Calculer l'épaisseur constante de déplacement δ_* :

$$\delta_* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_\infty}\right) dy$$

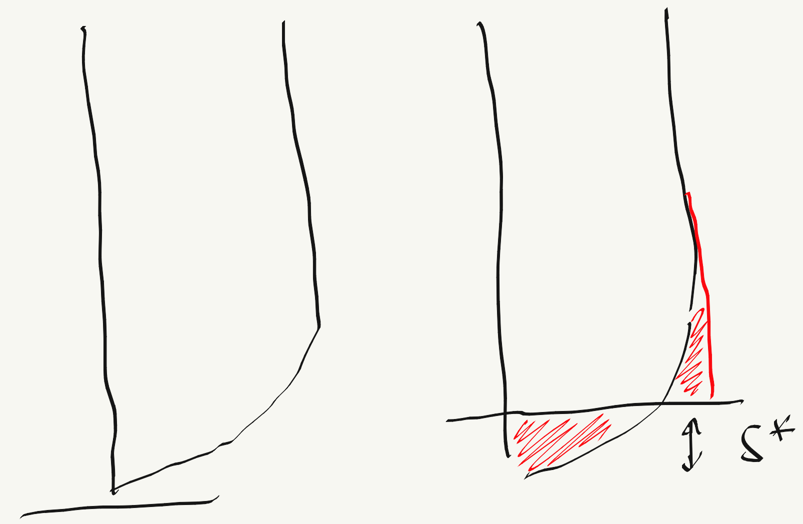
4. Quel est le sens physique ou géométrique du concept d'épaisseur de déplacement ?
5. Calculer la contrainte de cisaillement τ_w exercée par le fluide sur la plaque.
6. Définir le coefficient de frottement C_f et obtenir la valeur numérique pour ce problème.
7. Obtenir l'évolution de l'ordre de grandeur de la couche limite $\delta(x)$
en fonction de ρ, μ, U_∞ et x, lorsque $0 < x < L$.
Il s'agit du même développement que celui fait pour obtenir les équations de la couche limite !
8. Estimer ensuite la valeur de L en termes de ρ, μ, v_0 et U_∞.
9. Démontrer l'équation de Bernouilli
pour un écoulement bidimensionnel stationnaire irrotationnel[1] :

$$p(x,y) + \frac{\rho u^2(x,y)}{2} + \frac{\rho v^2(x,y)}{2} + \rho g y = \text{constante}$$

L'idée est d'aspirer le fluide sur la plaque avec une vitesse du succion constante v_0 pour améliorer l'adhérence de la couche limite et cette idée a été étudiée depuis les années 40 par la NASA jusqu'à la mise au point de la version expérimentale du F-16XL.

$$u(y) = U_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{\rho v_0}{\mu} y\right)\right)$$

$\boxed{4}$



$\boxed{3}$

$$\delta^* = \int_0^\infty 1 - \frac{u(y)}{U_\infty} \, dy = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\rho v_0}{\mu} y\right) dy$$

$$= \left[-\frac{\mu}{\rho v_0} \exp\left(-\frac{\rho v_0}{\mu} y\right)\right]_0^\infty = \frac{\mu}{\rho v_0}$$

$$\delta^* = \frac{\mu}{\rho v_0}$$

$[kg/m^3]$ $[m/s]$

$$\left[\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}\,\cancel{s}} \; \frac{\cancel{s}}{\cancel{m}} \; \frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}}\right]$$

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}}$$

$\left[\frac{N}{m^2}\right]$ $\left[\frac{1}{s}\right]$

$\left[\frac{kg\,m}{m^2 s^2}\right]$

$\left[\frac{kg}{m s^2}\right]$ $\left[\frac{kg}{m\,s}\right]$

$\boxed{5}$

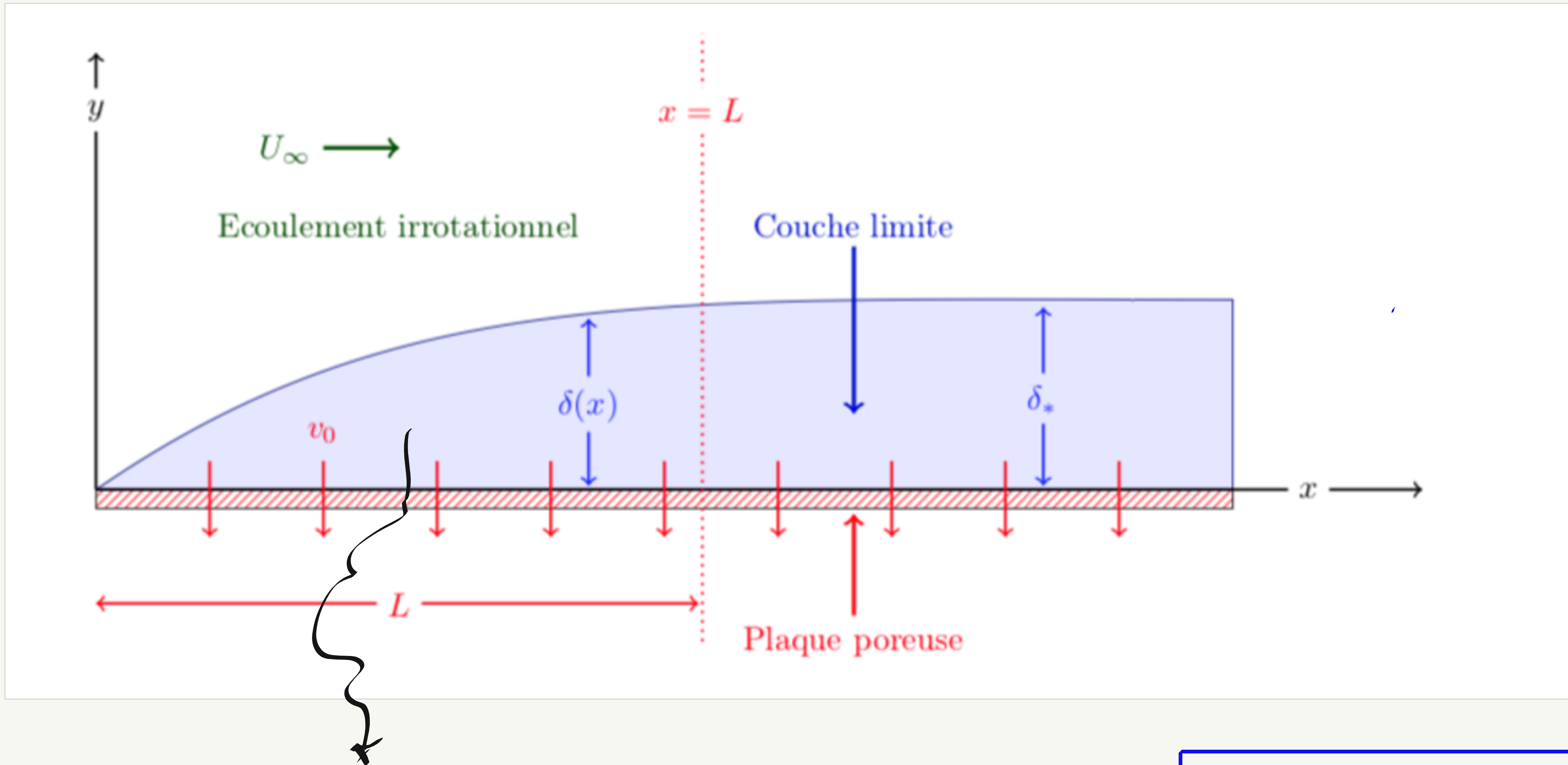
$$u(y) = U_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{\rho v_0}{\mu} y\right)\right)$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \cancel{\mu}\, U_\infty\, \rho \frac{v_0}{\cancel{\mu}} \underbrace{\left[\exp\left(-\frac{\rho v_0}{\mu} y\right)\right]_{y=0}}_{=1} = \rho\, v_0\, U_\infty$$

$\boxed{6}$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2 / 2} = \frac{2 \cancel{\rho}\, v_0\, \cancel{U_\infty}}{\cancel{\rho}\, U_\infty^{\cancel{2}}} = \frac{2 v_0}{U_\infty}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_w &= \rho\, v_0\, U_\infty \\ C_f &= \frac{2 v_0}{U_\infty} \end{aligned}}$$



$\boxed{7}$

$$\underbrace{\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]}_{\rho\frac{U_\infty^2}{x}} = \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\mu\frac{U_\infty}{\delta^2(x)}}$$

$$\rho\frac{U_\infty}{x} = \frac{\mu}{\delta^2(x)}$$

$$\boxed{\frac{U_\infty}{L} = \frac{v_0}{\delta(L)}}$$

$$\boxed{\delta(x) = \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}}}$$

$$\boxed{\frac{U_\infty}{L} = \frac{v_0}{\delta(L)}}$$

$$\boxed{\delta(x) = \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}}}$$

$$\sqrt{\frac{\mu L}{\rho U_\infty}} = \delta(L) = \frac{v_0 L}{U_\infty}$$

$$\frac{\mu \cancel{L}}{\rho \cancel{U_\infty}} = \frac{v_0^2 L^{\cancel{2}}}{U_\infty^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{L = \frac{\mu U_\infty}{\rho v_0^2}}$$

8

UNE DEMONSTRATION SIMPLE POUR BERNOUILLI EN 2D :-)

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

ECOULEMENT IRROTATIONNEL $\omega = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$dx \left[\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\sim \frac{\partial v}{\partial x}} = - \frac{\partial p}{\partial x} \right]$$

$$dy \left[\rho u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial u}{\partial y}} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \right] dy$$

$$dx \left[\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + dy \left[\rho u \frac{\partial u}{\partial y} \right] + dx \left[\rho v \frac{\partial v}{\partial x} \right] + dy \left[\rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$+ dx \frac{\partial p}{\partial x} + dy \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \, dy = 0$$

$$d\left(\rho \frac{u^2}{2}\right) + d\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) + d(p) + d(\rho g y) = 0$$

$$dx\left[\rho u \frac{\partial u}{\partial x}\right] + dy\left[\rho u \frac{\partial u}{\partial y}\right] + dx\left[\rho v \frac{\partial v}{\partial x}\right] + dy\left[\rho v \frac{\partial v}{\partial y}\right] + dx\frac{\partial p}{\partial x} + dy\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\, dy = 0$$

$$d\left(\rho \frac{u^2}{2}\right) + d\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) + d(p) + d(\rho g y) = 0$$

$$\boxed{\rho \frac{u^2}{2} + \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g y = cst}$$