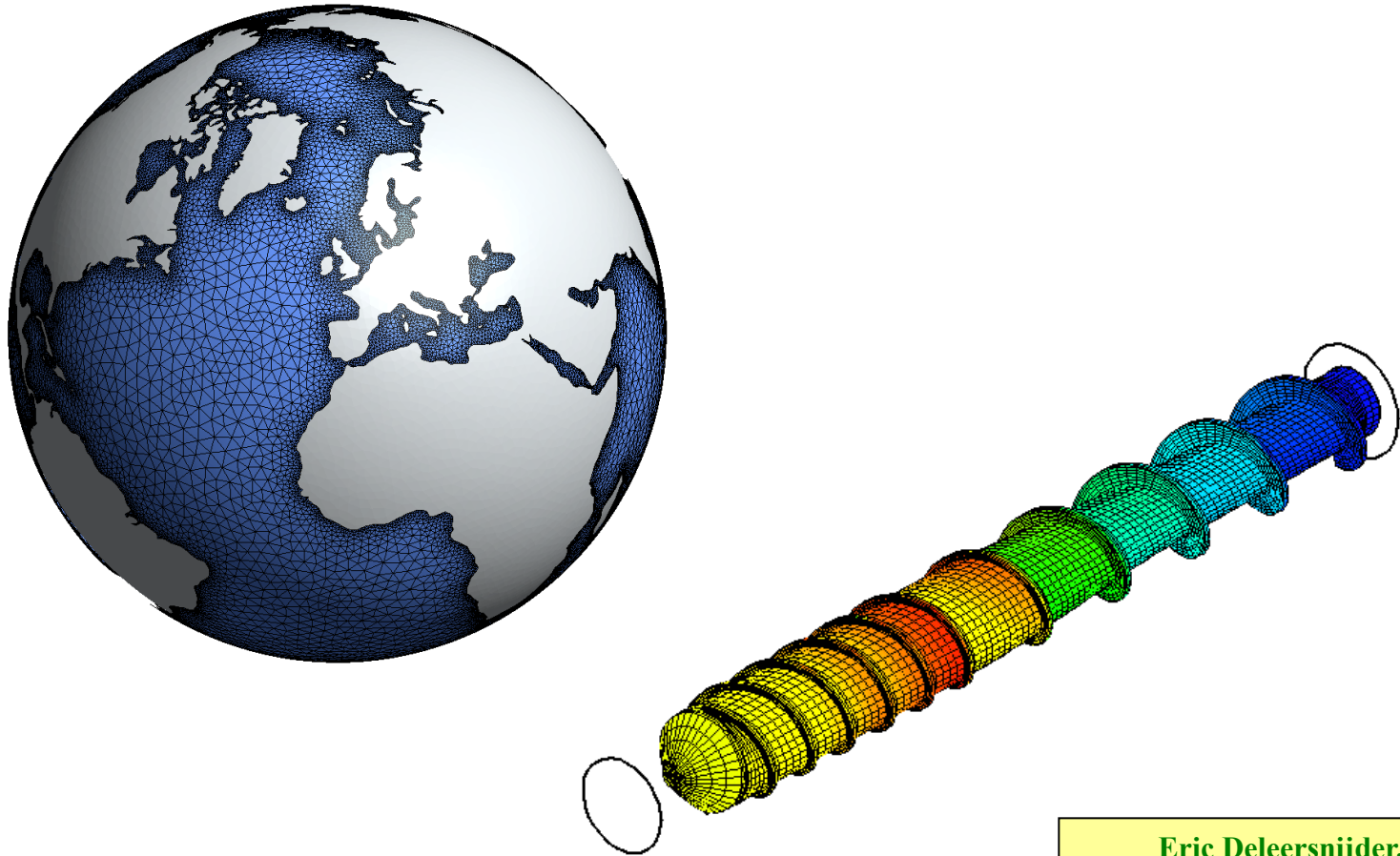


Physique (ou mécanique des fluides)



Eric Deleersnijder,
Vincent Legat,



INTRODUCTION

CONSTRUCTION
D'UN MODÈLE POUR PREDIRE
L'EVOLUTION D'UN MILIEU CONTINU

EDP

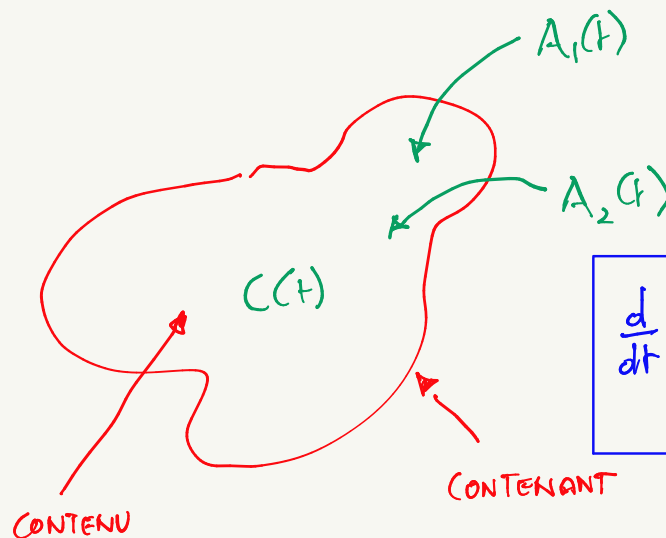
EQUATIONS
DE BILAN

EQUATION
DE COMPORTEMENT

- ENERGIE
- MASSE
- QUANTITE DE MNT
- MOMENT DE QUANTITE DE MNT (*)

(*) C'EST PAS
VRAIMENT
UN PRINCIPE

SOLIDE ELASTIQUE
FLUIDE NEWTONIEN



C'EST FAUX !

1 LITRE
D'AIR

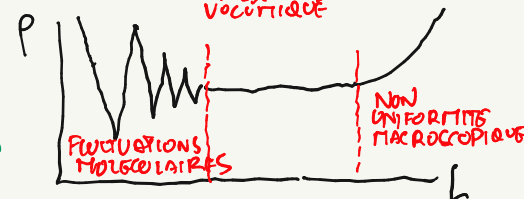
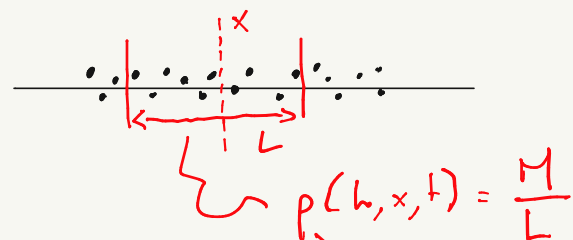
10^{23} MOLECULES

1 ORDINATEUR

10^{10} OP/SECONDES

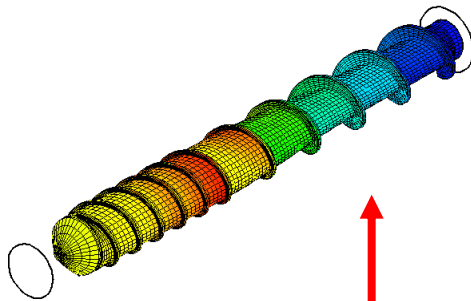
10^{13} nc

UN INSTANT t



$$\frac{d}{dt} C(t) = A_1(t) + A_2(t)$$

BILAN



La mécanique des milieux continus...

Construction
d'un **modèle** pour **prédire** l'évolution
d'un milieu **continu**

Equations aux dérivées partielles

Equations de conservation
Equations de comportement

Conditions aux limites

Conditions frontières
Condition initiales

Dynamique moléculaire de l'air

1 litre d'air
 10^{23} molécules



Construction
d'un **modèle** pour **prédire** l'évolution
d'un milieu **continu**

La prédiction avec la dynamique
moléculaire est tout-à-fait
impossible pour des écoulements
complexes



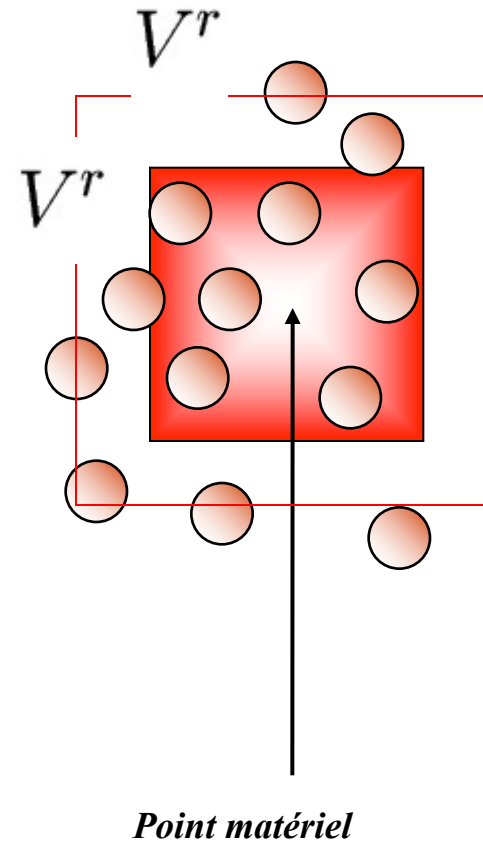
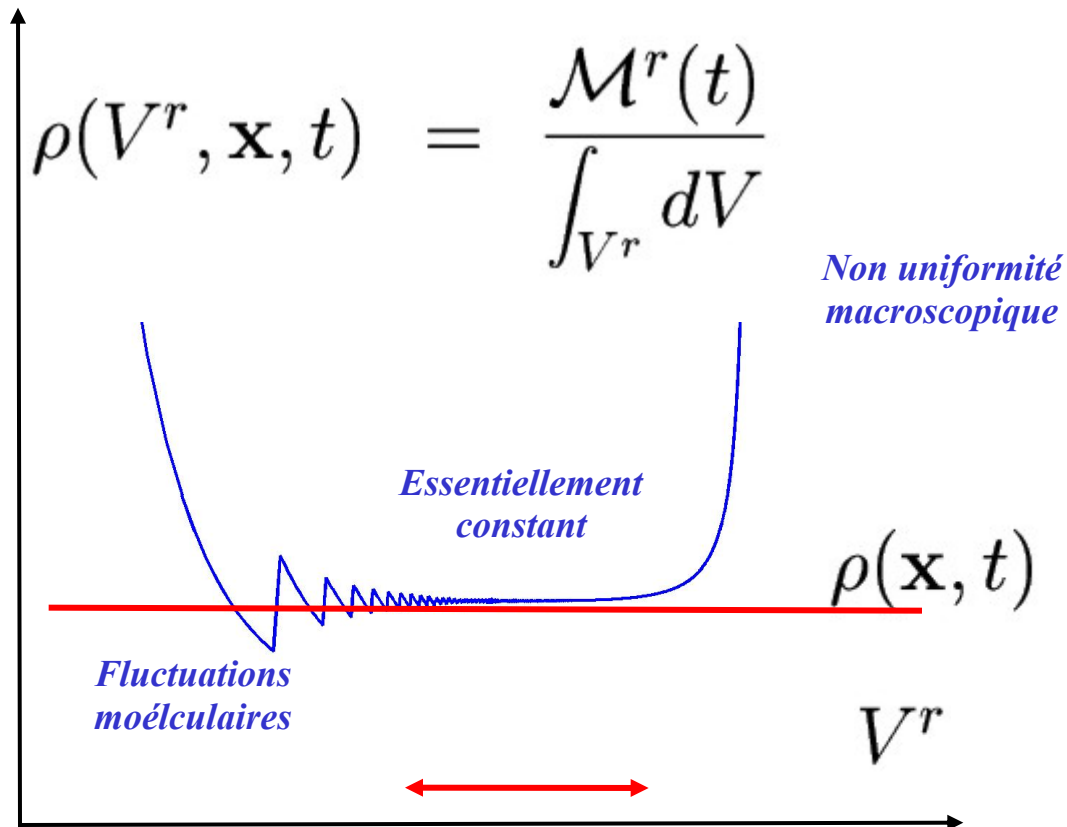
Ordinateur

10^{10} opérations par seconde
 10^{13} secondes ou 100.000 années
juste pour référencer une fois chaque molécule



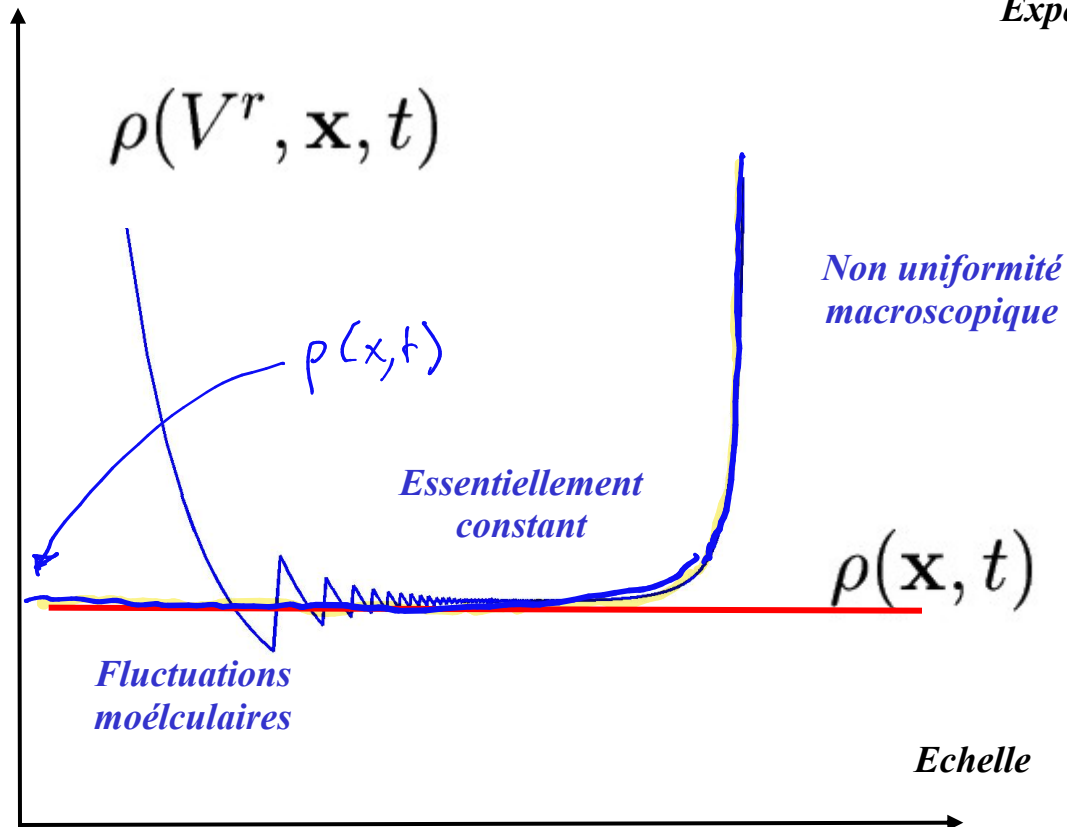
Hypothèse du modèle continu

La densité obtenue comme une moyenne...



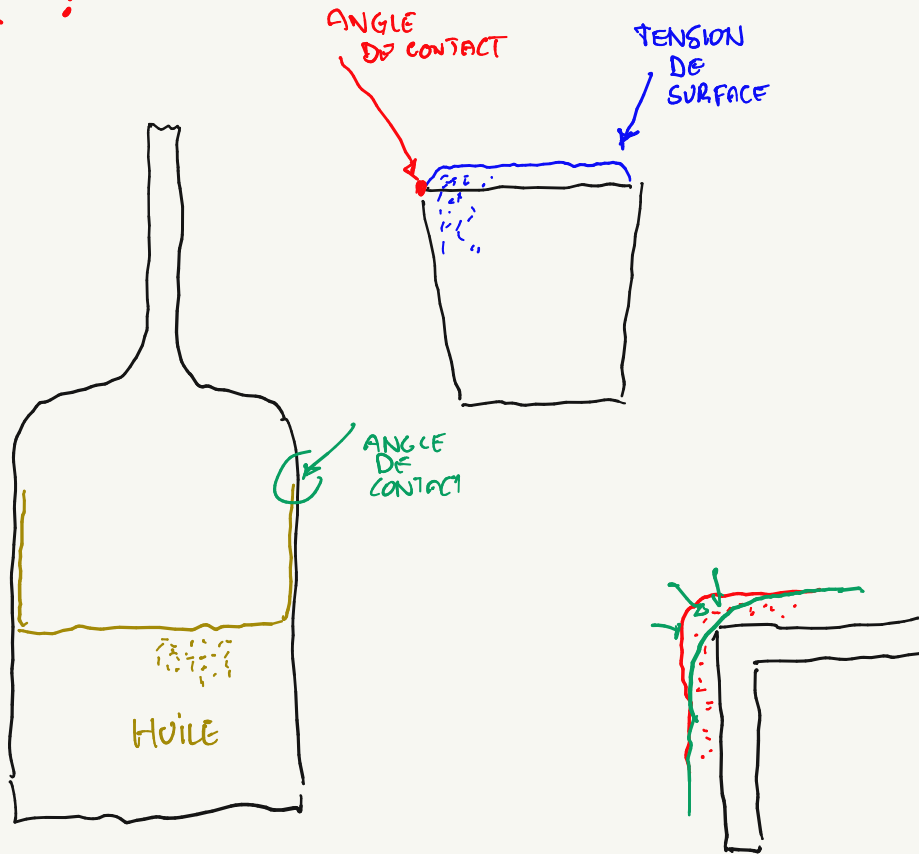
Hypothèse des milieux continus

Le comportement de nombreux systèmes est essentiellement le même que si on supposait qu'ils étaient parfaitement continus.



*Expérimentalement, on observe bien
une séparation des échelles,
typiquement 10^{15}*

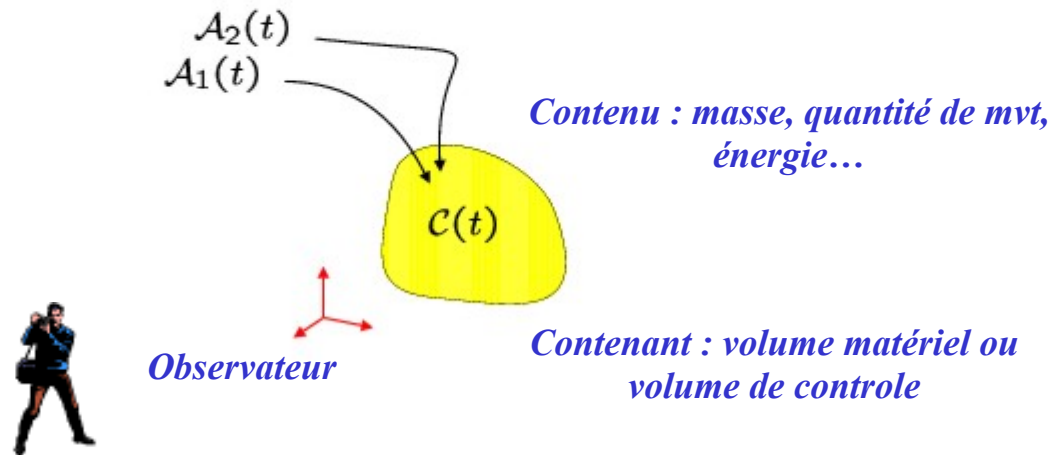
ET
POURTANT
C'EST
FAUX !



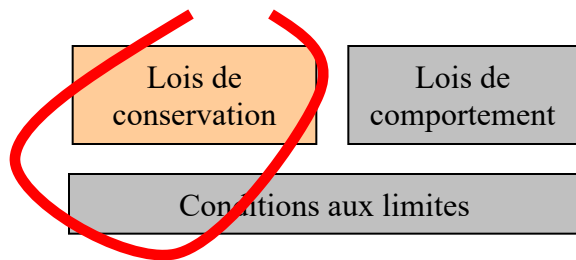
Lois de conservation

$$\frac{dC}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \dots$$

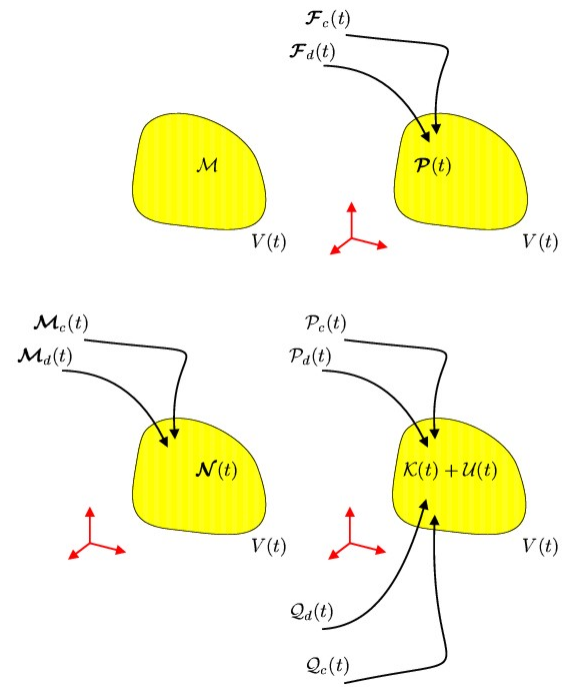
Apports extérieurs



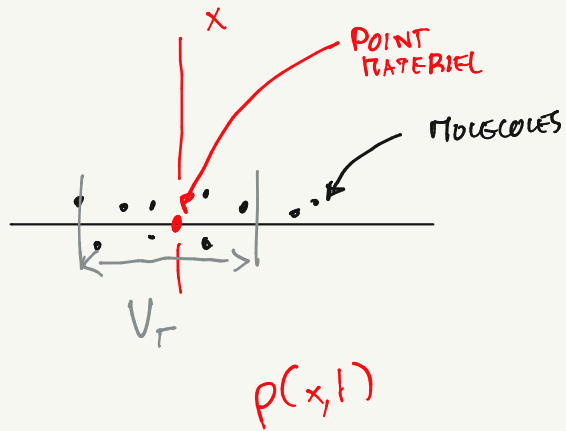
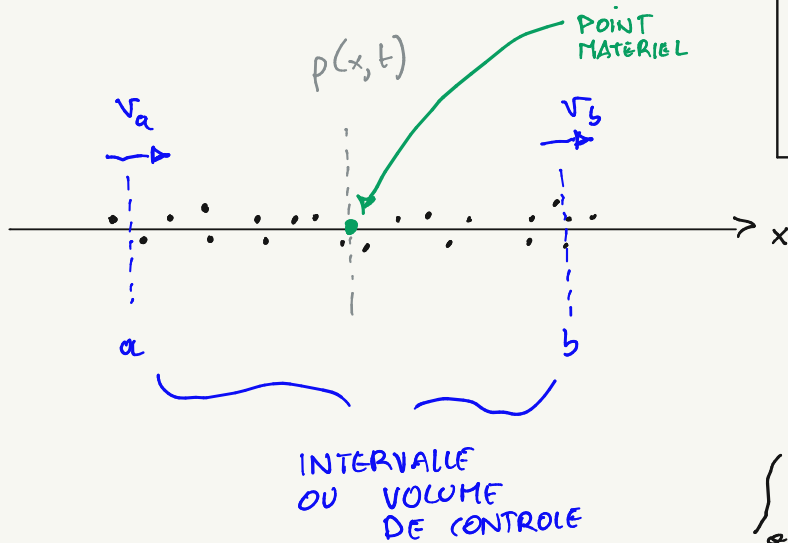
Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.



*Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.*



2 MASSE



$\forall$ INTERVALLE

ACCROISSEMENT
DE LA MASSE

$$= \text{CE QUI ENTRE} - \text{CE QUI SORT}$$

**FORME
GLOBALE**

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho \, dx = \rho_a v_a - \rho_b v_b \quad \forall a, b$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho \, dx + [\rho v]_a^b = 0 \quad \forall a, b$$

$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx + \int_a^b \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} \, dx = 0 \quad \forall a, b$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} \right) \, dx = 0 \quad \forall a, b$$

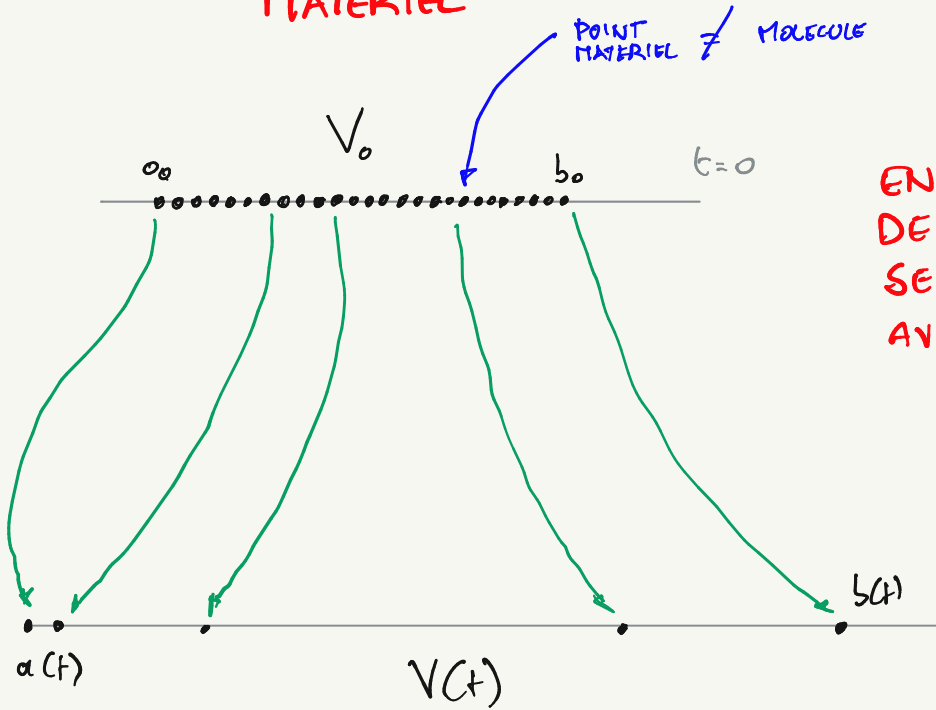
**Si
 ρ, v CONTINUES !**

**FORME
LOCALE**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0$$

3

L'AUTRE APPROCHE : LE VOLUME MATÉRIEL



ENSEMBLE
DE POINTS MATÉRIELS
SE DÉPLAÇANT
AVEC UNE VITESSE
MACROSCOPIQUE :

$$\vec{v}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^3 v_i(\underline{x}, t) \hat{e}_i$$

$$= v_i(\underline{x}, t) \hat{e}_i$$

CONVENTION
D' EINSTEIN

INDICES
RÉPÉTÉS $\Rightarrow \sum$

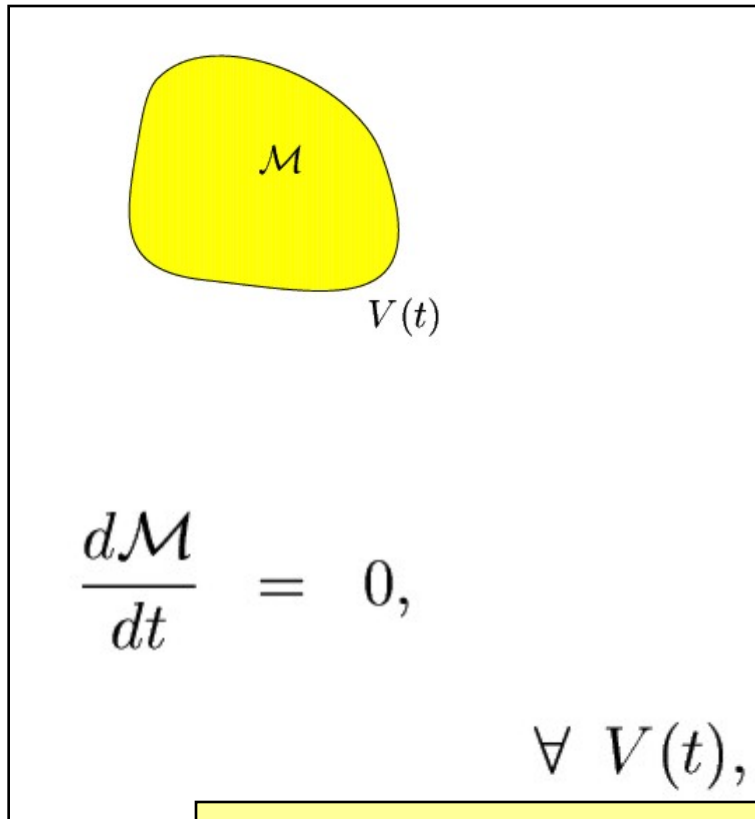
MATIERE
VIRTUELLE
CONTINUE



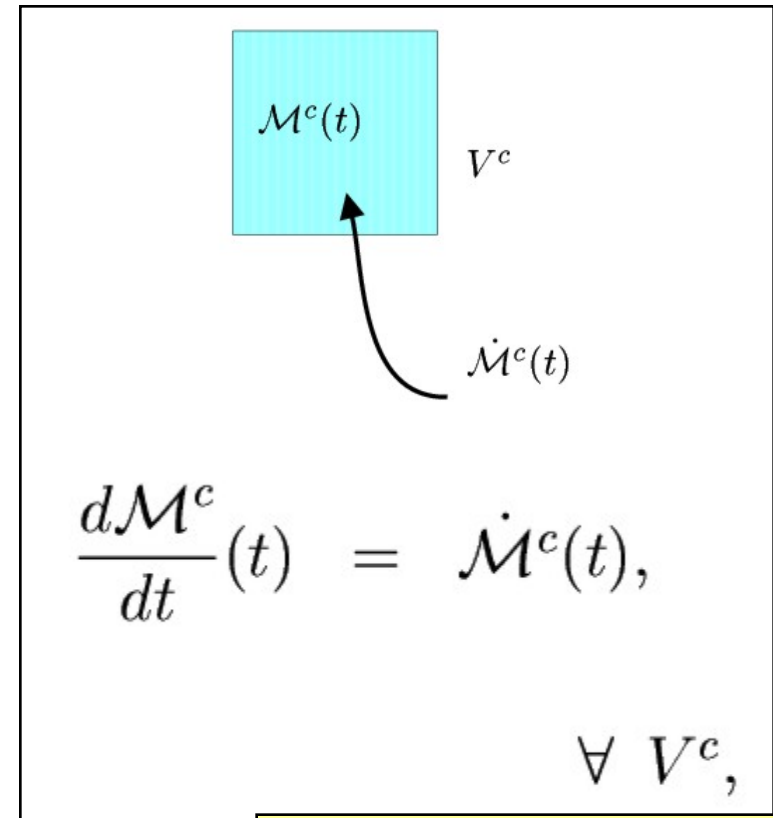
$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(\underline{x}, t) dx = 0$$

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \rho_b \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_b} - \rho_a \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_a} = 0$$

Formes globales de la conservation de la masse



Volume matériel
Ensemble de points matériels en mouvement se déplaçant à une vitesse macroscopique $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

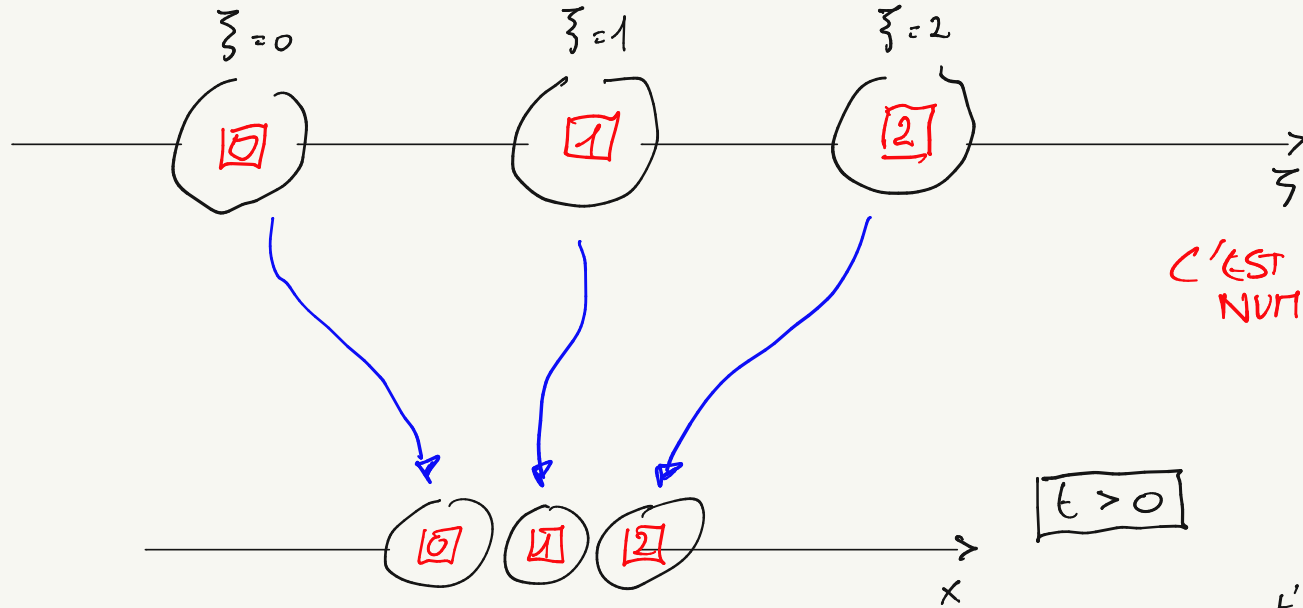


Volume de controle
Ensemble de points eulériens

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i$$

19

EULER VERSUS LAGRANGE



C'EST UNE
NUMEROTATION CONTINUE

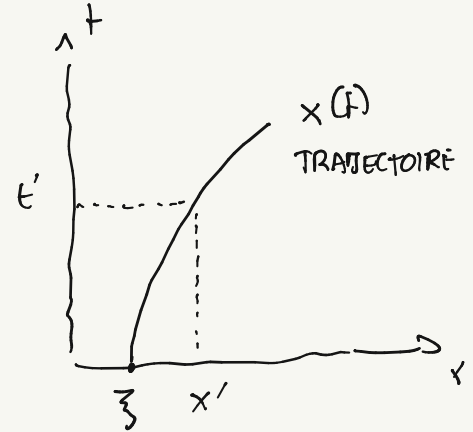
$$x(\xi, t)$$

$$\xi(x, t)$$

$x = 0,8$
 $\xi = 0$

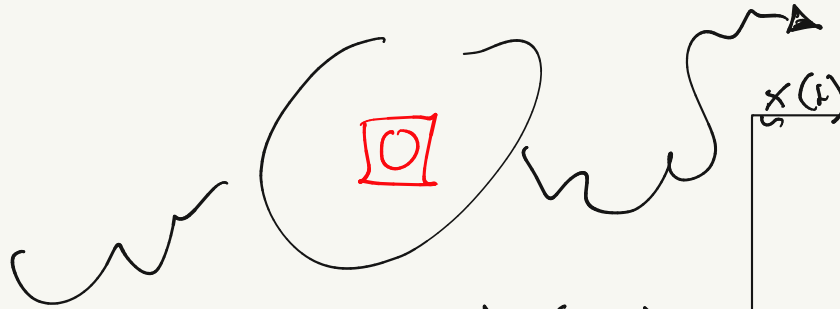
COORDONNEES
EULERIENNES OU SPATIALES

COORDONNEES
LAGRANGIENNES OU MATERIELLES



5

LA VITESSE
EST UNIQUE
MAIS A 2 REPRESENTATIONS !



$$v_L(\xi, t) = \frac{dx}{dt}(\xi, t)$$

$$a_L(\xi, t) = \frac{d^2x}{dt^2}(\xi, t)$$

ξ Fixé !

$$v_L(\xi, t) \quad v_E(x, t)$$

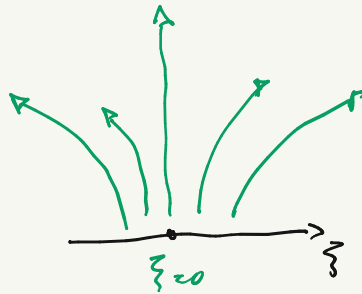
$$v = v_L(\underbrace{\xi(x, t)}_{\xi}, t) = v_E(\underbrace{x(\xi, t)}_x, t)$$

VITESSE DU POINT
MATÉRIEL ξ

QUI OCCUPE LA POSITION x
À L'INSTANT t

6

UN PETIT
EXEMPLE
SIMPLE :-)



$$x(\xi, t) = \xi + \xi t^2$$

$$v_L(\xi, t) = \underline{2\xi t}$$

$$a_L(\xi, t) = 2\xi$$

$$x(\xi, t) = \xi + \xi t^2$$

$$\xi(x, t) = \frac{x}{1+t^2}$$

$$\underbrace{v_L(\xi(x, t), t)}_{\frac{2xt}{1+t^2}} = v_E(x, t)$$

$$\underbrace{a_L(\xi(x, t), t)}_{\frac{2x}{1+t^2}} = a_E(x, t)$$

No!

$$v_E(x, t) = \frac{2xt}{1+t^2}$$

~~$$a_E(x, t) = \frac{2x}{1+t^2} - \frac{4xt^2}{(1+t^2)^2}$$~~

$$a_E(x, t) = \frac{d}{dt} \left(v_E(x(\xi, t), t) \right)$$

$$= \left[\frac{\partial v_E}{\partial x} \right] \underbrace{\left[\frac{dx}{dt} \right]}_{v_E} + \left[\frac{\partial v_E}{\partial t} \right]$$

$$a_L(\underbrace{\xi(x,t), t}) = a_E(x,t)$$

$$\frac{2x}{1+t^2}$$

$$\frac{2xt}{1+t^2} - \cancel{\frac{4xt}{1+t^2}}$$

$$\cancel{\frac{2xt}{1+t^2}}$$

$$\cancel{\frac{2t}{1+t^2}}$$

No!

$$v_E(x,t) = \frac{2xt}{1+t^2}$$

$$a_E(x,t) = \cancel{\frac{2x}{1+t^2}} - \frac{4xt^2}{(1+t^2)^2}$$

$$a_E(x,t) = \frac{d}{dt} \left(v_E(x(\xi,t), t) \right)$$

$$= \boxed{\frac{\partial v_E}{\partial x}} \underbrace{\boxed{\frac{dx}{dt}}}_{v_E} + \boxed{\frac{\partial v_E}{\partial t}}$$

$$a_E = \underbrace{\frac{\partial \psi_E}{\partial t} + \mathbf{v}_E \cdot \frac{\partial \psi_E}{\partial \mathbf{x}}}_{\frac{D\psi_E}{Dt}} \quad \text{DERIVÉE MATÉRIELLE}$$

$$a = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi}_{\frac{D\psi}{Dt}}$$

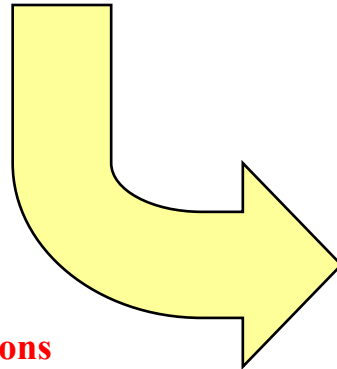
Conservation de la masse

Forme globale

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \quad \forall V(t),$$

*satisfaite pour une certaine classe de systèmes,
à tout instant*

$$\mathcal{M} = \int_{V(t)} \rho dV$$



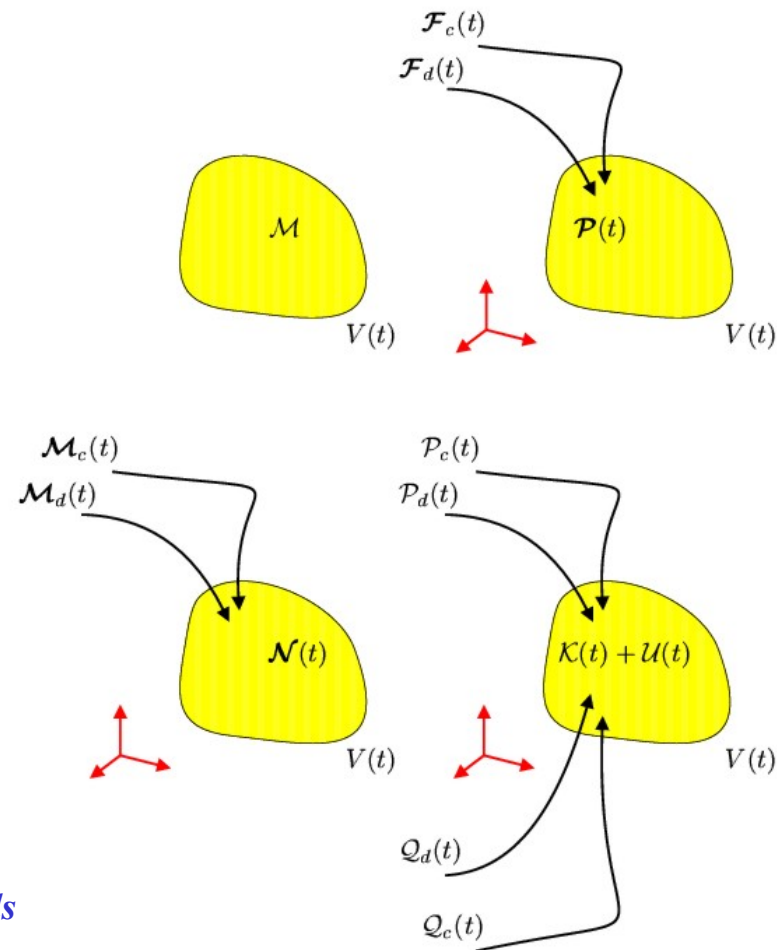
**sous certaines conditions
de continuité..**

Forme locale

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

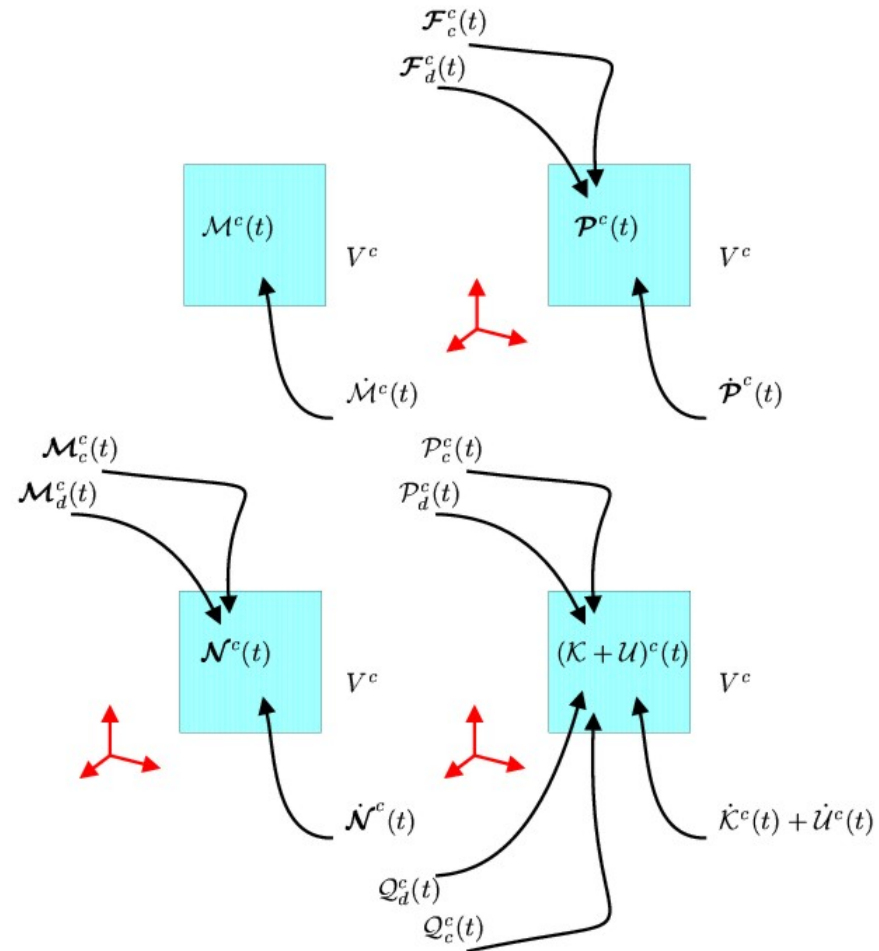
satisfaite en tout point et à tout instant

Toutes les lois de conservation, en un clin d'oeil...



*Forme globale
pour des volumes matériels*

Sous un autre angle, ces lois de conservation...



*Forme globale
pour des volumes de controle*