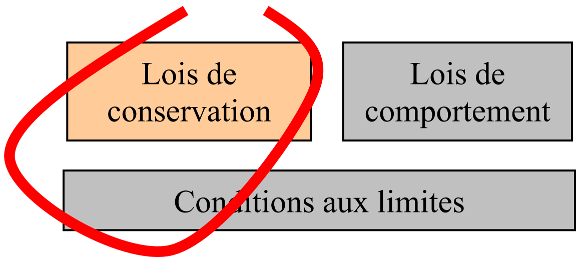
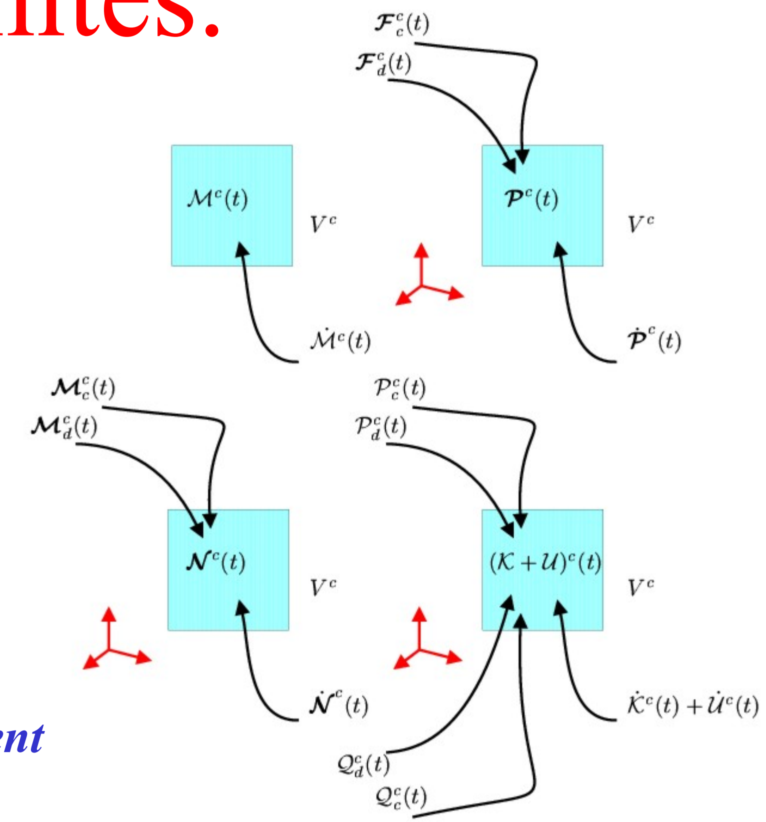
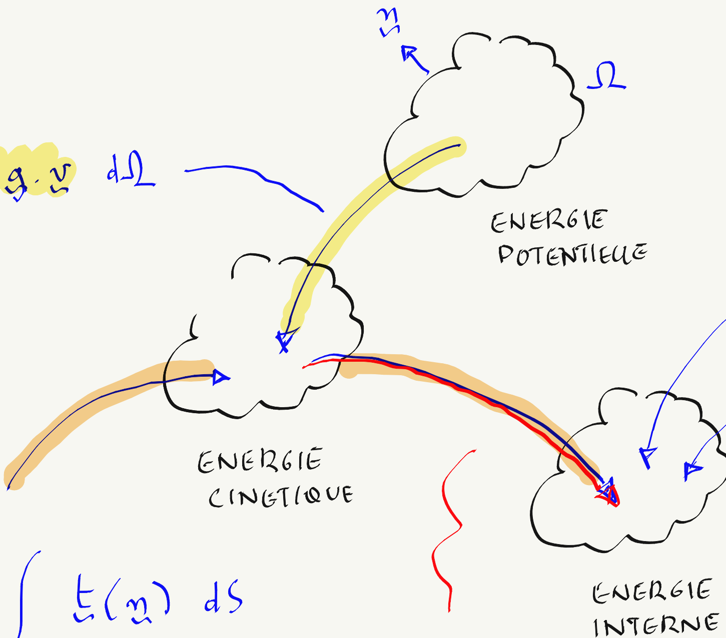
Lois de conservation, lois de comportement, conditions aux limites.





Conservation de la masse,
de la quantité de mouvement,
du moment de la quantité de mouvement
et de l'énergie.

ENERGIE



$$P_d(t) = \int_\Omega \rho \underline{g}\cdot\underline{v}\, d\Omega$$

$$Q_d = \int_\Omega r\, d\Omega$$

$$Q_c = \int_{\partial\Omega} q(\underline{n})\, dS$$

$$P_c(t) = \int_{\partial\Omega} \underline{t}(\underline{n})\, dS$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\cdot\underline{v}\, dS$$

PUISSANCE DES FORCES DE CONTACT

$P_i(t)$

PUISSANCE DE EFFORTS INTERNES

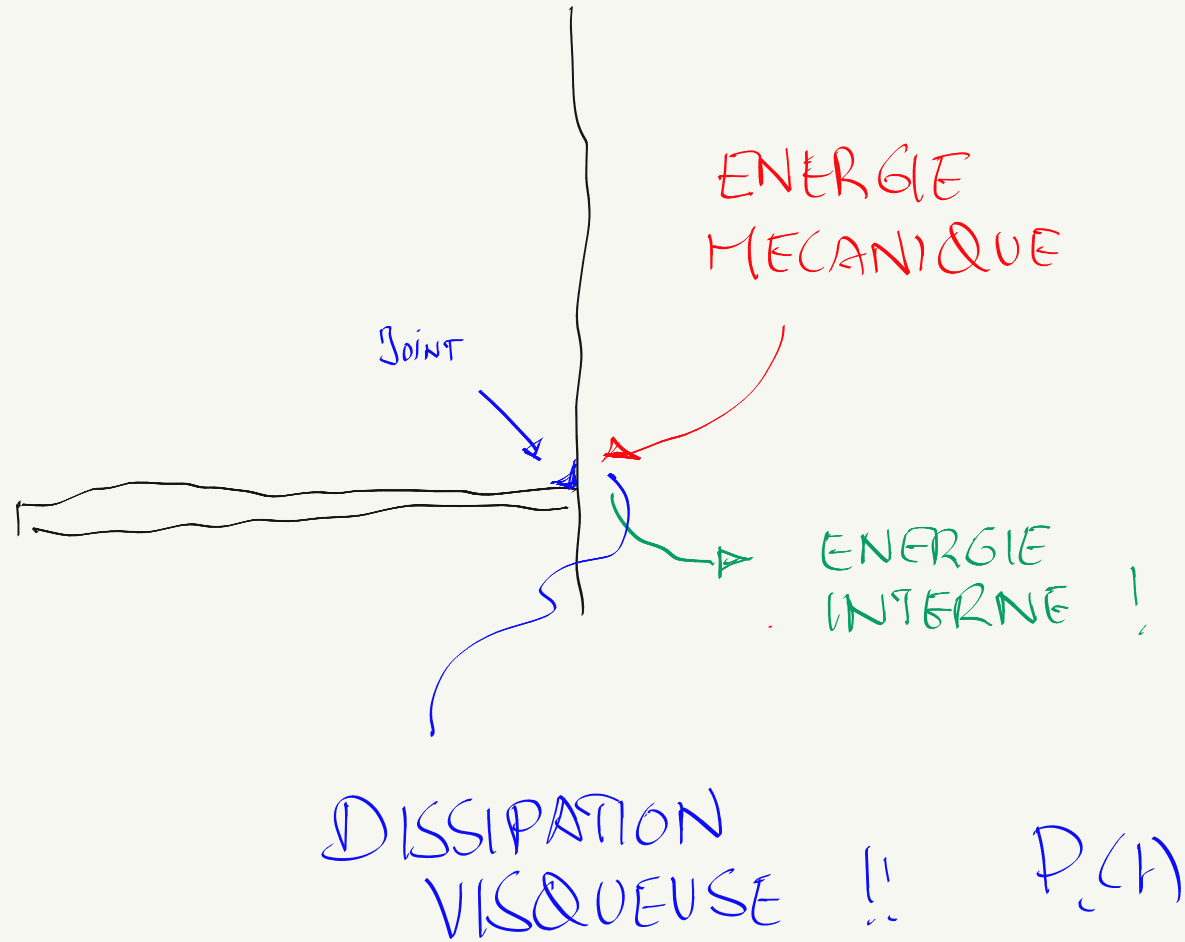
DISSIPATIONS VISQUEUSES

$$\underbrace{\underline{v}\cdot\rho\frac{D\underline{v}}{Dt}}_{\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2}\right)} = \underbrace{\underline{v}\cdot\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}}_{\underbrace{\nabla\cdot(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v})}\ -\ \underbrace{(\nabla\underline{v}):\underline{\underline{\sigma}}}} + \overbrace{\underline{v}\cdot\rho\underline{g}}^{\text{DENSITE DE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE}}$$

DENSITE DE PUISSANCES DES FORCES DE CONTACT

DENSITE DE LA PUISSANCE DES EFFORTS INTERNES

THEOREME DE L'ENERGIE MECANIQUE :-)



ENERGIE MECANIQUE
JOINT
ENERGIE INTERNE !
DISSIPATION VISQUEUSE !!
P.(A)

$$\underbrace{\underline{v}\cdot\rho\frac{D\underline{v}}{Dt}}_{\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2}\right)} = \underbrace{\underline{v}\cdot\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}}_{\nabla\cdot(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v}) \,-\, (\nabla\underline{v}):\underline{\underline{\sigma}}} + \overbrace{\underline{v}\cdot\rho\underline{g}}^{\text{DENSITE DE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE}}$$

$$\underbrace{\nabla\cdot(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v})}_{\text{DENSITE DE PUISSANCES DES FORCES DE CONTACT}} - \underbrace{(\nabla\underline{v}):\underline{\underline{\sigma}}}_{\text{DENSITE DE LA PUISSANCE DES EFFORTS INTERNES}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \cancel{0\times 4} + \cancel{3\times 1/2} + \cancel{3\times -1/2} + \cancel{2\times 0} = 0$$

$$-\underbrace{\left(\frac{\nabla\underline{v}+\nabla\underline{v}^T}{2}\right)}_{\text{PARTIE SYM DE }\nabla\underline{v}}:\underline{\underline{\sigma}} \;\underbrace{-\overbrace{\left(\frac{\nabla\underline{v}-\nabla\underline{v}^T}{2}\right)}^{\text{ANTI SYM}}\underbrace{}_{\text{PARTIE ANTI-SYM DE }\nabla\underline{v}}:\overbrace{\underline{\underline{\sigma}}}^{\text{SYM}}}_{=0}$$

$\triangleq \underline{\underline{d}}$ TENSEUR DES TAUX DE DEFORMATIONS !

CONCLUSION !

$$\boxed{P_i(t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\sigma}}}$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2}\right) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v}) + \rho\, \underline{g}\cdot\underline{v} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$$

QUANTITE DE MVT

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \rho\, \underline{g}$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\underline{\nabla}\cdot\underline{q} + r + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$$

ENERGIE INTERNE

APPORT PAR LES FRONTIERES

APPORT PAR LE VOLUME

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{\delta}} + 2\mu\,\underline{\underline{d}}$$

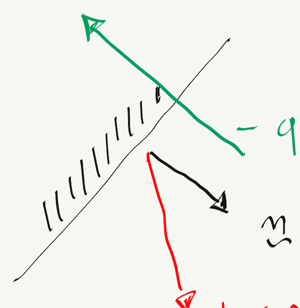
$$\underline{q} = -k\,\underline{\nabla}T$$

$$U = c_v T$$

ENERGIE INTERNE

CHALEUR SPECIFIQUE c_v

TEMPERATURE



$$-q(\underline{n}) = \underline{q}\cdot\underline{n}$$

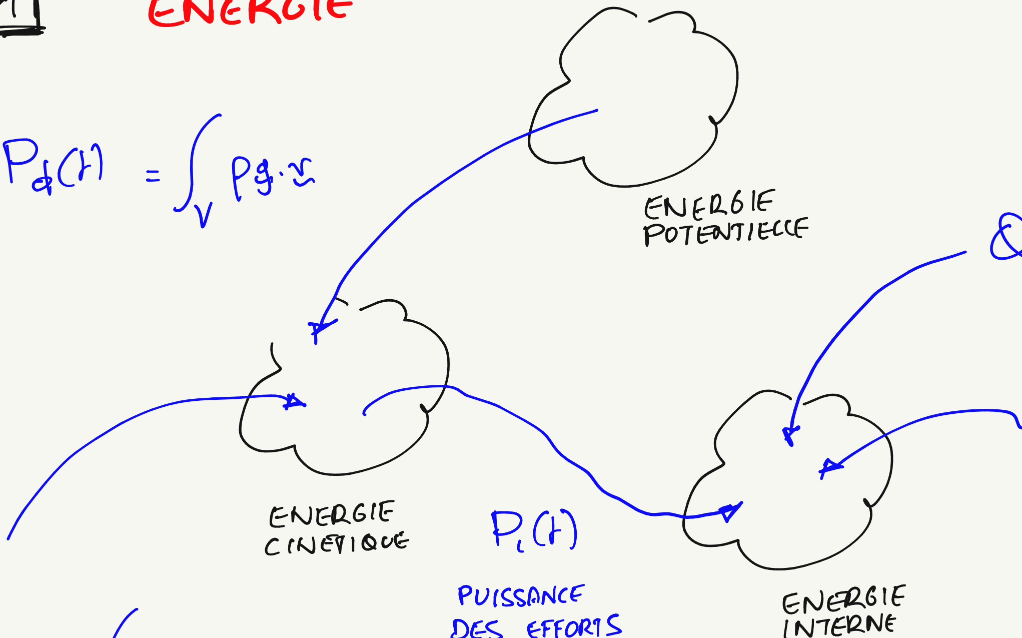
$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}$$

$$-\underline{q}\cdot\underline{n} = q(\underline{n})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \underline{t}(\underline{n})$$

1 ENERGIE

$$P_d(t) = \int_V \rho \underline{g} \cdot \underline{v}$$



$$Q_d(t) = \int_V r \, dV$$

$$Q_c(t) = \int_{\partial V} q(\underline{n}) \, dS$$

$P_i(t)$

PUISSANCE DES EFFORTS INTERNES

DISSIPATIONS VISQUEUSES

$$P_c(t) = \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{v} = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v} \cdot \underline{n}$$

PUISSANCE DES FORCES DE CONTACT

$$\underbrace{\underline{v} \cdot \rho \frac{D\underline{v}}{Dt}}_{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2}\right)} = \underbrace{\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}}_{\underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v}) - (\underline{\nabla}\,\underline{v}) : \underline{\underline{\sigma}}} + \overbrace{\underline{v} \cdot \rho \underline{g}}^{\text{DENSITE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE}}$$

$$\underbrace{\underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v})}_{\text{DENSITE PUISSANCE DES FORCES DE CONTACT}} - (\underline{\nabla}\,\underline{v}) : \underline{\underline{\sigma}}$$

THEOREME ENERGIE MECANIQUE :-)

$$\underbrace{\underset{\sim}{v} \cdot \rho \frac{D\underset{\sim}{v}}{Dt}}_{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}}{2}\right)} = \underbrace{\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{=}{\sigma}}_{\underbrace{\underset{\sim}{\nabla} \cdot (\underset{=}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{v})}_{\text{DENSITE PUISSANCE DES FORCES DE CONTACT}} - \underbrace{(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v}) : \underset{=}{\sigma}}} + \overbrace{\underset{\sim}{v} \cdot \rho \underset{\sim}{g}}^{\text{DENSITE PUISSANCE DES FORCES A DISTANCE}}$$

$$-\underbrace{\left(\frac{\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v}^{T}}{2}\right)}_{\text{PARTIE SYM DE } \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v}} : \underset{=}{\sigma} - \overbrace{\underbrace{\left(\frac{\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v}^{T}}{2}\right)}_{\text{PARTIE ANTI-SYM DE } \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v}}^{\text{ANTI SYM}} : \overbrace{\underset{=}{\sigma}}^{\text{SYM}}}^{= 0\ !}$$

TENSEUR DES TAUX DE DEFORMATION

$\underset{=}{d}$

TENSEUR DES TAUX DE ROTATION

CONCLUSION :-)

$$\boxed{P_i(t) = \int_V \underset{=}{\sigma} : \underset{=}{d}}$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}}{2}\right) = \underset{\sim}{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underset{\sim}{v}) + \rho\, \underset{\sim}{g}\cdot\underset{\sim}{v} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$$

$\frac{d}{dt}$ QUANTITE DE MVT

$$\rho \frac{D\underset{\sim}{v}}{Dt} = \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \rho\, \underset{\sim}{g}$$

$$\rho c \frac{DU}{Dt} = -\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{q} + r + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$$

$\frac{d}{dt}$ ENERGIE

APPORT PAR LES FRONTIERES

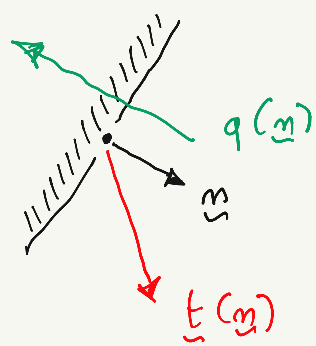
APPORT DE VOLUME

$$\underset{\sim}{q} = -k\,\underset{\sim}{\nabla} T$$

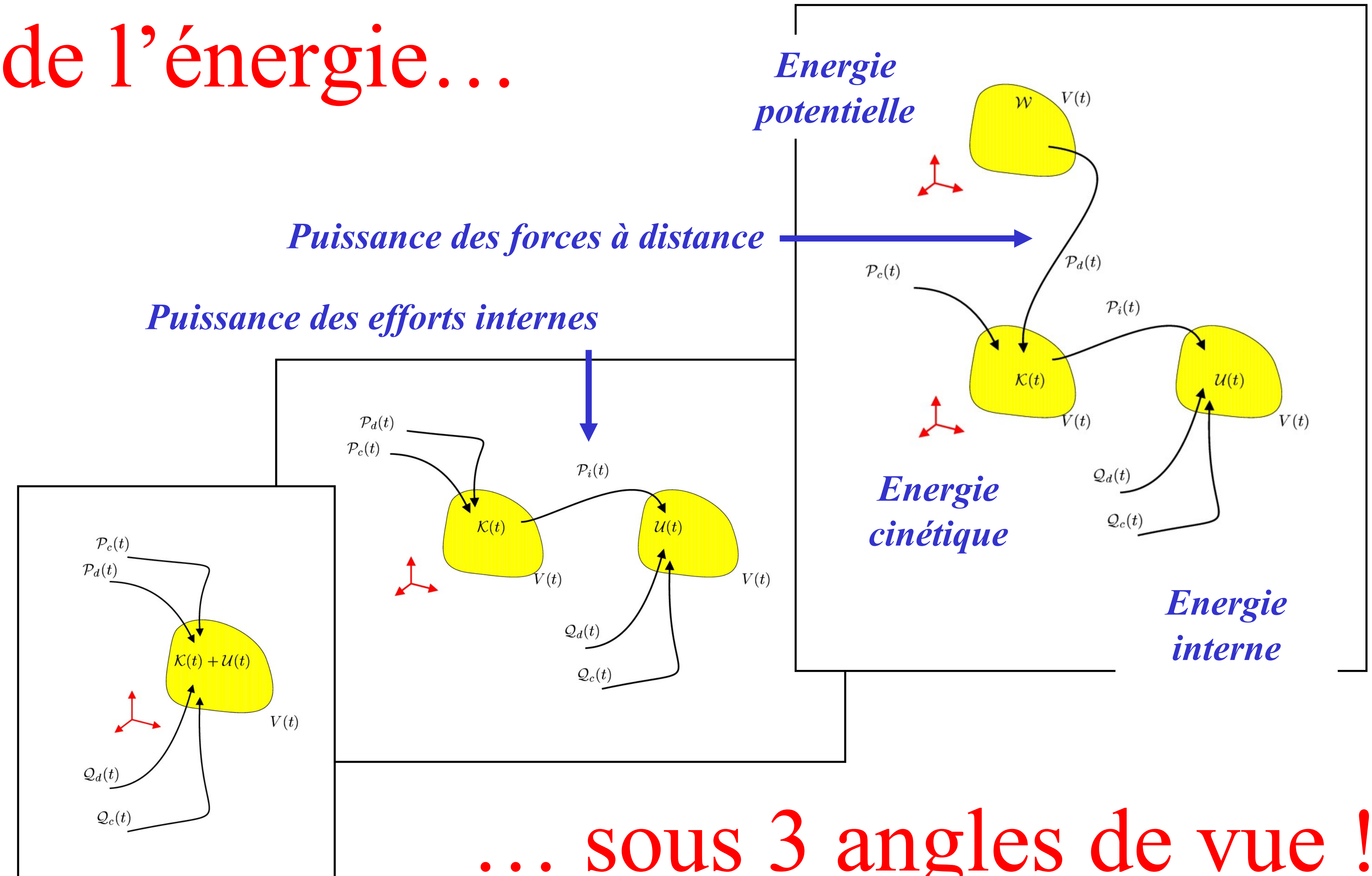
$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{I}} + 2\mu\,\underline{\underline{d}}$$

$$-\underset{\sim}{q}\cdot\underset{\sim}{n} = q(\underset{\sim}{n})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})$$



Conservation de l'énergie…



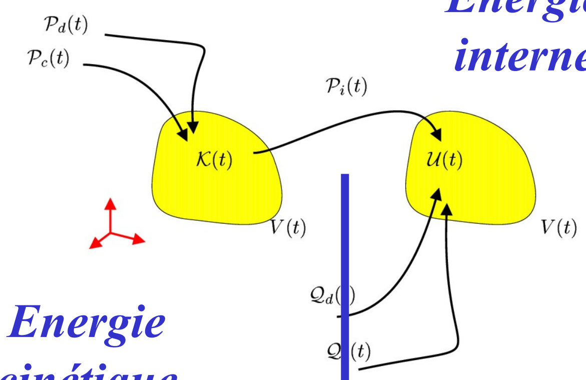
… sous 3 angles de vue !

Puissance des efforts internes

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie interne

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}$$

Formes globales



Energie interne

Energie cinétique

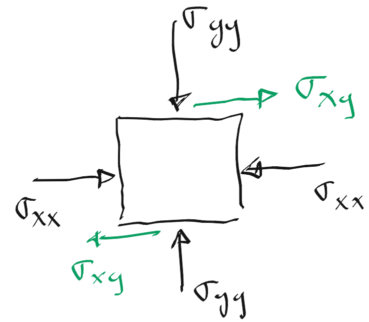
$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$$

Forme locale non-conservative de la conservation de l'énergie cinétique

Puissance des efforts internes

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dV$$

Trois nouveaux acteurs dans notre modèle !



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{xyz}$$

Pression

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$$

Tenseur des extra-contraintes

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

Enthalpie

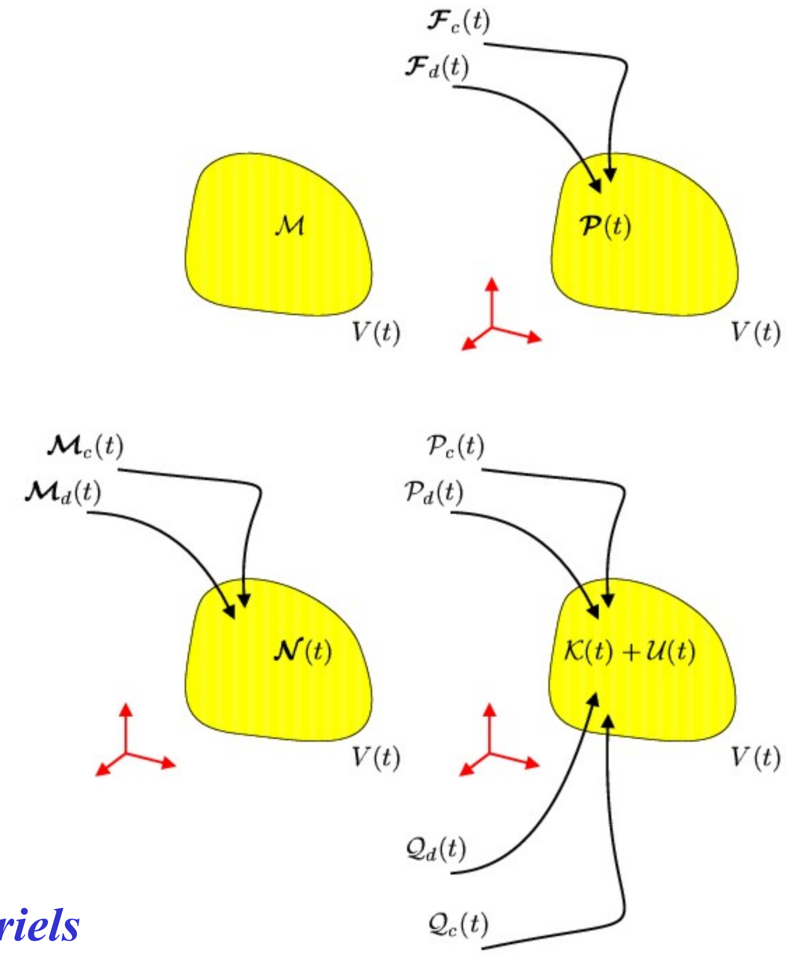
Un peu d'algèbre

$$H = U + \frac{p}{\rho}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{DH}{Dt} &= \rho \left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \right) \\
&= \rho \frac{DU}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}.
\end{aligned}$$

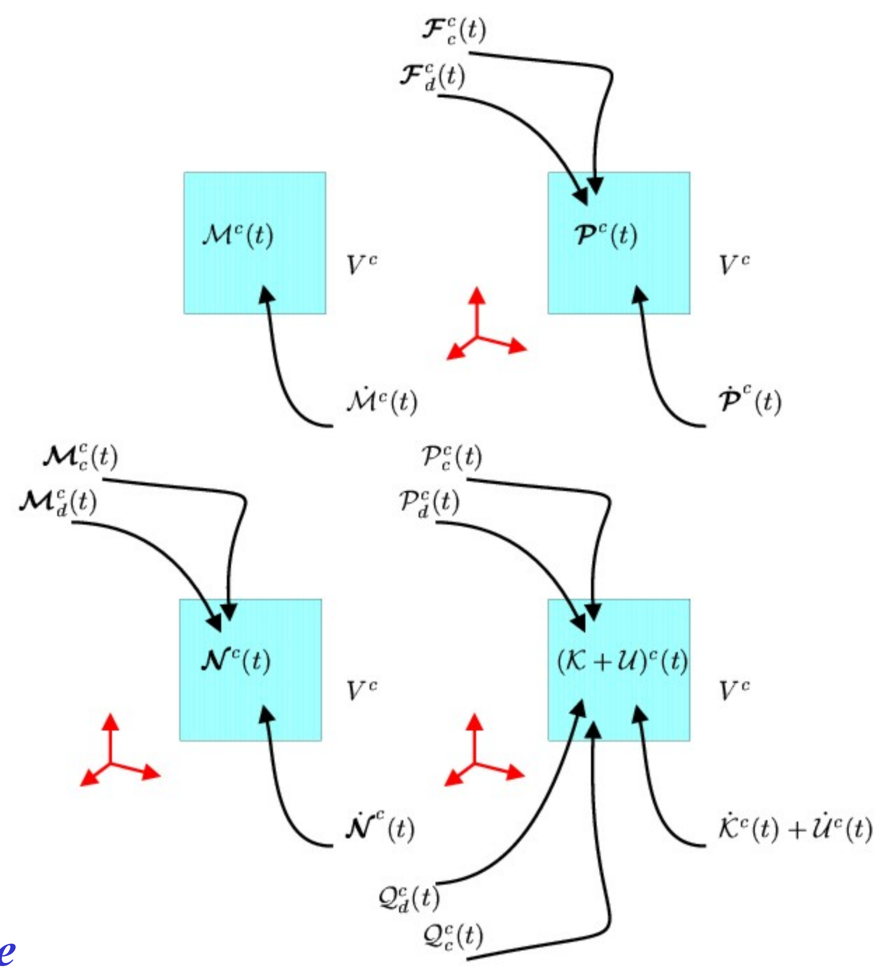
$$\begin{aligned}
\rho \frac{DH}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}, \\
&= -p\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}, \\
&= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \underbrace{\cancel{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v} \right)}}_{=0}.
\end{aligned}$$

Toutes les lois de conservation, en un clin d'oeil…

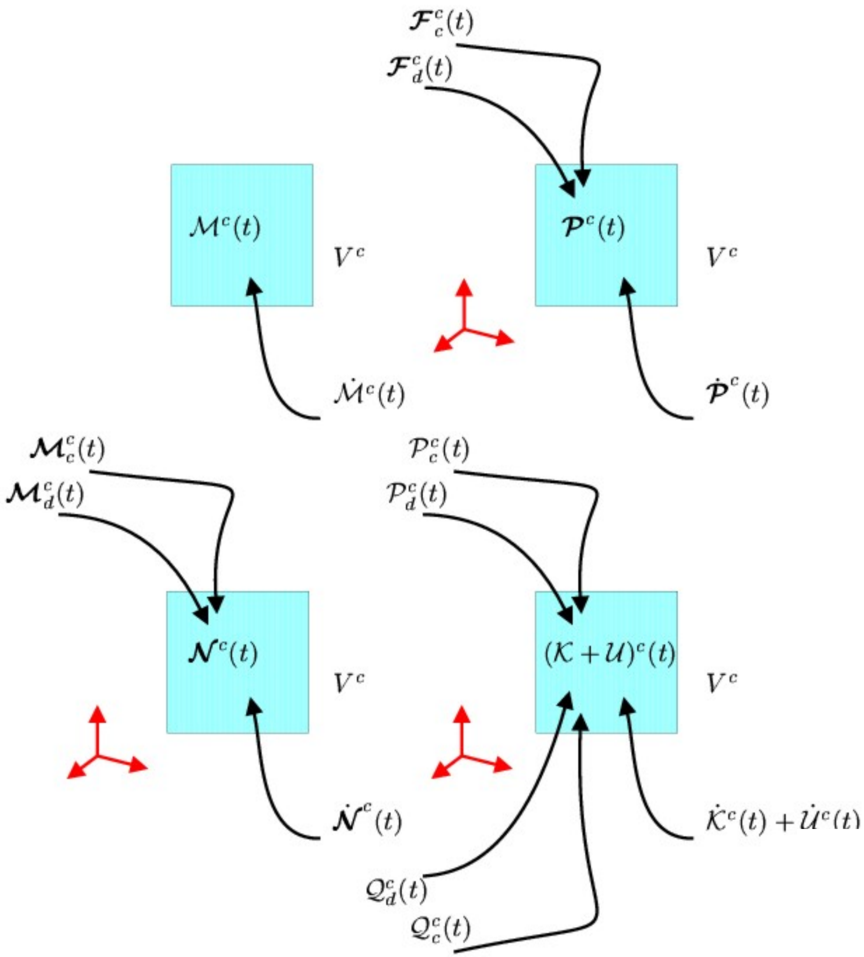


Forme globale
pour des volumes matériels

Sous un autre angle,
ces lois de conservation…



Forme globale
pour des volumes de controle



Comment retrouver les équations locales ?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \quad + \Delta \\
\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\
\frac{\partial (\rho U)}{\partial T} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} U) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}.
\end{aligned}$$

…dont on peut déduire des formes locales

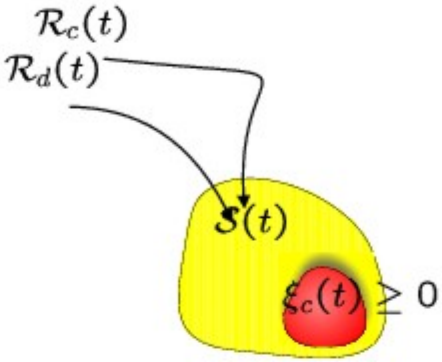
$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \\
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\
q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\
\rho \frac{DU}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

Forme locale dite non-conservative

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \\
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\
q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \\
\frac{\partial (\rho U)}{\partial T} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v} U) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

Forme locale dite conservative

Second principe de la thermodynamique



$$\boxed{\rho\frac{DS}{Dt} \;\geq\; \frac{r}{T} - \frac{1}{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2}\cdot\boldsymbol{\nabla}T,}$$

Inégalité de Clausius-Duhem : $\rho T\frac{DS}{Dt} - \rho\frac{DU}{Dt} \geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T}\cdot\boldsymbol{\nabla}T$

Quelques jolis tenseurs pour construire notre modèle…

$$\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{xy} & d_{yy} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \underbrace{(d_{xx} + d_{yy})}_{\nabla \cdot v}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)\right)}_{\mathbf{d}} + \left(\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)\right)$$

Tenseur des taux de déformation

$$\nabla \cdot v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} / 3$$

$$\mathbf{d} = \underbrace{\overbrace{(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})\frac{\boldsymbol{\delta}}{3}}}_{\mathbf{d}^s} + \underbrace{\left(\mathbf{d} - (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})\frac{\boldsymbol{\delta}}{3}\right)}_{\mathbf{d}^d}$$

Partie sphérique du tenseur des taux de déformation

Partie déviatoire du tenseur des taux de déformation

Viscosité de volume

Viscosité de cisaillement

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\boxed{\hat{\kappa}(p,T)}\mathbf{d}^s + 2\boxed{\hat{\mu}(p,T)}\mathbf{d}^d,\\
\mathbf{q} &= -\boxed{\hat{k}(p,T)}\boldsymbol{\nabla}T,\\
\rho &= \hat{\rho}(p,T),\\
H &= \hat{H}(p,T),\\
\boxed{S} &\boxed{= \hat{S}(p,T).}
\end{aligned}
$$

Conductibilité thermique

L'équation de comportement pour l'entropie n'est utile que pour vérifier que le second principe est bien satisfait !

$$
TdS = dH - \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{p\,d\rho}{\rho^2},
$$

$$
\begin{aligned}
k &\geq 0,\\
\kappa &\geq 0,\\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Contraintes à respecter pour satisfaire Clausius-Duhem

Modèle du fluide visqueux newtonien

Quelques ordres de grandeur

TABLE 2.3.1 / The Viscosity of Some Familiar Materials at Room Temperature

Liquid	*Approximate Viscosity (Pa·s)*
Glass	10^{40}
Molten glass (500°C)	10^{12}
Asphalt	10^{8}
Molten polymers	10^{3}
Heavy syrup	10^{2}
Honey	10^{1}
Glycerin	10^{0}
Olive oil	10^{-1}
Light oil	10^{-2}
Water	10^{-3}
Air	10^{-5}

Adapted from Barnes et al. (1989).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\widehat{\kappa}(p,T)\mathbf{d}^s + 2\widehat{\mu}(p,T)\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\widehat{k}(p,T)\boldsymbol{\nabla} T, \\
\rho &= \widehat{\rho}(p,T), \\
H &= \widehat{H}(p,T), \\
S &= \widehat{S}(p,T).
\end{aligned}
$$

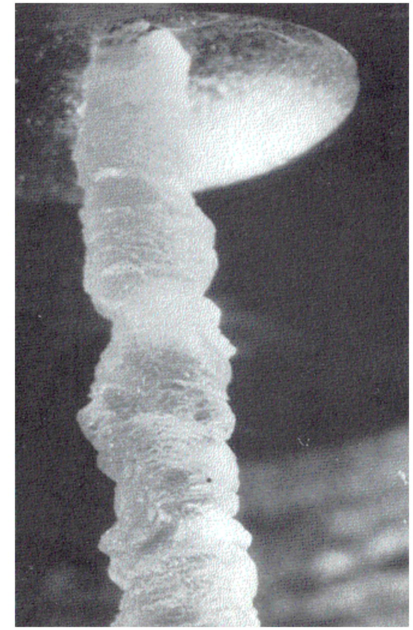
Le compte est bon !

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	$\mathbf{v}$	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$	6
constitution pour le flux calorifique	$\mathbf{q}$	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

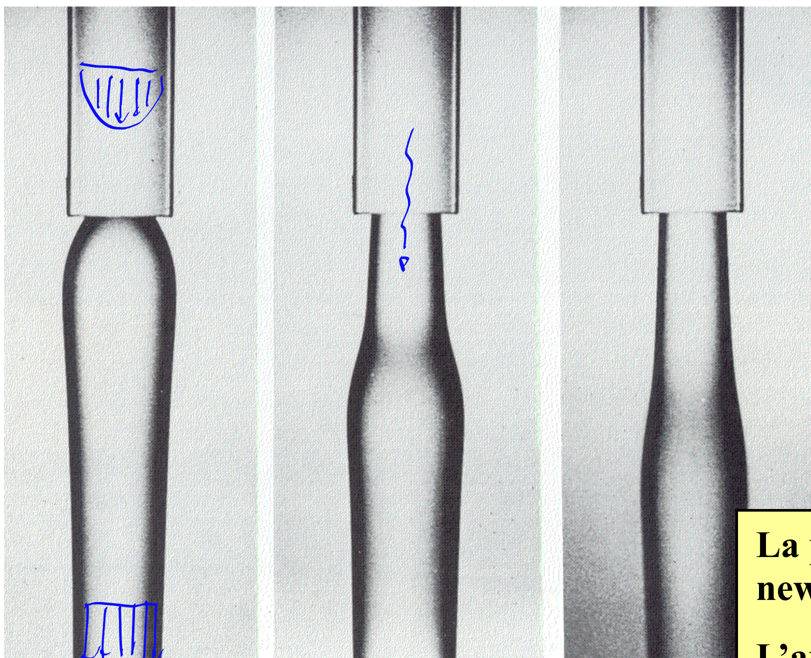
<u>Remarque</u> : si une équation de comportement pour l'enthalpie est donnée… on en déduit automatique l'énergie interne et vice-versa.

$$U = -\frac{p}{\rho} + H$$

De tels gonflement de jets sont imprévisibles avec ce modèle newtonien



(Piau, JNNFM, 90)

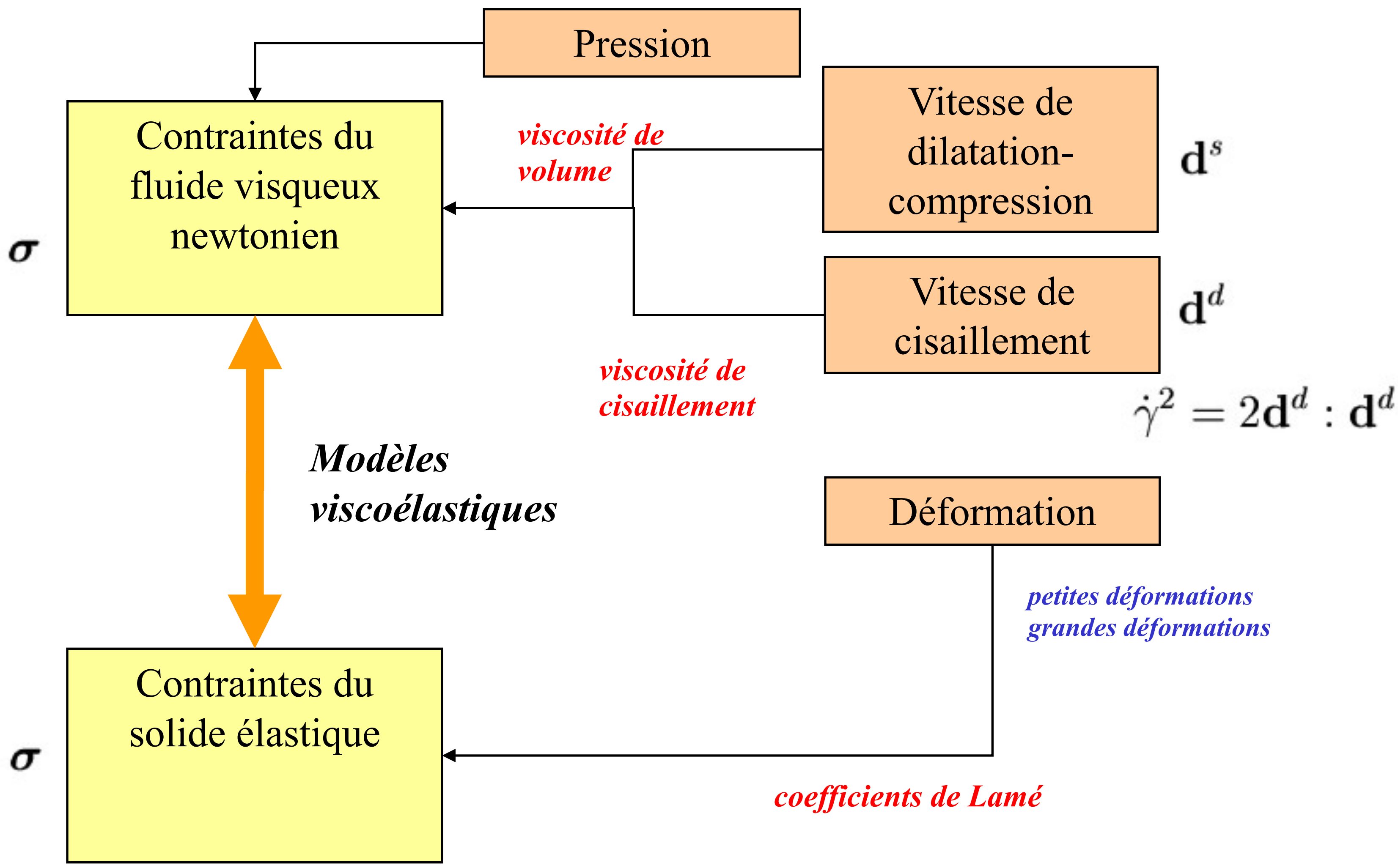


(Giesekus, Rheologica Acta, 68)

La plupart de fluides réels NE SONT PAS des fluides newtoniens…

L'air et l'eau sont toutefois newtoniens et constituent les fluides les plus largement répandus…

Rhéologie : la science du monde magique des équations de comportement…



Simplifications usuelles…

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{NEGATIF}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{POSITIF}} = 0$$

Hypothèses irréalistes

Ecoulement incompressible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ecoulement incompressible et irrotationnel

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

Transformations adiabatiques

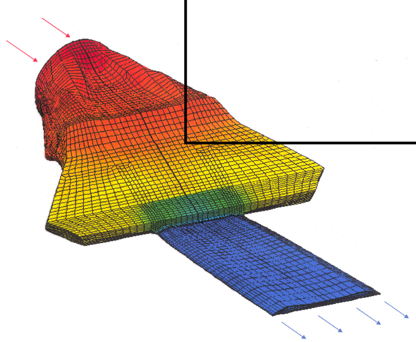
$$q = r = 0$$

Fluide incompressible

$$\rho = cst$$

Fluide parfait

$$\mu = \kappa = 0$$



Hypothèses réalistes

Donc, simplifions…

$$\boldsymbol{\sigma}(p,\mathbf{v}) = -p\boldsymbol{\delta} + \mu(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T)$$
$$\mathbf{q}(T) = -k\boldsymbol{\nabla}T$$
$$U(T) = cT$$

Fluide newtonien à paramètres matériels constants

$U = c_v T$
$H = c_p T$

Ecoulement incompressible

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Dans un écoulement incompressible, il n'y a pas de raison de distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante.
On écrit simplement le symbole c !

Les équations de continuité et de quantité de mouvement ne font pas intervenir la température : on peut résoudre la dynamique de l'écoulement sans tenir compte des aspects thermiques !

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &= 0, \\ \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}, \end{aligned}}$$
$$\rho c\frac{DT}{Dt} = 2\mu(\mathbf{d}:\mathbf{d}) + r + k\boldsymbol{\nabla}^2T,$$

Ecoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants.

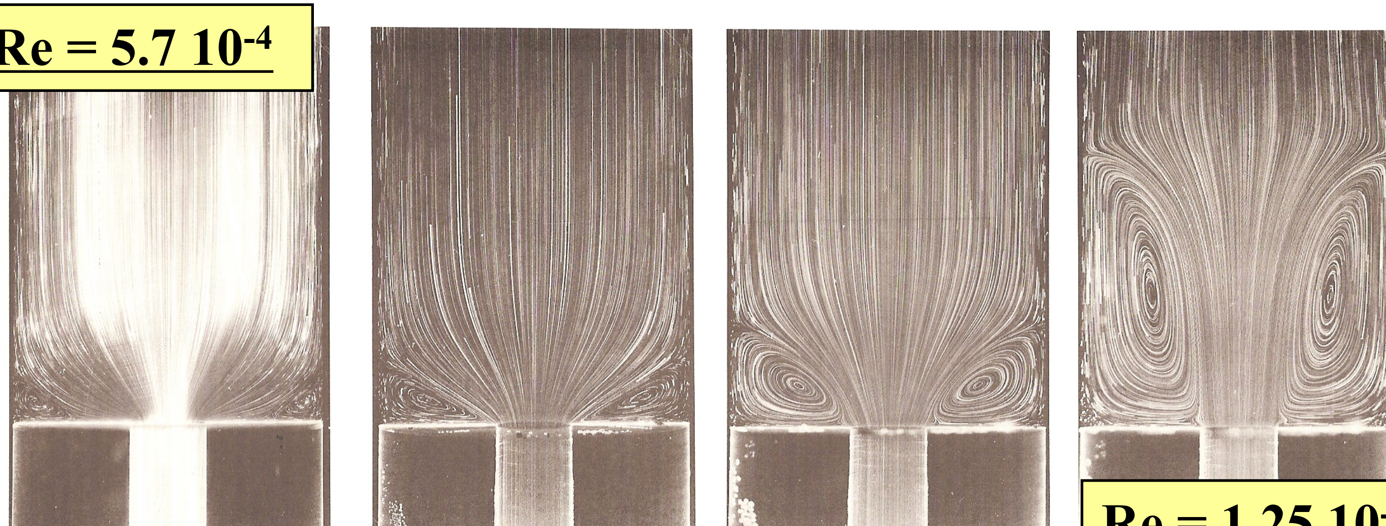
Ecoulements incompressibles stationnaires

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

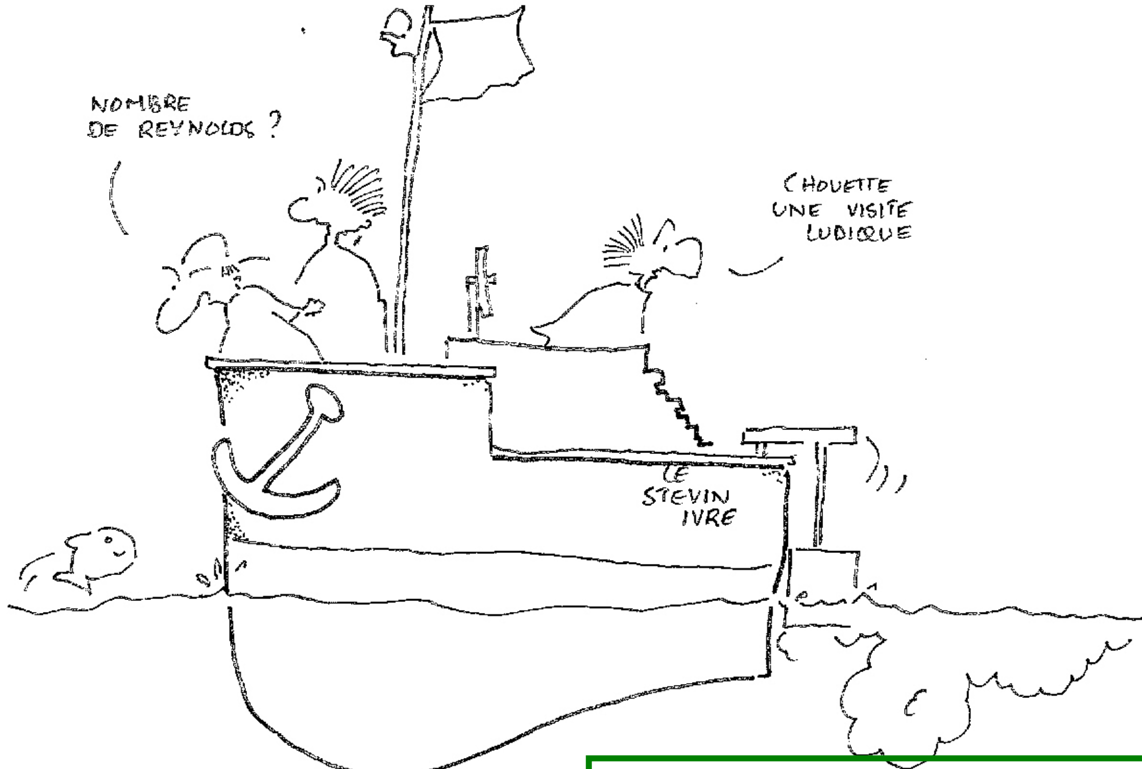
Re = $5.7\ 10^{-4}$



Re = $1.25\ 10^{-2}$

(Boger, Hur, Binnington, JNFM 1986)

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$
\begin{aligned}
U &= 0.1 \; m/s \\
L &= 10 \; m \\
\rho &= 10^3 \; kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3} \; kg/ms
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}
$$

ADIMENSIONNALISER !
SO FUN !
SO HARD !

$$\boxed{\begin{aligned} &\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{v} = 0 \\ &\rho (\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla}) \underset{\sim}{v} = - \underset{\sim}{\nabla} p + \mu \underset{\sim}{\nabla}^2 \underset{\sim}{v} \end{aligned}}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}' = L \underset{\sim}{\nabla}$$

$$\underset{\sim}{x}' = \frac{\underset{\sim}{x}}{L} \qquad \underset{\sim}{v}' = \frac{\underset{\sim}{v}}{U} \qquad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

$$\left[\frac{kg}{m^3}\right]\left[\frac{m^2}{s^2}\right] = \Big[\underbrace{\overbrace{\frac{kg\, m}{s^2}}^{N} \quad \frac{1}{m^2}}_{Pa}\Big]$$

$$\underset{\sim}{\nabla}' \cdot \underset{\sim}{v}' = 0$$

$$\cancel{\frac{\rho U^2}{L}} (\underset{\sim}{v}' \cdot \underset{\sim}{\nabla}') \underset{\sim}{v}' = - \cancel{\frac{\rho U^2}{L}} \underset{\sim}{\nabla}' p' + \frac{\mu U}{L^2} (\underset{\sim}{\nabla}')^2 \underset{\sim}{v}'$$

$$\cancel{\frac{\rho U^2}{L}} \left\{ \frac{\mu}{\rho U L} \right\} = \frac{1}{Re}$$

$\boxed{2}$

ADIMENSIONNALISER !

SO FUN :-)

SO HARD :-C

$$\boxed{\begin{aligned} &\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{v} = 0 \\ &\rho (\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla}) \underset{\sim}{v} = - \underset{\sim}{\nabla} p + \mu \underset{\sim}{\nabla}^2 \underset{\sim}{v} \end{aligned}}$$

$$\underset{\sim}{x}' = \frac{\underset{\sim}{x}}{L} \qquad \underset{\sim}{v}' = \frac{\underset{\sim}{v}}{U} \qquad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2}$$

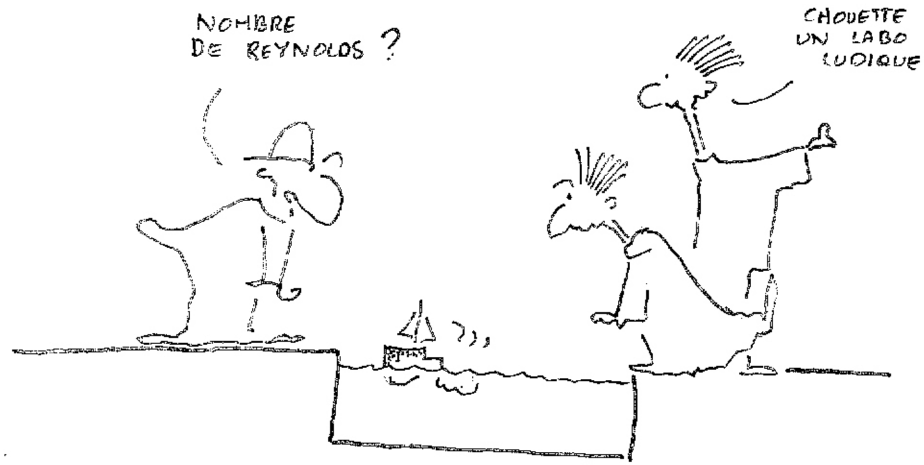
$$[kg/m^3][m^2/s^2] = [\underbrace{\frac{kg\, m}{s^2}}\ \underbrace{\quad}_{[Pa]}\ ] = [\frac{N}{m^2}]$$

$$\underset{\sim}{\nabla}' \cdot \underset{\sim}{v}' = 0$$

$$\frac{\rho U^2}{L} (\underset{\sim}{v}' \cdot \underset{\sim}{\nabla}') \underset{\sim}{v}' = - \frac{\rho U^2}{L} \underset{\sim}{\nabla}' p' + \underbrace{\frac{\mu U}{L^2}}_{\frac{\rho U^2}{L} \frac{\mu}{\rho U L}} (\underset{\sim}{\nabla}')^2 \underset{\sim}{v}'$$

$$\frac{\mu}{\rho U L} = \frac{1}{Re}$$

Adimensionaliser : pourquoi ?



$$
\begin{aligned}
U &= 10\ m/s \\
L &= 0.1\ m \\
\rho &= 10^3\ kg/m^3 \\
\mu &= 10^{-3}\ kg/ms
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6}
$$

Adimensionaliser

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \\
\mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{U}, \\
p' &= \frac{p - \boxed{p_0}}{\rho U^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\
(\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' &= -\nabla' p' + \frac{1}{Re}(\nabla')^2 \mathbf{v}'
\end{aligned}
$$

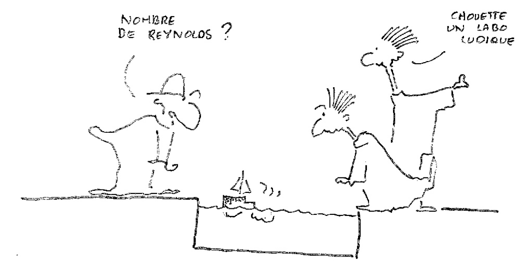
<u>**Dans un écoulement incompressible, seul un écart de pression peut être caractéristique… Ajouter ou retirer une pression constante ne change rien à l'écoulement !**</u>

En variables adimensionnelles,

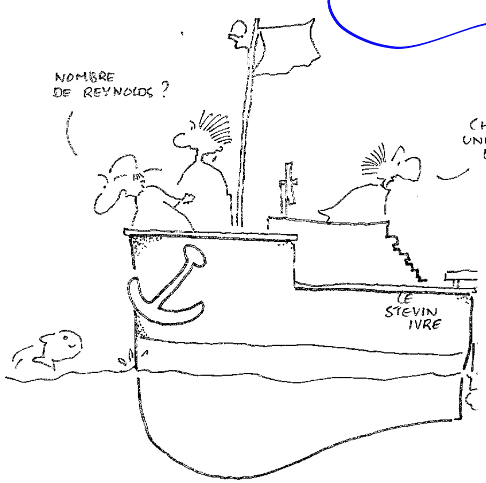
$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = 10^6$$

Ils ont le même nombre de Reynolds :-)

$$U = 10\ m/s$$
$$L = 0.1\ m$$
$$\rho = 10^3\ kg/m^3$$
$$\mu = 10^{-3}\ kg/ms$$



$$\frac{p_{mer}(\mathbf{x}) - p_{mer}(0)}{\rho U_{mer}^2} = p'_{mer}(\mathbf{x}') = p'_{labo}(\mathbf{x}') = \frac{p_{labo}(\mathbf{x}) - p_{labo}(0)}{\rho U_{labo}^2}$$



$$U = 0.1\ m/s$$
$$L = 10\ m$$
$$\rho = 10^3\ kg/m^3$$
$$\mu = 10^{-3}\ kg/ms$$

…ces deux écoulements sont identiques.

C’est quoi physiquement le nombre de Reynolds ?

Effets visqueux
Diffusion de la quantité de mouvement

$$\boxed{\underbrace{\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}}_{\mathcal{O}(\rho U^2/L)}} = -\boldsymbol{\nabla} p + \boxed{\underbrace{\mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{v}}_{\mathcal{O}(\mu U/L^2)}}$$

Effets d’inertie
Transport de la quantité de mouvement

$$Re = \frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Nombre de Reynolds

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu}$$

à éventuellement savoir, à titre de *double check*

Born: 23 Aug 1842 in Belfast, Ireland

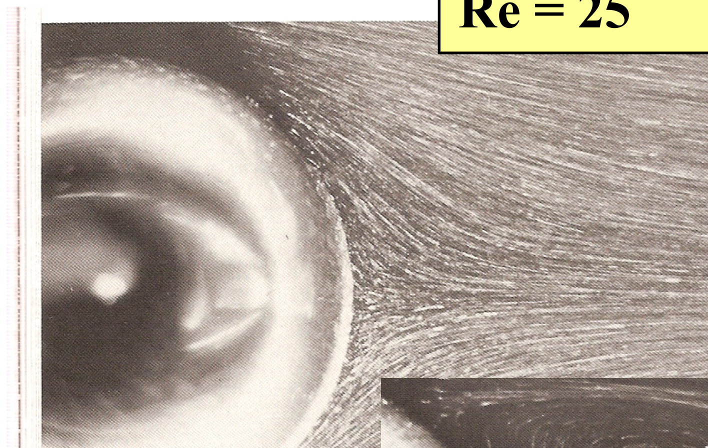
Died: 21 Feb 1912 in Watchet, Somerset, England

$$\frac{\textbf{Forces d'inertie}}{\textbf{Forces de viscosité}}$$

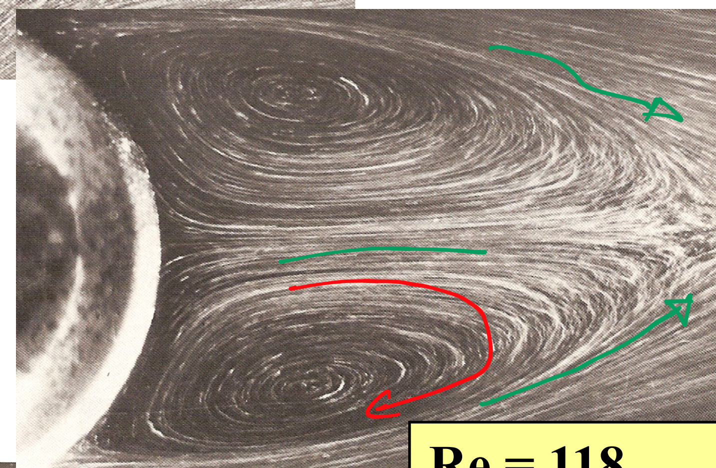
à savoir !

Que se passe-t-il lorsque l'on augmente le nombre de Re ?

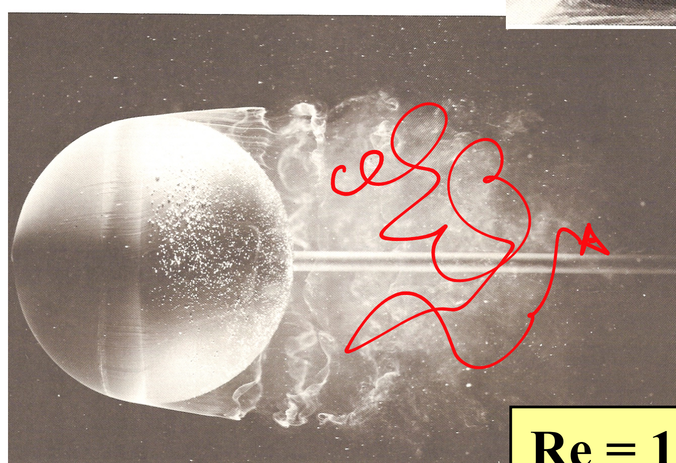
Re = 25



LAMINAIRE :-)



Re = 118



TURBULENT

Re = 15000

(Van Dyke, 1982)

Re très très petit…

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ 0 &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}\end{aligned}$$

Le terme d'inertie est négligeable

Ecoulements incompressibles rampants

Equations de Stokes

Le terme visqueux est négligeable

Ecoulements incompressibles irrotationnels

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p\end{aligned}$$

…et Re très très grand !

Equations d'Euler

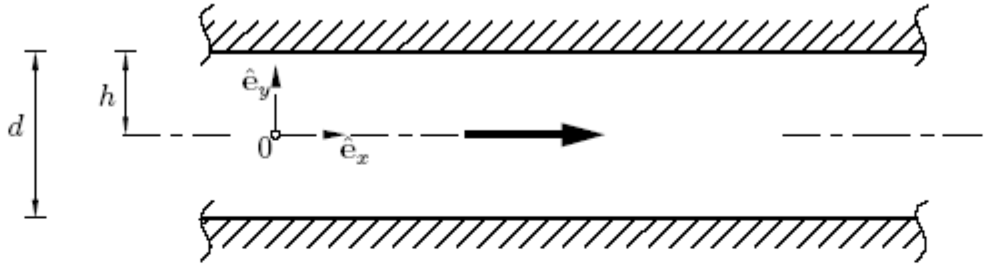
Ecoulements incompressibles stationnaires plans

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}
$$

Ecoulements 3D – 2D – 1D



Ecoulements établis :

- Une seule vitesse u
- Pas de variations de u le long de l'axe de la conduite (c'est-à-dire x)

Un écoulement établi est un écoulement dont le profil transversal de vitesse est le même quelle que ce soit la section transversale à l'écoulement.

La section doit évidemment être constante !

Ecoulements incompressibles stationnaires plans <u>établis</u>

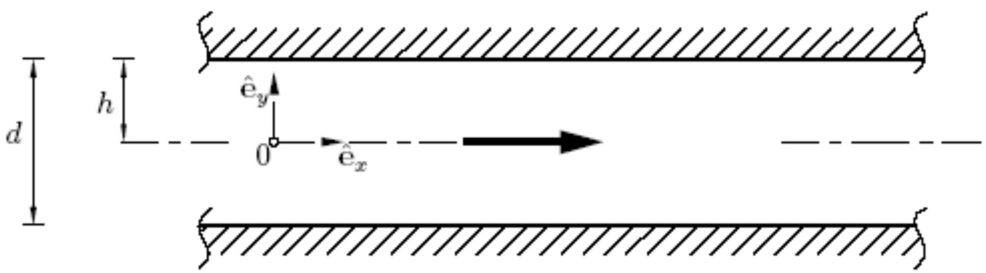
$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$$

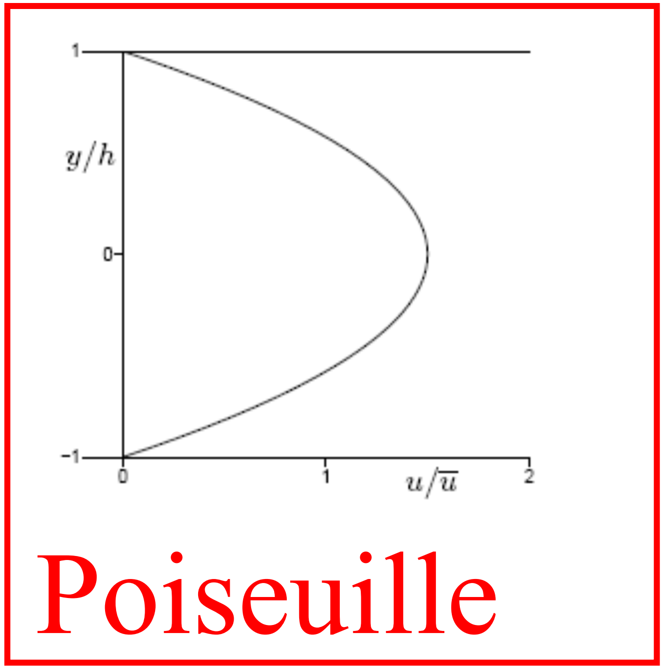
$$\rho\left(\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

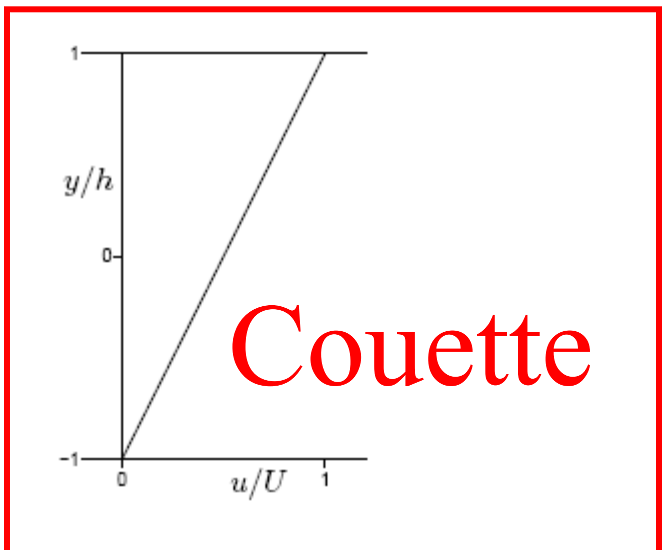
$$\rho\left(\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$$

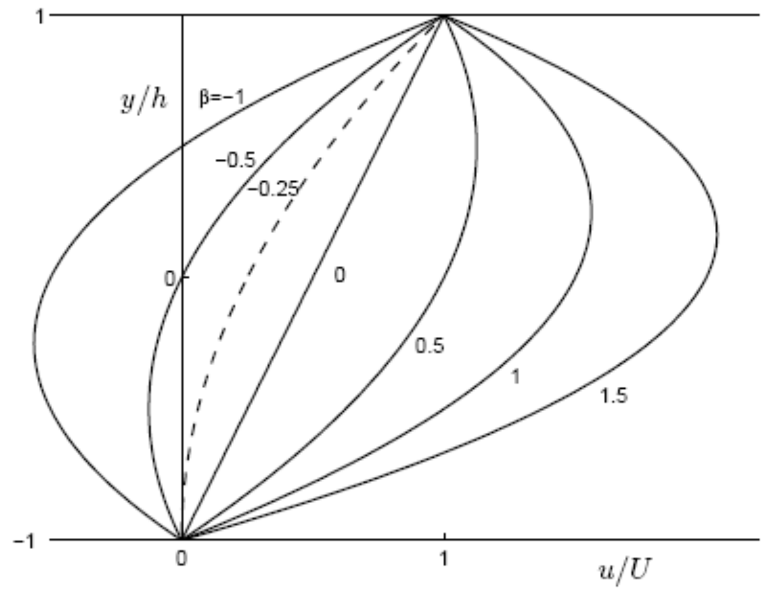
En imposant v=0 sur une des parois…

$$\boxed{0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{d^2u}{dy^2}}$$




1
0
−1
y/h
0
1
2
u/ū
Poiseuille

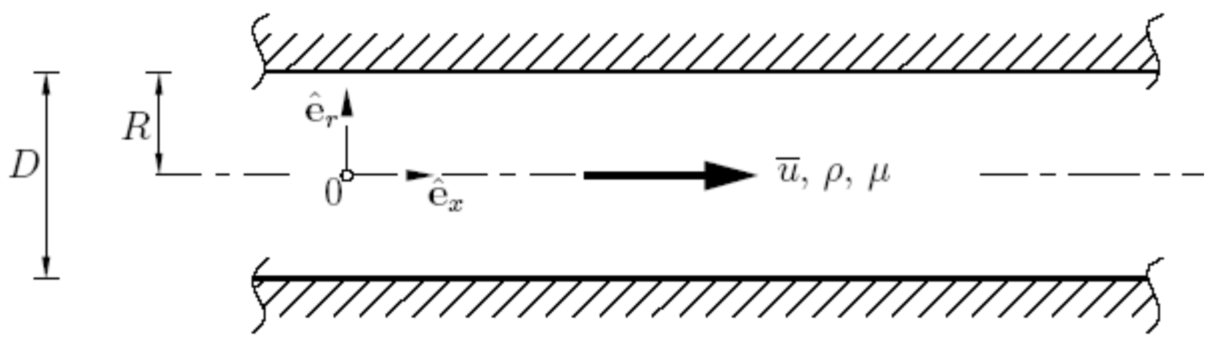

1
0
−1
y/h
0
1
u/U
Couette


1
−1
y/h
β=−1
−0.5
−0.25
0
0
0.5
1
1.5
0
1
u/U

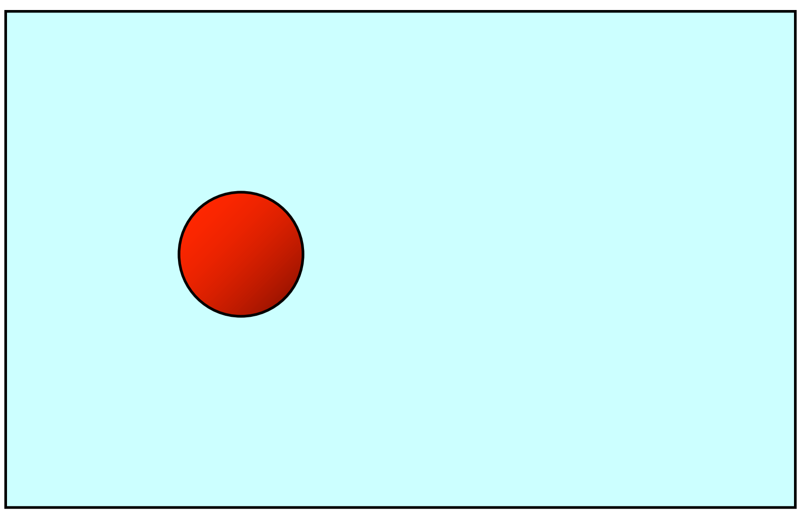
Ecoulements incompressibles stationnaires axisymétriques <u>établis</u>

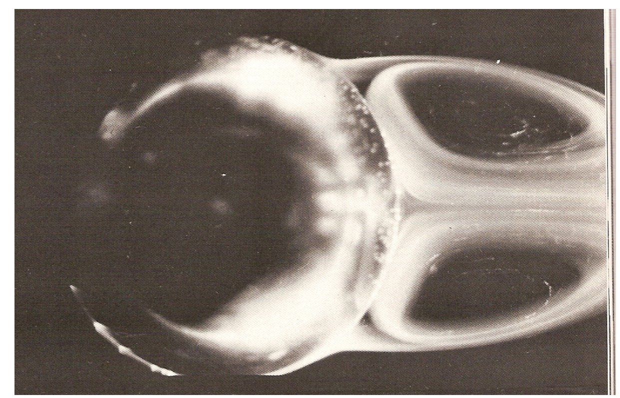
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v) &= 0 \\
\rho\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right) \\
\rho\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}
$$



Evaluer la force de trainée à partir d'une mesure du profil de vitesses en aval…





Taneda 1956
(from An Album of Fluid Motion, Van Dyke)

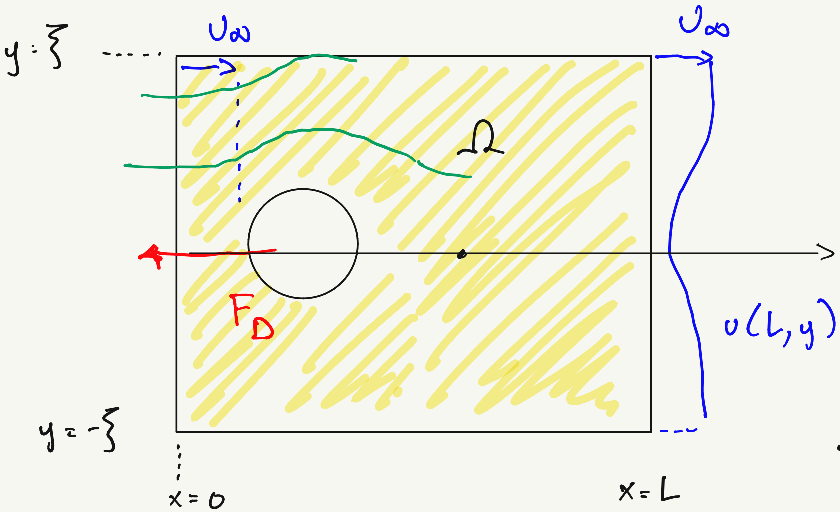
Volume de controle
Ensemble de points eulériens

4

CALCUL DE LA FORCE DE TRAINEE

ECOULEMENT HORIZONTAL 2D INCOMPRESSIBLE STATIONNAIRE

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$



$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho u \, (\underline{v} \cdot \underline{n})}_{} = - F_D$$

$$2 \left[\int_0^{\xi} -\rho U_\infty^2 + \int_0^{\xi} \rho u^2 + \underbrace{\int_0^{L} \rho U_\infty v \, dx}_{} \right]$$

$$\rho U_\infty \underbrace{\int_0^L v \, dx}_{\int_0^{\xi} (U_\infty - u)}$$

PAR CONS GLOBALE DE LA MASSE

$$\rho U_\infty \int_0^L \int_0^{\xi} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{= -\frac{\partial u}{\partial x}} dy \, dx = \rho U_\infty \int_0^{\xi} \underbrace{\int_0^L -\frac{\partial u}{\partial x} \, dx}_{(U_\infty - u)} dy$$

PAR CONS LOCALE DE LA MASSE :-)

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho u \,(\underline{v}\cdot\underline{n})}_{\cdots} = -F_D$$

$$2\left[\cancel{\int_0^{\xi} -\rho U_\infty^2} + \int_0^{\xi} \rho u^2 + \underbrace{\int_0^{L} \rho U_\infty v \, dx}_{\cdots}\right]$$

$$\underbrace{\rho U_\infty \int_0^{L} v \, dx}_{\int_0^{\xi} (\cancel{U_\infty} - u)}$$

PAR
CONS GLOBALE
DE LA
MASSE

$[N/m]$

$$-F_D = 2\rho \int_0^{\xi} u^2 - u U_\infty \, dx$$

$$\frac{F_D}{2\rho U_\infty^2} = \underbrace{\int_0^{\xi} \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dx}_{[m]}$$

$$\left[\frac{kg}{m^3}\right]\left[\frac{m^2}{s^2}\right] = \left[\frac{kg\, m}{s^2} \frac{1}{m^2}\right] = \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$\downarrow$

$$\frac{F_D}{2\rho U_\infty^2} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dx$$