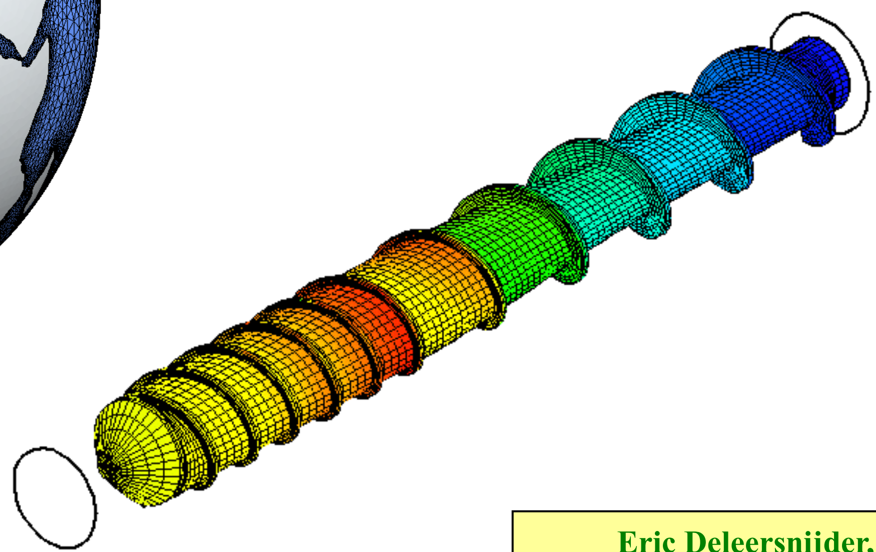
Physique (ou mécanique des fluides)



Eric Deleersnijder,
Vincent Legat,

Préface !

CONSTRUCTION D'UN MODELE
POUR
PREDIRE
L'EVOLUTION
D'UN MILIEU
CONTINU

EDP
BILANS / CONSERVATION
COMPORTEMENT

1 MASSE
2 ENERGIE
3 QUANTITE DE MVT
4 MOMENT DE LA QUANTITE DE MVT (*)

CE N'EST PAS VRAIMENT UN PRINCIPE ....

* SOLIDES ELASTIQUES

* FLUIDES NEWTONIENS

C'EST FAUX !

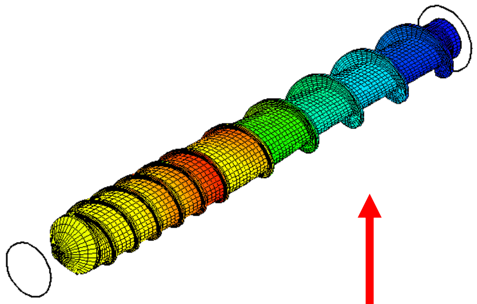
1 LITRE D'EAU 10^{23} MOLECULES

1 ORDI 10^{10} OP/SEC

10^{13} SEC

100.000 ANS

Construction d'un modèle
pour prédire l'évolution
d'un milieu continu



La mécanique des milieux continus…

Construction
d’un modèle pour prédire l’évolution
d’un milieu continu

Equations aux dérivées partielles

- Equations de conservation
- Equations de comportement

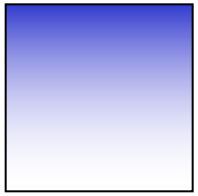
Conditions aux limites

- Conditions frontières
- Condition initiales

Construction
d'un modèle pour prédire l'évolution
d'un milieu continu

Dynamique moléculaire de l'air

1 litre d'air
10^{23} molécules



Ordinateur

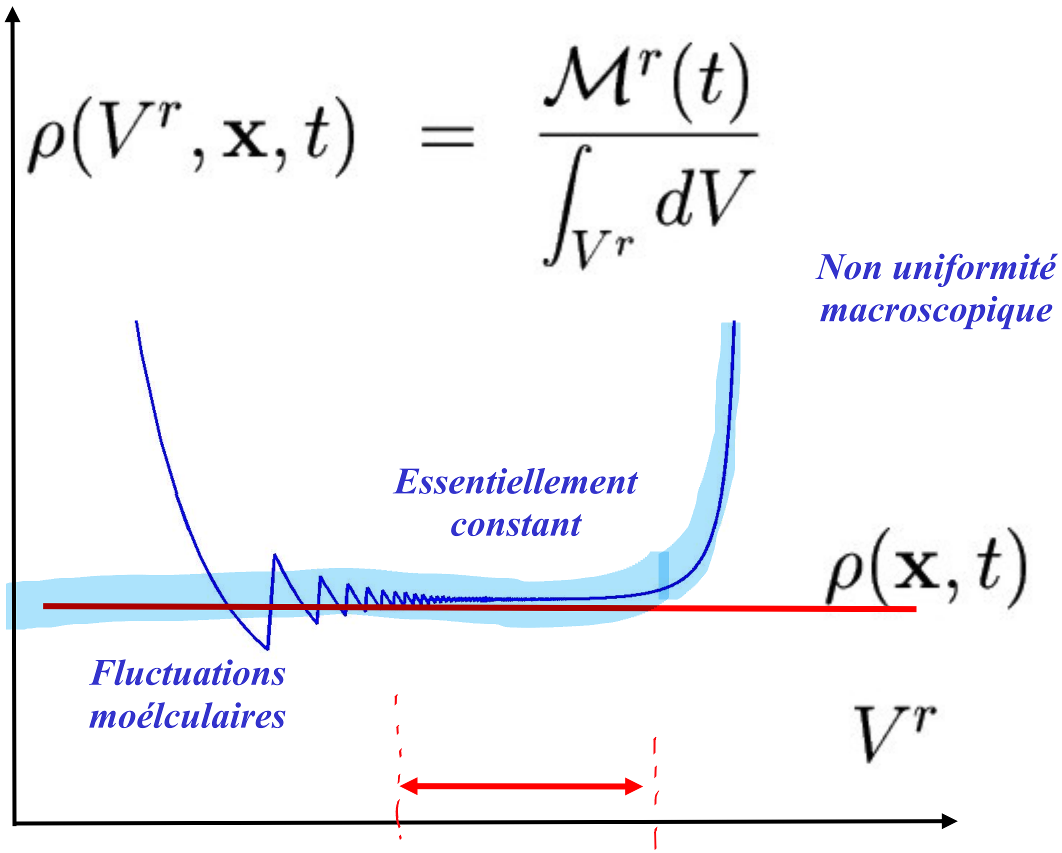
10^{10} opérations par seconde
10^{13} secondes ou 100.000 années
juste pour référencer une fois chaque molécule

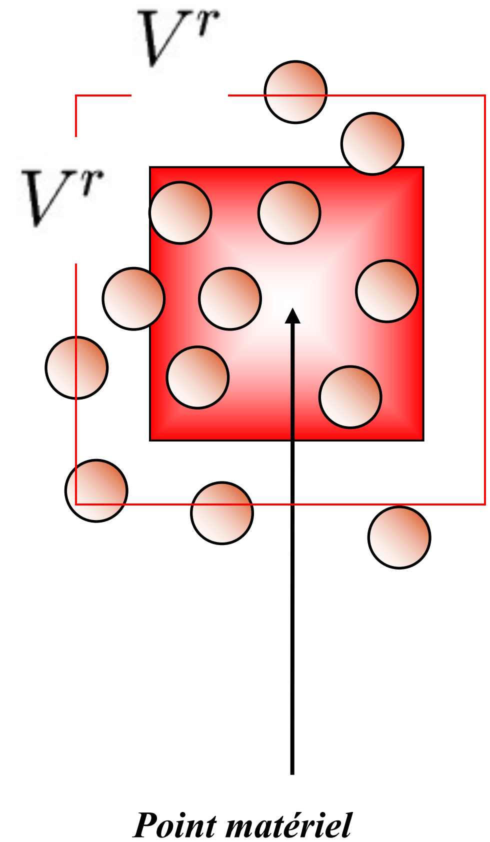
La prédiction avec la dynamique moléculaire est tout-à-fait impossible pour des écoulements complexes

Hypothèse du modèle continu

La densité obtenue comme une moyenne…

$$\rho(V^r, \mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{M}^r(t)}{\int_{V^r} dV}$$

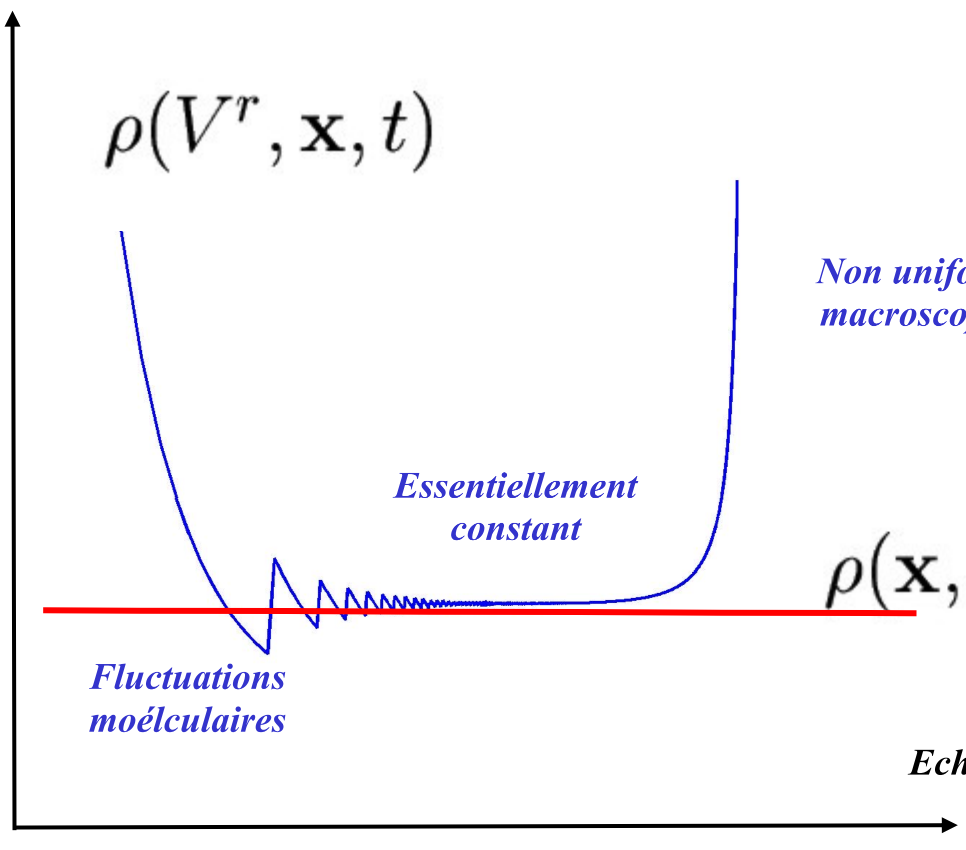




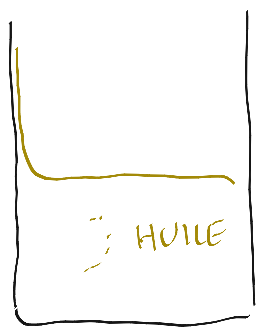
Hypothèse des milieux continus

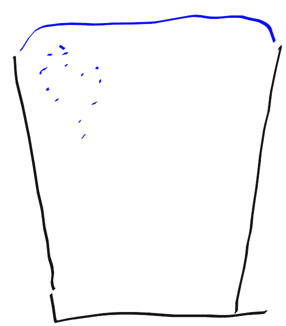
Le comportement de nombreux systèmes est essentiellement le même que si on supposait qu'ils étaient parfaitement continus.

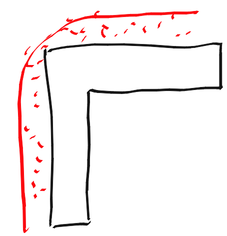
Expérimentalement, on observe bien une séparation des échelles, typiquement 10^{15}



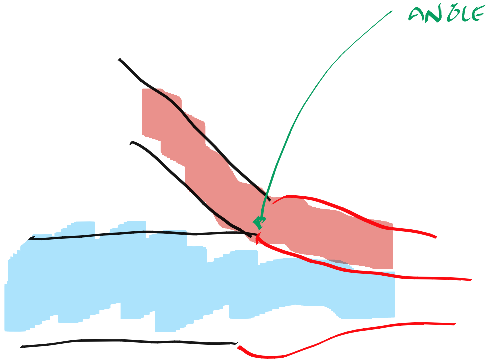
Et pourtant, c’est faux !

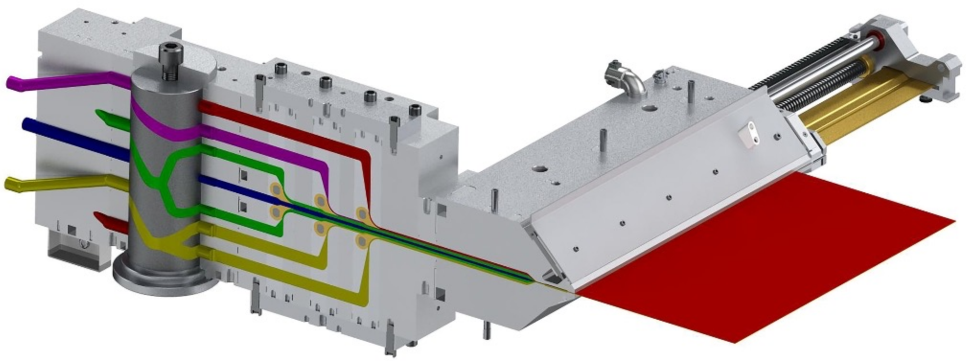




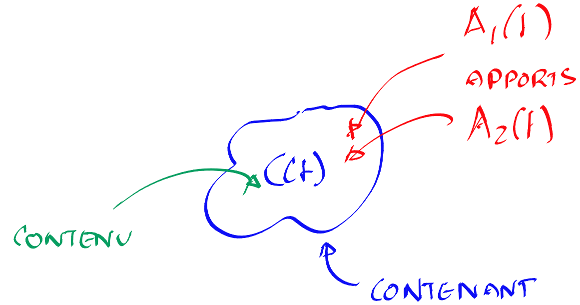


Et pourtant, c'est faux !





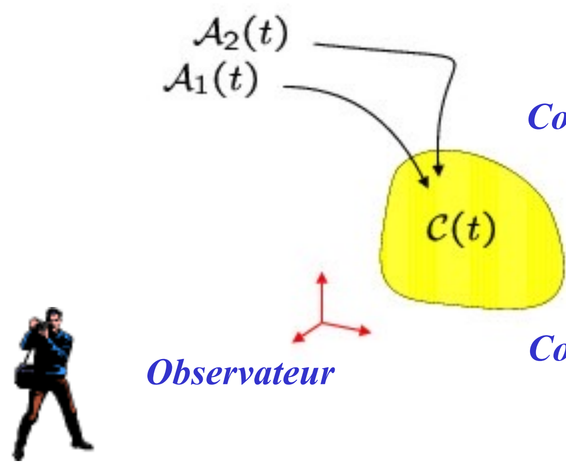
Lois de conservation



$$\frac{d}{dt} C(t) = A_1(t) + A_2(t)$$

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \ldots$$

Apports extérieurs

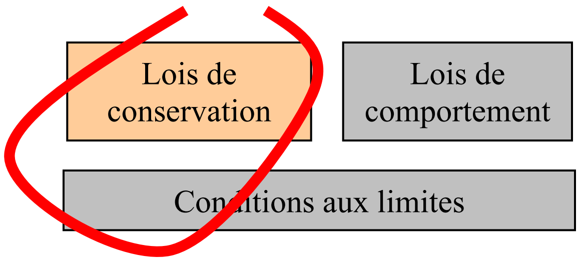


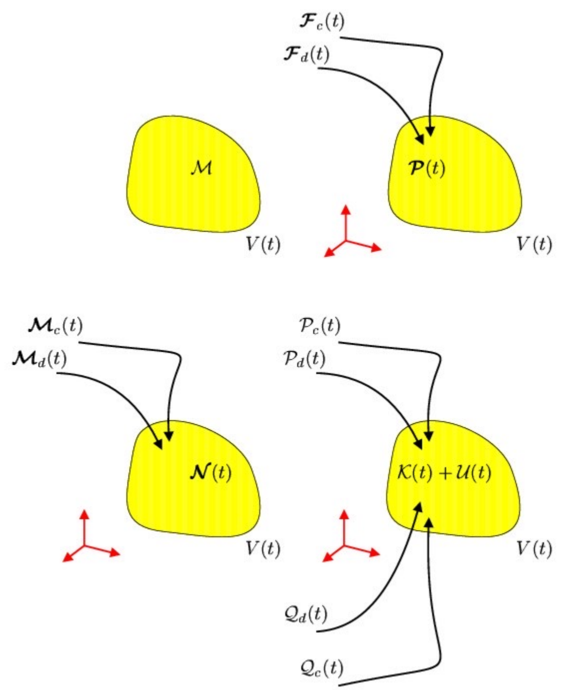
Contenu : masse, quantité de mvt, énergie…

Observateur

Contenant : volume matériel ou volume de controle

Lois de bilan,
lois de comportement,
conditions aux limites.



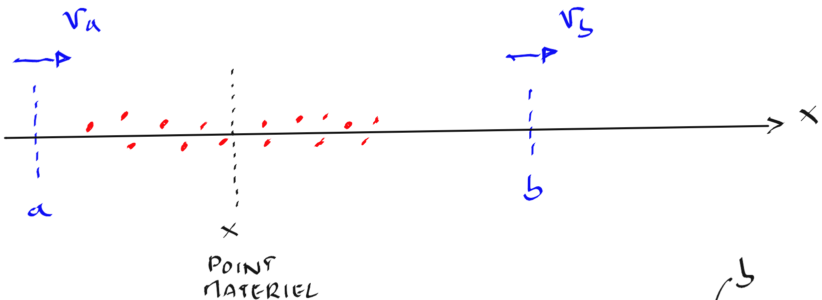


Bilan de la masse,
Bilan de la quantité de mouvement,
Bilan du moment de la quantité de mouvement
Bilan de l'énergie.

Bilan de masse pour un volume de contrôle

$\forall$ INTERVALLE a, b

ACCROISSEMENT DE MASSE = CE QUI ENTRE − CE QUI SORT



$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\,dx = \rho_a v_a - \rho_b v_b \quad \forall a,b}$$

FORME GLOBALE

$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx + \left[\rho v\right]_a^b = 0 \qquad \forall a,b$$

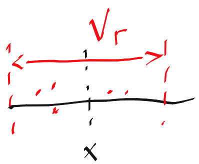
$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\,dx = 0$$

$$\int_a^b \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)}_{h(x,t)}\,dx = 0 \qquad \forall a,b$$

SI ρ, v CONTINUS

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0}$$

FORME LOCALE



$$\underbrace{\rho(x,t)}_{} = \frac{M}{V_r} \quad [kg/m]$$

MASSE / LONGUEUR

DENSITE LINEIQUE DE MASSE

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \underline{v}) = 0}$$

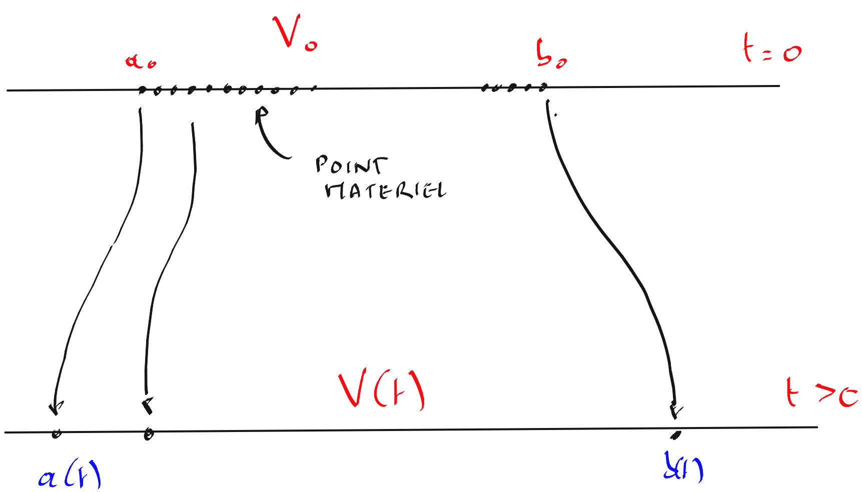
Bilan de masse pour un volume matériel

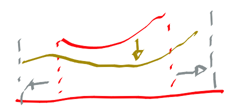
ENSEMBLE DE POINTS MATERIELS QUI SE DEPLACENT AVEC UNE VITESSE MACROSCOPIQUE

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{3} v_i(x_j, t)\,\hat{\underline{e}}_i = v_i(x_j, t)\,\hat{\underline{e}}_i$$

CONVENTION D'EINSTEIN

INDICES REPETES $\rightarrow \sum$

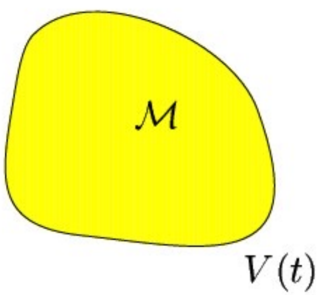




$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x,t)\,dx = 0$$

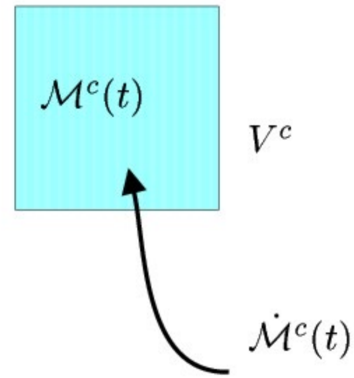
$$\int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx + \rho_b \underbrace{\left.\frac{dx}{dt}\right|_b}_{v_b} - \rho_a \underbrace{\left.\frac{dx}{dt}\right|_a}_{v_a} = 0$$

Bilan de masse



$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \qquad \forall \; V(t),$$

Volume matériel
Ensemble de points matériels en mouvement se déplaçant à une vitesse macroscopique v(**x**,t)

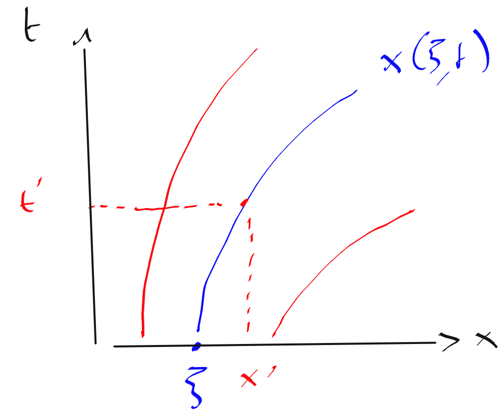


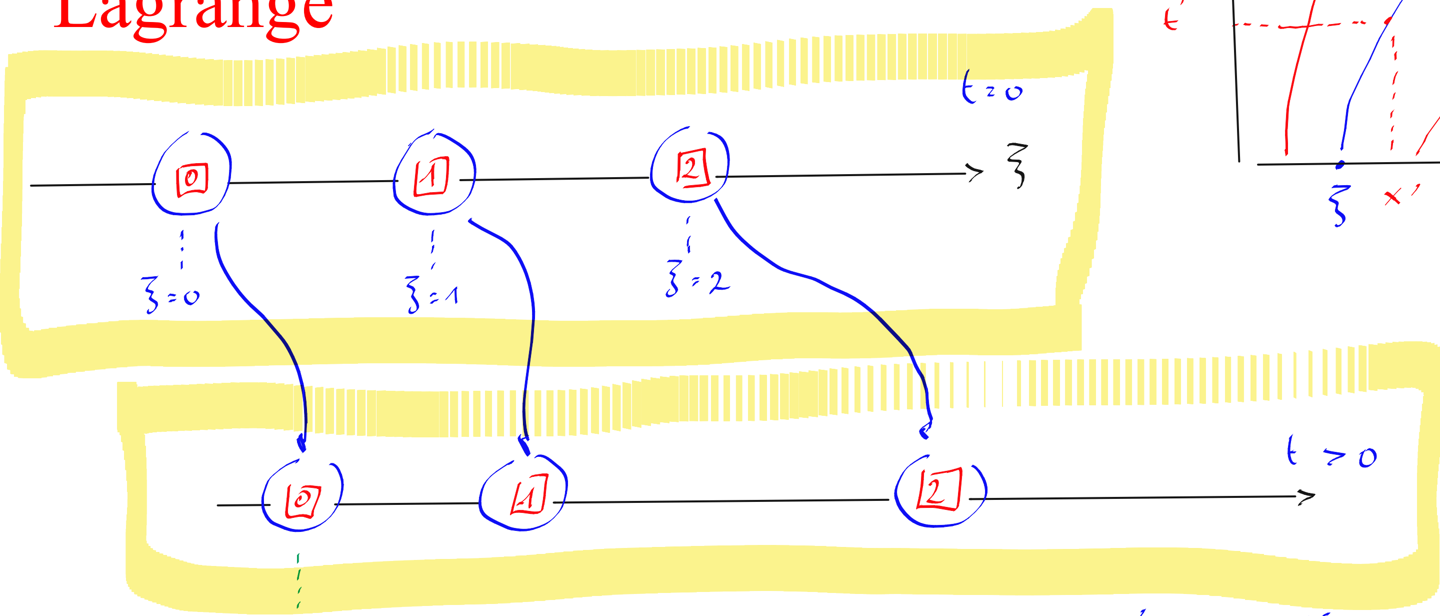
$$\frac{d\mathcal{M}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{M}}^c(t), \qquad \forall \; V^c,$$

Volume de controle
Ensemble de points eulériens

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i$$

Euler versus Lagrange





$\xi = 0$ ← COORDONNEES LAGRANGIENNES / MATERIELLES

$x = 0.4$ ← COORDONNEES EULERIENNES / SPATIALES

LE POINT MATERIEL $\xi = 0$

OCCUPE LA POSITION $x = 0.4$

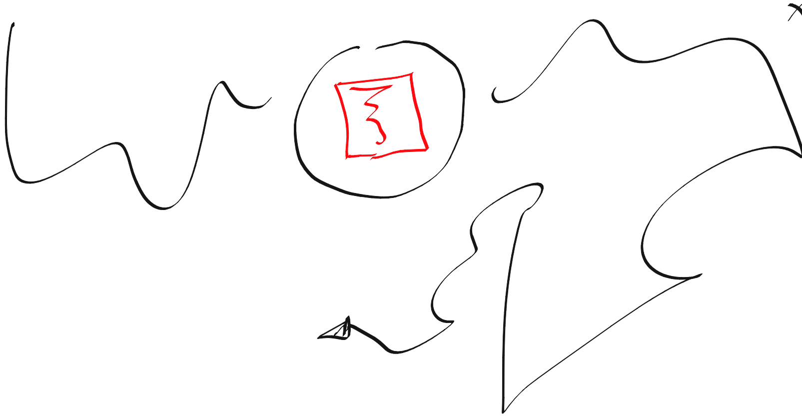
@ L'INSTANT t

Une unique vitesse mais deux représentations !

$\xi(x,t)$

$x(\xi,t)$

$x(\xi,t)$



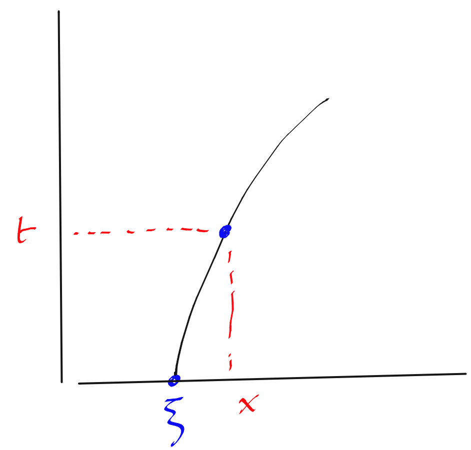
$$\boxed{\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}_L\big(\underbrace{\xi(x,t)}_{\xi},t\big) = \underset{\sim}{v}_E\big(\underbrace{x(\xi,t)}_{x},t\big)}$$

$$v_L(\xi,t) = \frac{dx}{dt}(\xi,t)$$

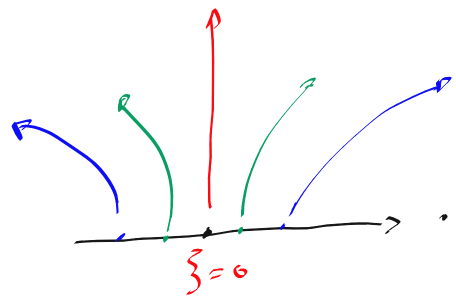
$$a_L(\xi,t) = \frac{dv_L}{dt}(\xi,t)$$

$x = x_L(\xi,t)$

$x_E(x,t) = x$:-)



Un petit exemple !



$$x(\xi, t) = \xi + \xi t^2$$

$$v(\xi, t) = 2\xi t$$

$$a(\xi, t) = 2\xi$$

$$\boxed{\underbrace{v_L(\xi(x,t),t)}_{\frac{2xt}{1+t^2}} = v_E(x,t)}$$

$$x(\xi, t) = \xi + \xi t^2$$

$$\xi(x,t) = \frac{x}{1+t^2}$$

$$\boxed{\underbrace{a_L(\xi(x,t),t)}_{2\xi(x,t) = \frac{2x}{1+t^2}} = a_E(x,t)}$$

Et l’accélération !
C’est la dérivée de la vitesse ?

$$v_E = \frac{2xt}{1+t^2}$$

$$v_E(x,t) = \frac{2xt}{1+t^2}$$

$$a_E(x,t) = \frac{2x}{1+t^2}$$

$$a_E = \frac{d}{dt}\left[v_E(x(\xi,t),t) \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial v_E}{\partial x}}\ \boxed{\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_E}} + \boxed{\frac{\partial v_E}{\partial t}}$$

$$\cancel{\frac{2t}{1+t^2}} \qquad \cancel{\frac{2xt}{1+t^2}} \qquad \frac{2x}{1+t^2} - \cancel{\frac{4xt^2}{(1+t^2)^2}}$$

Concept
de dérivée matérielle

$$a_E = \underbrace{\frac{\partial v_E}{\partial t} + v_E \frac{\partial v_E}{\partial x}}_{\frac{d v_E}{dt}} \qquad \frac{Dv}{Dt}$$

DERIVEE MATERIELLE

$\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x}, t)$

$\underset{\sim}{a}(\underset{\sim}{x}, t)$

$$\boxed{\underset{\sim}{a} = \underbrace{\frac{\partial \underset{\sim}{v}}{\partial t} + (\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla})\, \underset{\sim}{v}}_{\frac{D\underset{\sim}{v}}{Dt}}}$$

Bilan de masse

$$\mathcal{M} = \int_{V(t)} \rho \, dV$$

Forme globale

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0, \qquad \forall \; V(t),$$

satisfaite pour une certaine classe de systèmes et à tout instant

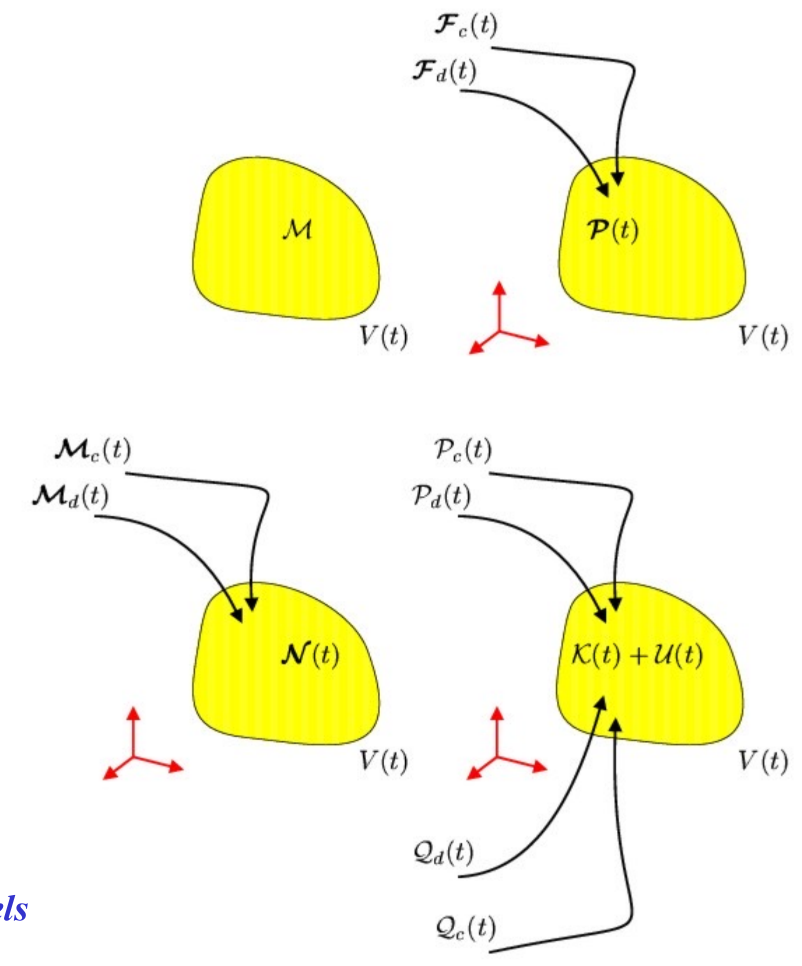
sous certaines conditions de continuité..

Forme locale

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

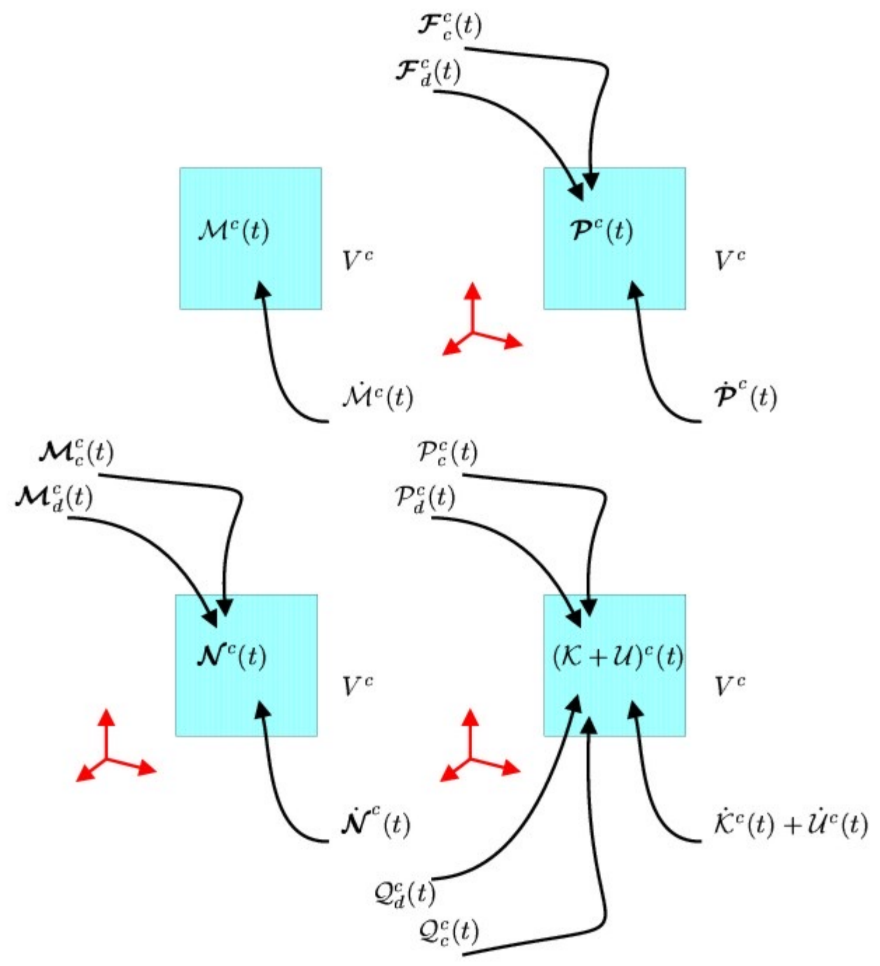
satisfaite en tout point et à tout instant

Toutes les lois de conservation, en un clin d'oeil…



Forme globale
pour des volumes matériels

Sous un autre angle, ces lois de conservation…



Forme globale
pour des volumes de controle

…dont on peut déduire des formes locales

$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}$ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ $q(\mathbf{n}) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$ $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$ $\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$

Forme locale
dite non-conservative

$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}$ $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ $q(\mathbf{n}) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ $\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$ $\frac{\partial (\rho U)}{\partial T} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}$

Forme locale
dite conservative