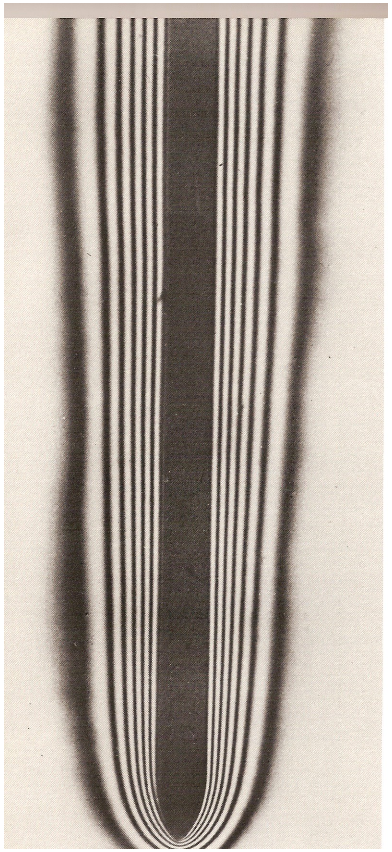
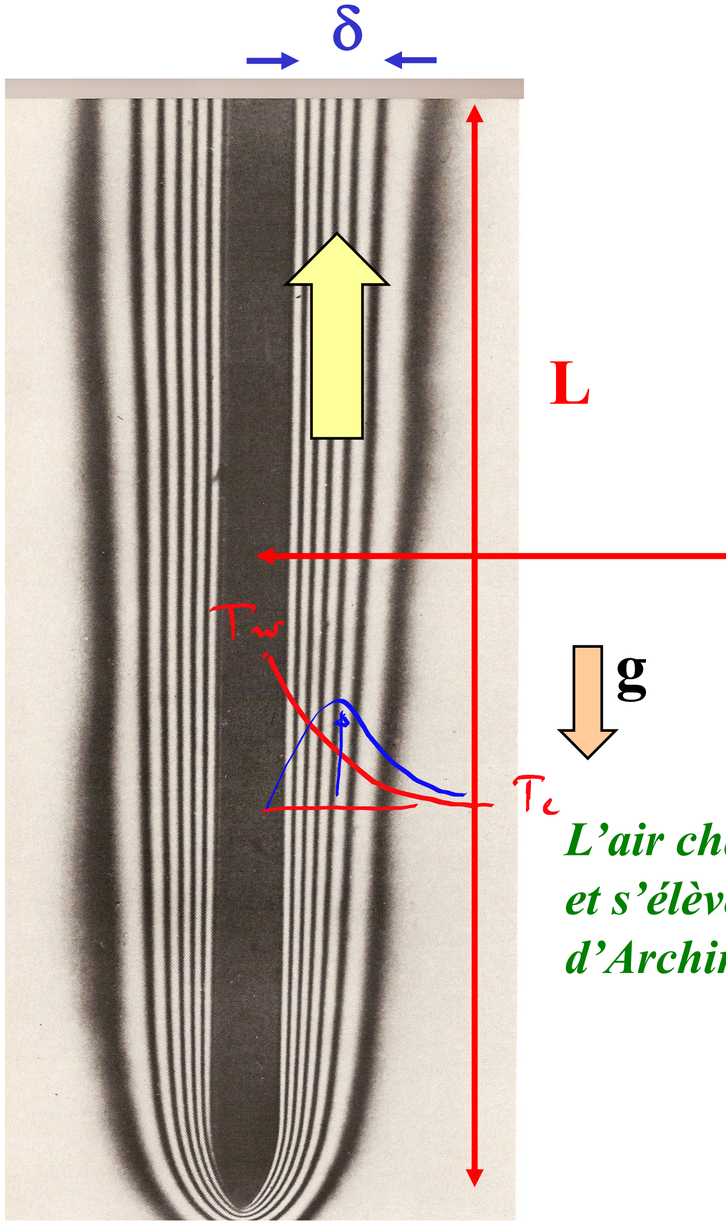
Ecoulements avec deux échelles spatiales (suite)



Convection naturelle le long d'une plaque verticale : écoulement laminaire permanent

Lubrification et convoyage hydraulique : butée Michell

Convection naturelle le long d'une plaque suspendue dans l'air



Plaque chaude

L'air chaud près de la plaque devient plus léger et s'élève <u>naturellement</u> sous l'effet de la force d'Archimède (flottabilité)(buoyancy)

La photo a été dilatée d'un facteur six dans le long de l'axe horizontal !
(Gebhart, University of Pennsylvania)

Le fluide se dilate (un peu) sous l'effet de la chaleur…

Coefficient de dilatation thermique

$$\boxed{\beta \triangleq -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}}$$

$$\rho(p,T) = \rho_0(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1} + \dots)$$

Où faut-il vraiment tenir compte de cette petite variation de densité ?

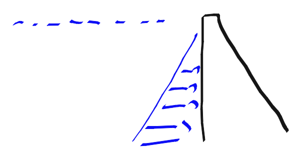
Equations
de Boussinesq

$$\rho_0 \underbrace{\left(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1}\right)}_{\simeq 1} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \overbrace{\cancel{-\frac{\partial p}{\partial y}}}^{\rho_0 g} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \cancel{\rho_0} \left(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1}\right) g$$

SUPPOSONS QUE LA PRESSION EST HYDROSTATIQUE

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

$$p(x,y) = -\rho_0 g y + p_0$$

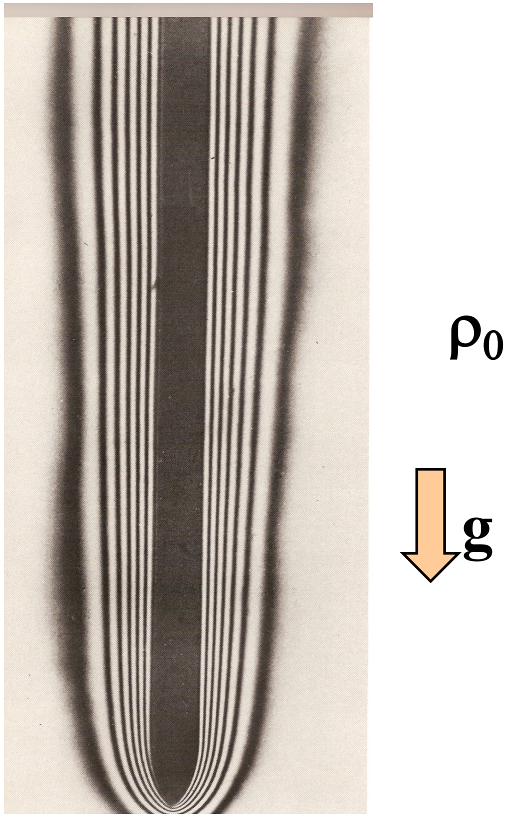


MAIS EN FAIT IL FAUDRA PAS VRAIMENT LE SUPPOSER

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_0 \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\ &- \rho_0 \left(1 - \beta(T - T_0)\right) g \end{aligned}}$$

La pression est globalement hydrostatique*

$$\boxed{p(x,y) \simeq p_0(y) = -\rho_0 g y}$$



**** En toute rigueur, il s'agit d'un résultat qu'on pourrait déduire mathématiquement des équations, mais pour se faciliter la vie, nous allons supposer qu'il s'agit simplement d'une approximation simplificatrice !***

$$\rho_0(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1}) \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y}}_{\rho_0 g} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho_0(1 - \beta(T - T_0))g$$

$$\downarrow$$

$$\rho_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_0 \beta(T - T_0)g$$

Approximation de Boussinesq

On néglige les variations de masse volumique dans tous les termes sauf dans la poussée d'Archimède…

**** Au passage, on observe que cette hypothèse n'a vraiment du sens que dans le cas où la pression est hydrostatique … En d'autres mots, on introduit soit l'approximation hydrostatique, soit l'approximation de Boussinesq, mais on doit introduire en tous cas une approximation :-)***

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} &= \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \boxed{+ \beta(T - T_0)g} \\
u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
$$

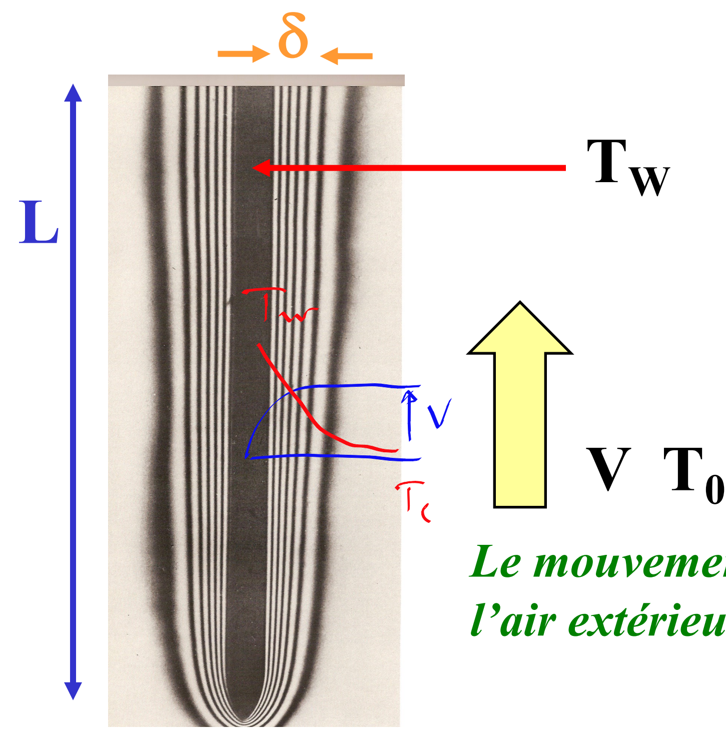
La présence de température dans le terme d'Archimède couple ici le problème de l'écoulement et le problème thermique !

Equations de Navier-Stokes avec l'hypothèse de Boussinesq

Valentin-Joseph Boussinesq

né à Saint-André-de-Sangonis (Hérault) le 13 mars 1842, mort le 19 février 1929 à Paris

"Il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g, tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci"



Mais, tout d'abord, un peu de convection forcée

Le mouvement vertical de l'air extérieur est forcé

Problème de l'écoulement

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

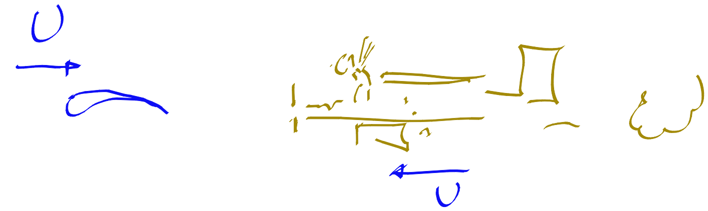
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

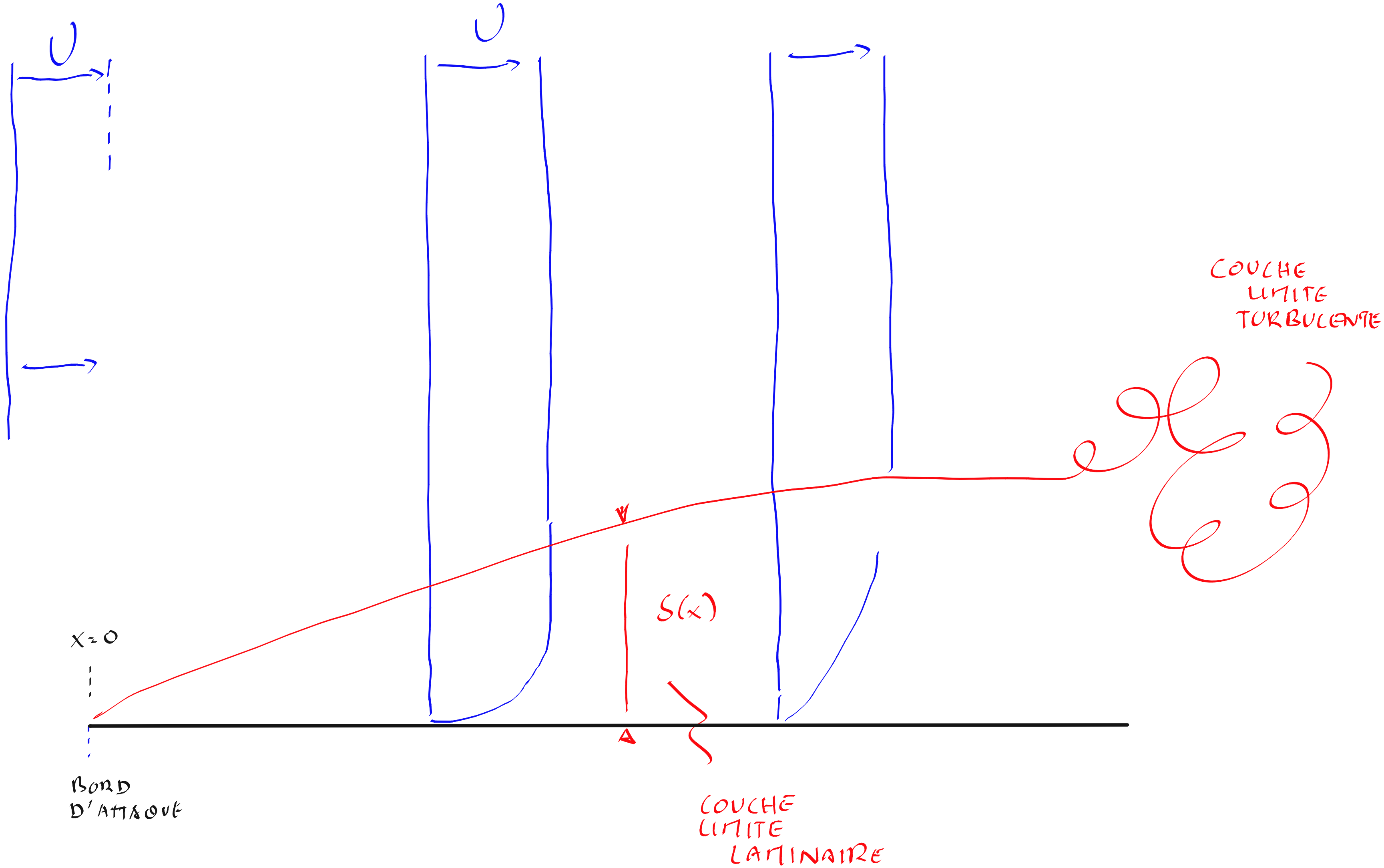
$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu\, \mathbf{d} : \mathbf{d} + r + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Problème thermique

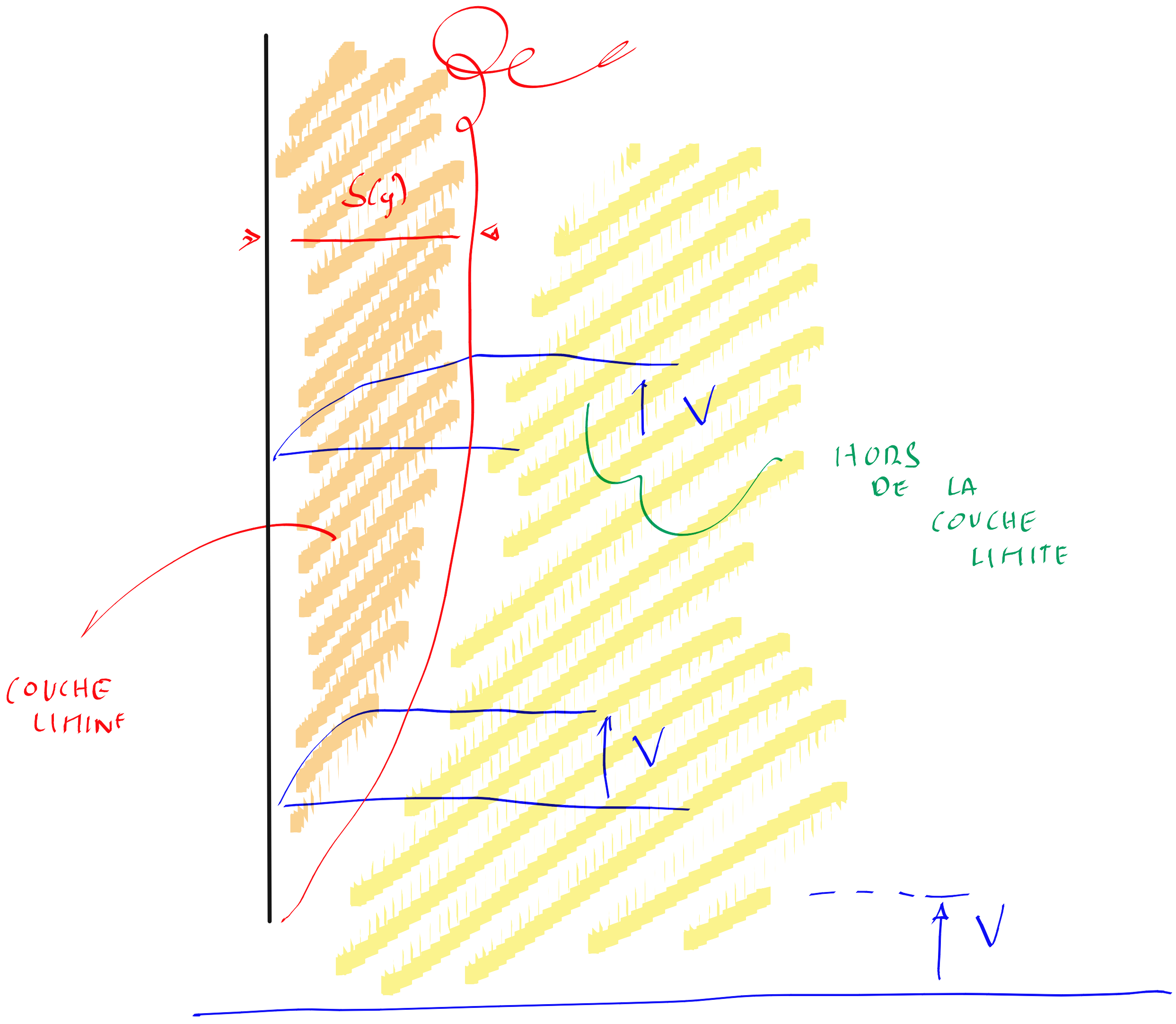
Plus facile car, il est ici possible de découpler le problème de l'écoulement et le problème thermique !

Dans une direction…





Et dans l'autre direction…



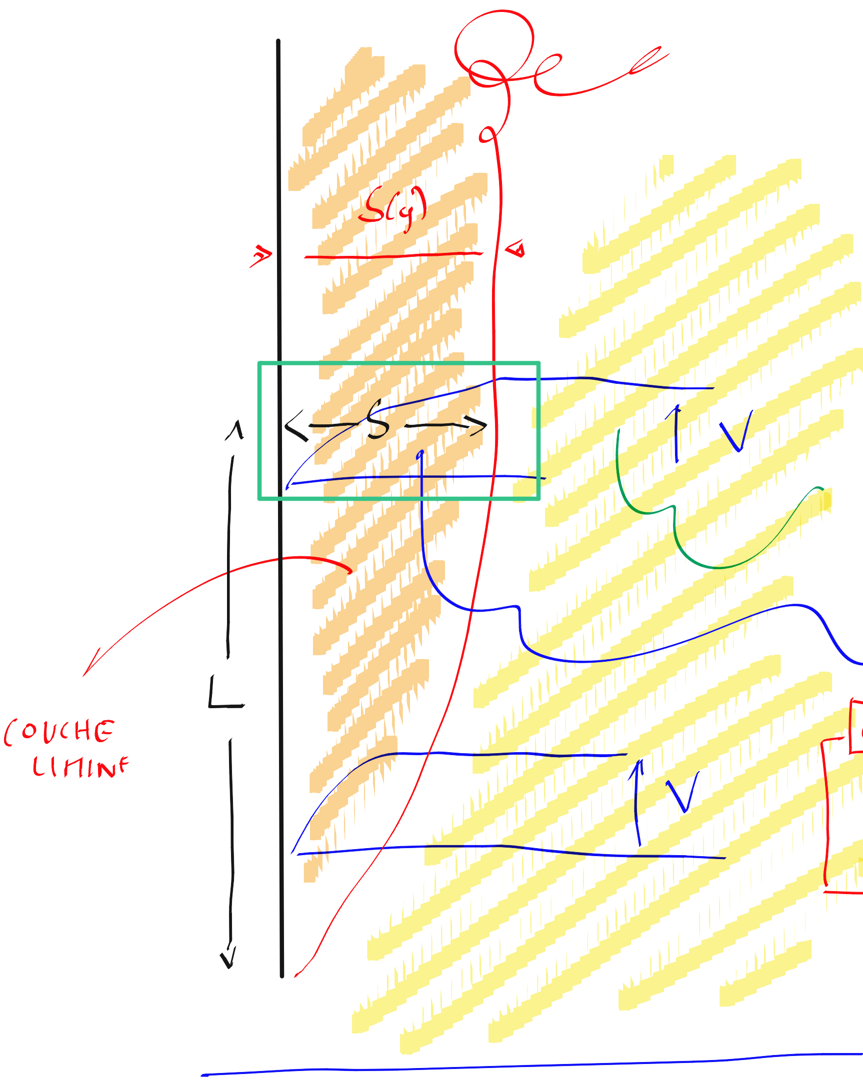
Et dans l'autre direction…

$$\delta(y) \triangleq \underbrace{\text{EFFETS VISQUEUX}} \sim \underbrace{\text{EFFETS D'INERTIE}}$$

$$\mu \frac{V}{\delta^2} \sim \rho \frac{V^2}{Y}$$

$$\frac{\mu}{\rho V Y} = \frac{\delta^2}{Y^2}$$

$$\frac{\delta}{Y} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \qquad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{\nu Y}{V}}}$$



PRANDTL

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \ldots\right.$$

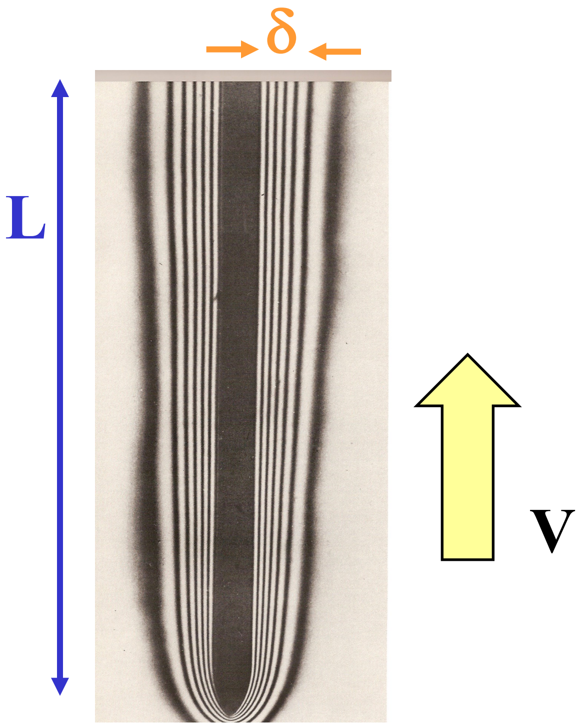
$$\rho\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right.$$

$$\delta \ll L$$

EULER

$$\rho v_e \frac{dv_e}{dy} = -\frac{dp_e}{dy} - g$$

-i- problème de l'écoulement



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

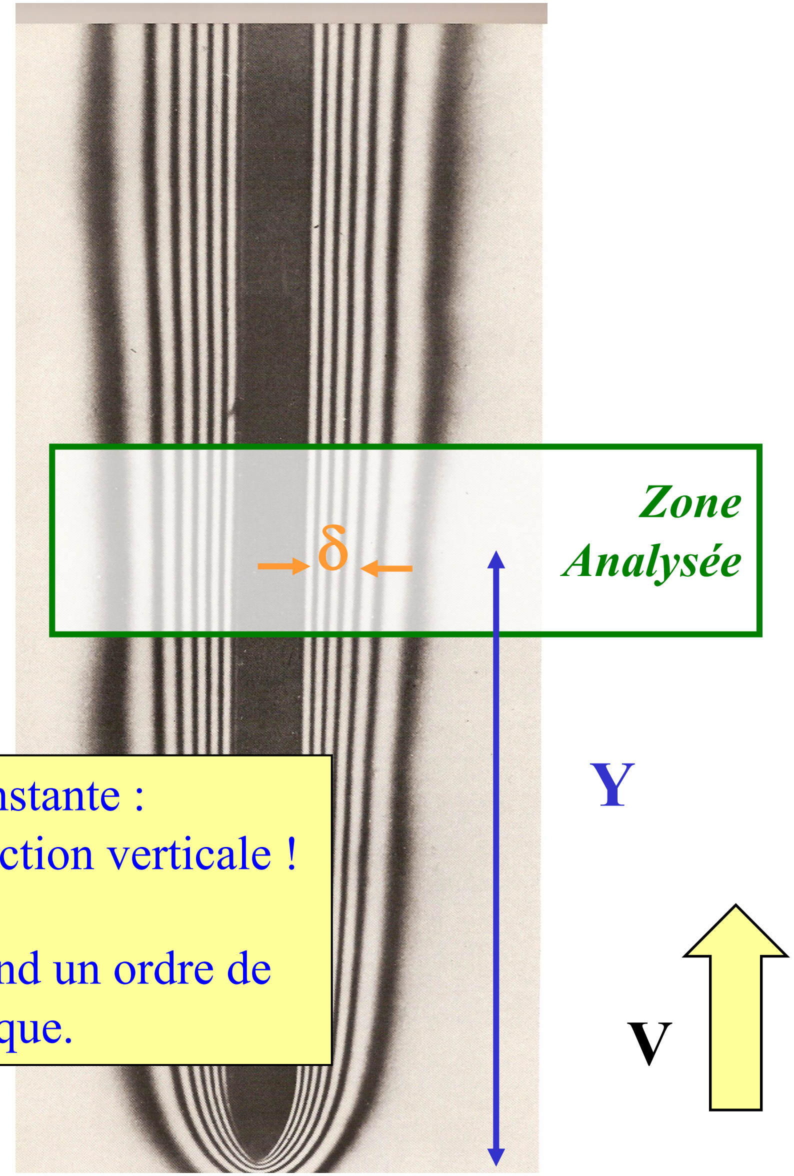
Près de la plaque, les effets visqueux sont dominants…
C'est la zone dite de couche limite de vitesse
Loin de la plaque, les effets visqueux sont supposés négligeables.

On définit l'épaisseur de la couche limite comme le lieu géométrique où les effets d'inertie et les effets visqueux sont du même ordre de grandeur.

Théorie de la couche limite

$$\boxed{\delta \ll Y}$$

Hypothèse géométrique de base
Pas satisfaite au bord d'attaque !!



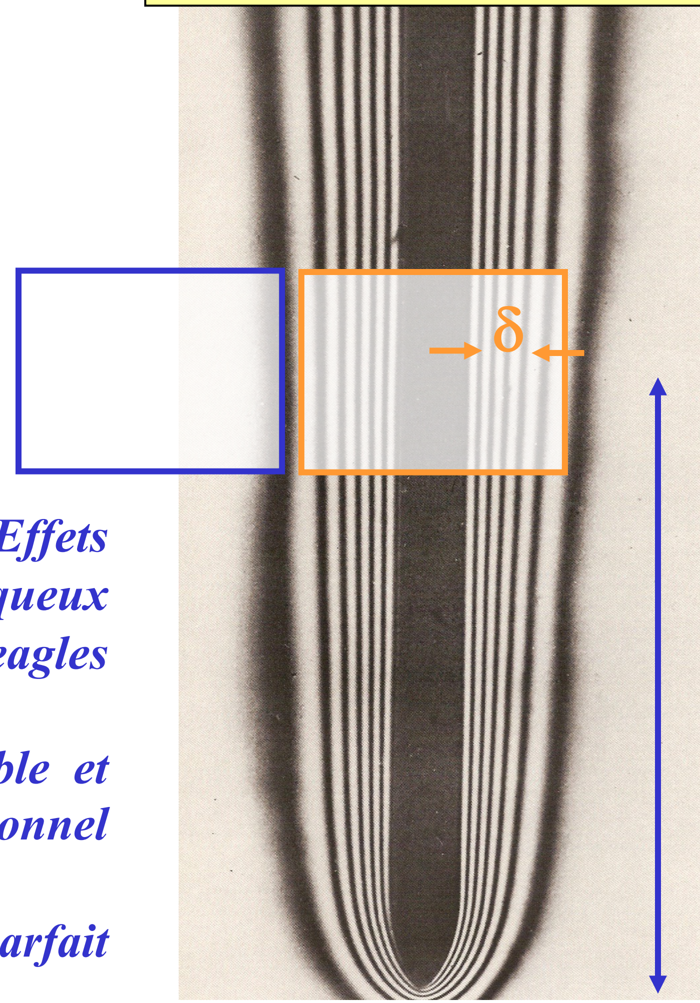
L'épaisseur de la couche limite n'est pas une constante :
elle augmente de manière monotone dans la direction verticale !

Mais, on se place dans une zone locale et on prend un ordre de grandeur constant pour notre analyse mathématique.

Couches limites laminaires

$$\delta \ll Y$$

L'épaisseur de la couche limite est le lieu géométrique où les effets d'inertie et les effets visqueux sont du même ordre de grandeur.



Effets visqueux non négligeables

Effets visqueux négligeagles

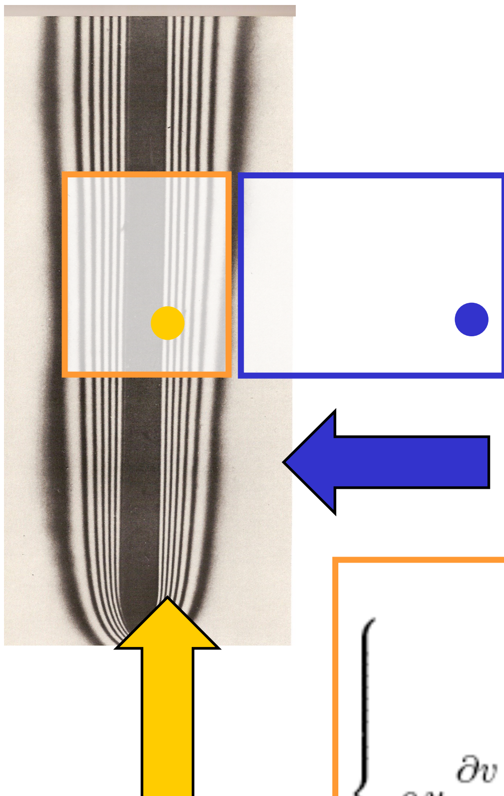
écoulement incompressible et irrotationnel

modèle dit du fluide parfait

Y

V

Deux mondes distincts …



Euler

$$-\frac{dp_e}{dy} = \rho v_e \frac{dv_e}{dy}$$

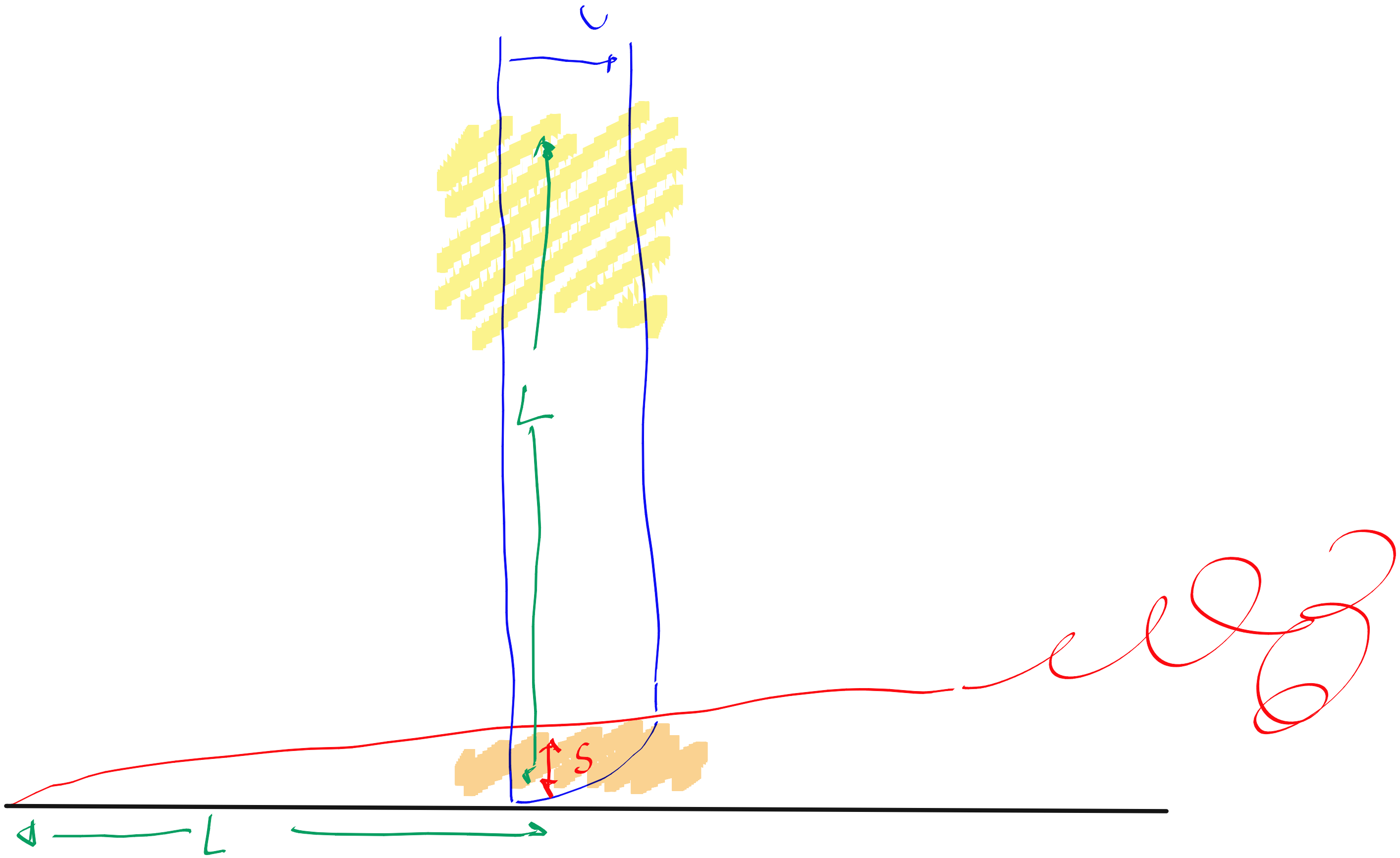
Ecoulement incompressible bidimensionnel stationnaire irrotationnel

Prandtl

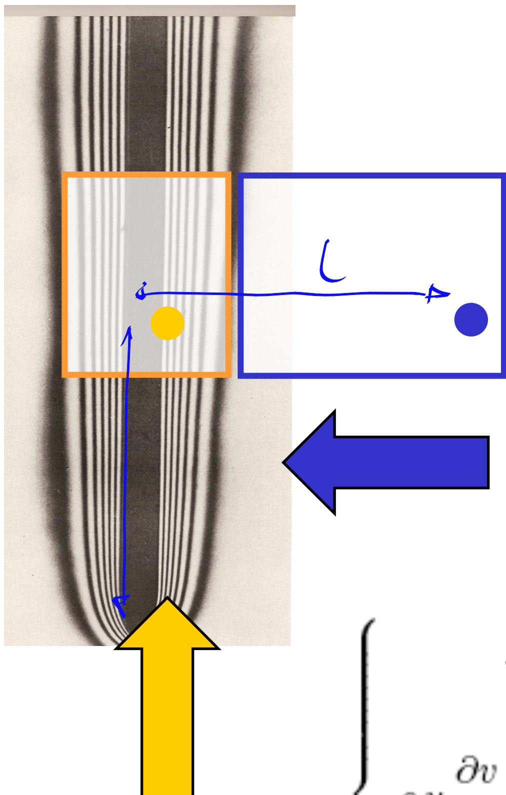
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

Ecoulement incompressible bidimensionnel stationnaire

Deux mondes distincts…



Deux échelles distinctes …



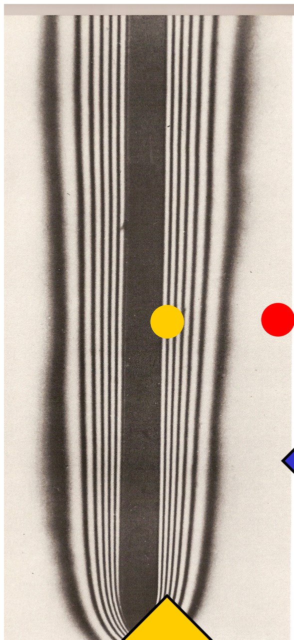
$$x'_{Euler} = \frac{x}{Y}$$

Euler $\dfrac{dp_e}{dy} = \rho v_e \dfrac{dv_e}{dy}$

Prandtl

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0 \\ \rho\, u\, \dfrac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v\, \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 & = & \dfrac{\partial p}{\partial x} \end{array}\right.$$

$$x'_{Prandtl} = \frac{x}{\delta}$$



$$\frac{\delta}{\boxed{\zeta}} = \frac{\boxed{\zeta}}{Y} = \frac{1}{Re^{1/4}}$$

Euler $\quad \dfrac{dp_e}{dy} = \rho v_e \dfrac{dv_e}{dy}$

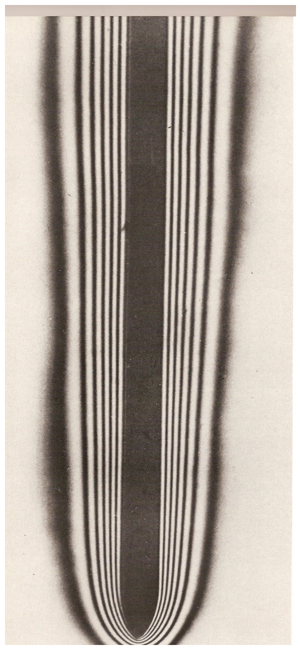
$$\boxed{x'_{Euler} = \frac{x}{Y}}$$

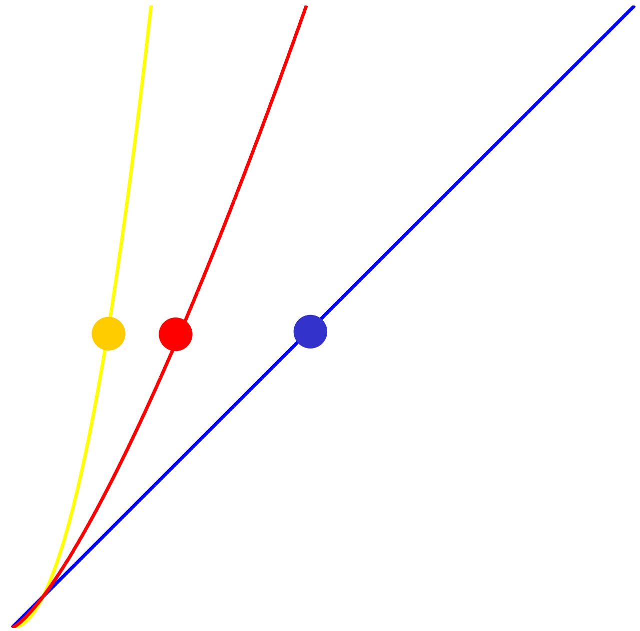
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0 \\ \rho\, u \dfrac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 0 & = & \dfrac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right.$$

Prandtl

$$\boxed{x'_{Prandtl} = \frac{x}{\delta}}$$

Deux mondes distincts à raccorder !





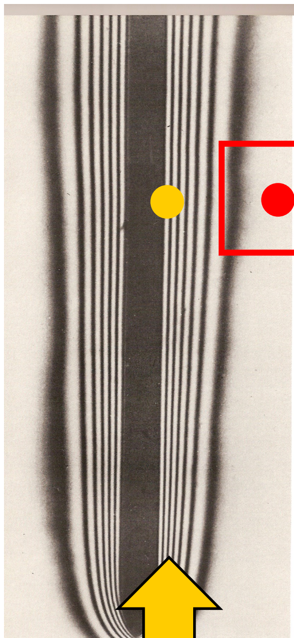
$$\frac{\delta}{Y} = \underbrace{\left(\frac{YV}{\nu}\right)^{-1/2}}_{Re^{-1/2}}$$

$$\frac{\delta}{\nu/V} = \left(\frac{Y}{\nu/V}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\zeta}{\nu/V} = \left(\frac{Y}{\nu/V}\right)^{3/4}$$

$$\frac{\zeta}{Y} = \overbrace{\left(\frac{YV}{\nu}\right)^{-1/4}}^{Re^{-1/4}}$$

Grandeurs caractéristiques le long de la plaque…



Euler

On effectue le raccord en ζ

$$
\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x/\delta\to\infty} v(\frac{x}{\delta}, y)} &= \lim_{x/Y\to 0} v_e(\frac{x}{Y}, y) = v_e(0,y) \\
\lim_{x/\delta\to\infty} p(\frac{x}{\delta}, y) &= \lim_{x/Y\to 0} p_e(\frac{x}{Y}, y) = p_e(0,y)
\end{aligned}
$$

Prandtl

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
0 &= \frac{\partial p}{\partial x}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\boxed{\delta \ll Y}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Longueur verticale caractéristique : Y
Longueur horizontale caractéristique : δ
Vitesse verticale caractéristique : V

Comment choisir une vitesse horizontale caractéristique ?

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{O}(U/\delta)} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\mathcal{O}(V/Y)} = 0$$

Il ne faut pas définir de vitesse caractéristique horizontale !

$$\boxed{U = \frac{V\delta}{Y} \ll V}$$

$$\underbrace{\boxed{\rho\, u\, \frac{\partial v}{\partial x}}}_{\mathcal{O}(\rho U V/\delta)}^{\mathcal{O}(\rho V^2/Y)} + \overbrace{\boxed{\rho\, v\, \frac{\partial v}{\partial y}}}^{\mathcal{O}(\rho V^2/Y)} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \boxed{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}$$

$$\mathcal{O}(\mu V/\delta^2) \gg \mathcal{O}(\mu V/Y^2)$$

Lieu où l'ordre des effets visqueux et les effets d'inertie sont identiques

$$\frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho V^2/Y}{\mu V/\delta^2} = \underbrace{\frac{\rho V Y}{\mu}}_{Re_Y} \frac{\delta^2}{Y^2} = 1$$

Que vaut δ ?

$$\frac{\delta}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Re_Y}}$$

$$\underbrace{\boxed{\rho\, u\, \frac{\partial u}{\partial x}}}_{\mathcal{O}(\rho V^2\delta/Y^2)} + \underbrace{\boxed{\rho\, v\, \frac{\partial u}{\partial y}}}_{\mathcal{O}(\rho V^2\delta/Y^2)} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{\mu\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu\, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}$$

$$\mathcal{O}(\mu V/Y\delta) \gg \mathcal{O}(\mu V\delta/Y^3)$$

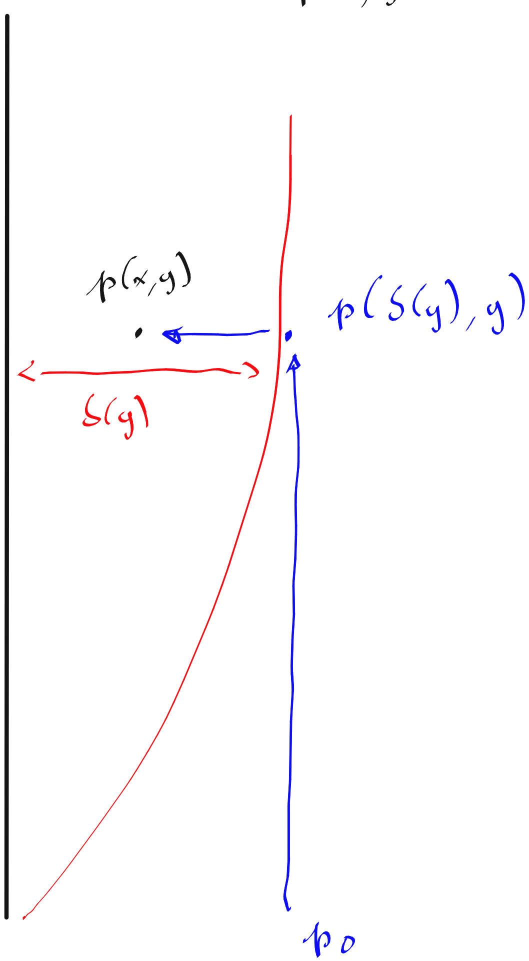
On obtient la même définition :-)

$$\frac{\boxed{\text{Forces d'inertie}}}{\boxed{\text{Forces visqueuses}}} = \frac{\rho V^2/Y}{\mu V/\delta^2} = \underbrace{\frac{\rho V Y}{\mu}}_{Re_Y} \frac{\delta^2}{Y^2} = 1$$

Et l’autre équation ?

$$\frac{\delta}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Re_Y}}$$

Et la pression…



$$p(x,y) - p_0 = \underbrace{p(\delta(y)) - p_0}_{O(Y)} + \cancel{\underbrace{(x-\delta)}_{O(\delta)}\underbrace{\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=\delta}}_{O\left(\frac{UV\rho}{Y}\right)}}$$

$$\rho \frac{V^2}{Y}$$

$$\rho V^2$$

$$\underbrace{\rho \frac{V\delta}{Y}}\ \underbrace{\delta\frac{V}{Y}}$$

$$\gg \quad \rho V^2 \frac{\delta^2}{Y^2}$$

Sur la couche limite…

$$\boxed{\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x}} + \boxed{\rho\, v \frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}$$

$$\mathcal{O}(\rho V^2 \delta / Y^2)$$

Et la pression ?

Dans la couche limite…

$$p(x,y) - p_0 = \boxed{p(\delta, y) - p_0} + \boxed{\cancel{(x-\delta) \frac{\partial p}{\partial x}}\Big|_{x=\delta}}$$

$$\mathcal{O}(\rho V^2) \gg \mathcal{O}(\rho V^2 \delta^2 / Y^2)$$

$$\mathcal{O}(\rho V^2 / Y)$$

A l'extérieur de la couche limite…

$$\boxed{\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x}} + \boxed{\rho\, v \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}} + \boxed{\cancel{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}$$

Equations de Prandtl (1904)

Equations simplifiées valables au sein de la couche limite

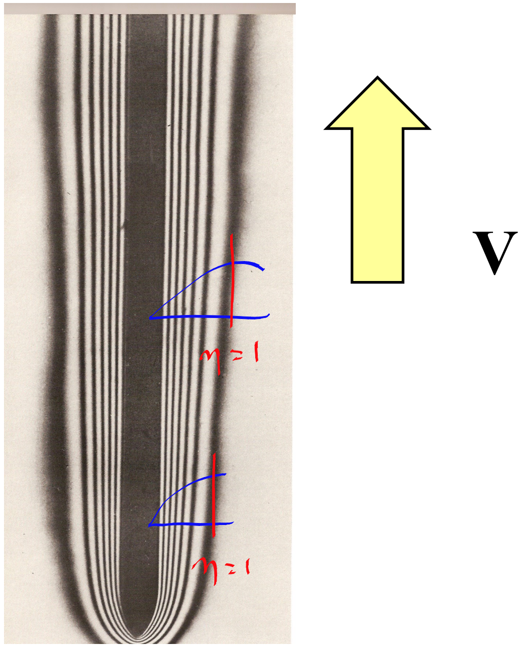
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\, u\, \frac{\partial v}{\partial x} + \rho\, v\, \frac{\partial v}{\partial y} = \cancel{-\frac{dp}{dy}} + \mu\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Couche limite visqueuse mince

$$\delta \ll Y$$

Pas de gradient de pression si l'écoulement extérieur est uniforme (ce n'est pas indispensable !)



Solution analytique de Blasius

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\dfrac{2\nu y}{V}}}$$

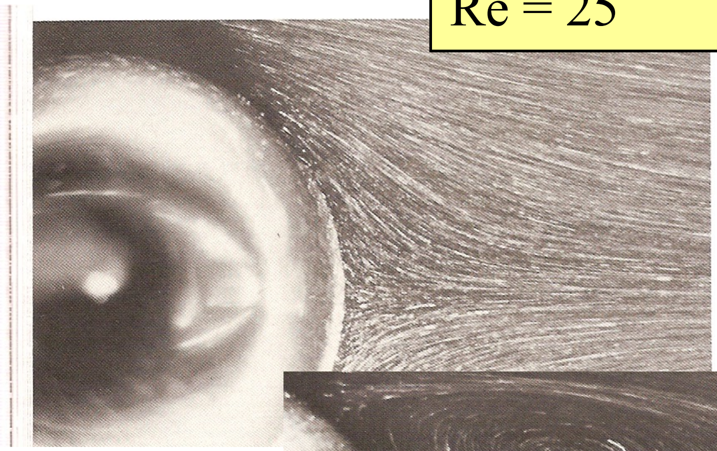
Variable de similitude : le facteur « deux » est une fioriture historico-folklorique pour simplifier l'algèbre…

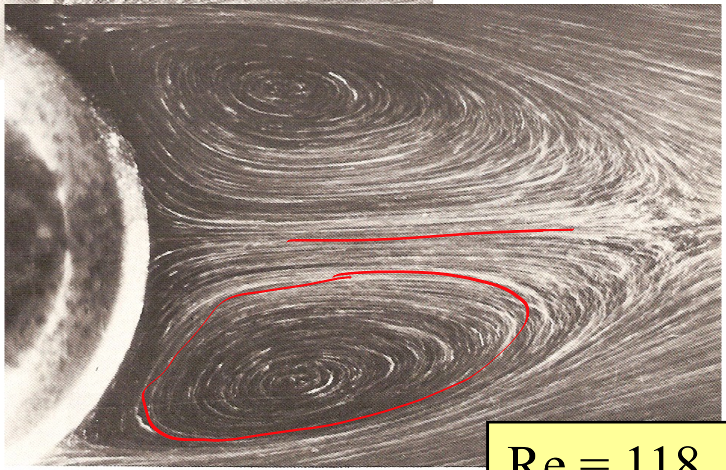
Promière idée : les profils u(η) et v(η) sont semblables sur toutes les hauteurs !

Seconde idée : cherchons la fonction de courant pour obtenir directement un champs de vitesse à divergence nulle !

A propos de la fonction de courant et du tourbillon…

Re = 25





Re = 118

Un petit interlude mathématique…
pour vous conter quelques petites équations
bien utiles pour la suite !

Fonction de courant

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}$$

Il est toujours possible de trouver une fonction de courant dans un écoulement incompressible. On peut même exiger - en plus- qu'elle soit à divergence nulle.

$$\begin{aligned} \text{rot grad} &= 0 \\ \text{div rot} &= 0 \\ \text{rot rot} &= \text{grad div} - \text{div grad} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

Ecoulement incompressible stationnaire d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$$

Tourbillon

Fonction de courant

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Ecoulement incompressible stationnaire plan d'un fluide visqueux newtonien à paramètres constants, sans forces de volume.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial \omega}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\omega
\end{aligned}$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Tourbillon

Ecoulements incompressibles stationnaires rampants

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
0 &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Creeping flows

$$\overbrace{\nabla \cdot \nabla p}^{\nabla^2 p} = \mu \overbrace{\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{v}}^{0}$$

$$\uparrow$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\nabla \times \nabla p}_{0} = \mu \underbrace{\nabla \times \nabla^2 \mathbf{v}}_{\nabla^2 \boldsymbol{\omega}}$$

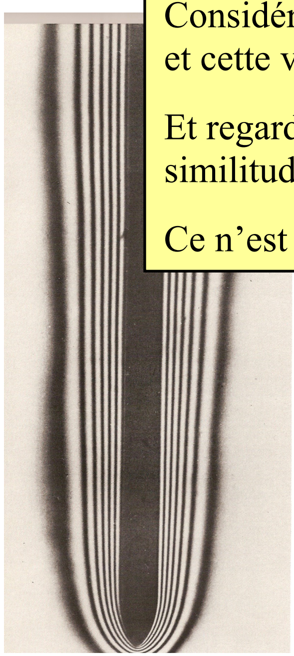
$$
\begin{aligned}
\nabla^2 p &= 0 \\
\nabla^2 \boldsymbol{\omega} &= 0 \\
\nabla^4 \psi &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{rot grad} &= 0 \\
\text{div rot} &= 0 \\
\text{rot rot} &= \text{grad div} - \text{div grad}
\end{aligned}
$$

Fonction de courant

$$\psi(x,y) = -\ V\ \delta(y)\ f(\eta(x,y))$$

Le signe négatif est une fioriture historico-folklorique pour retrouver l'équation usuelle de Blasius



Considérons cette fonction de courant particulière et cette variable de similitude particulière…

Et regardons si il existe une solution de similitude….

Ce n'est pas évident a priori !

V

Le facteur « deux » est une fioriture historico-folklorique pour simplifier l'algèbre (hem)

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\dfrac{2\nu y}{V}}}$$

Variable de similitude

Solution de Blasius…

IDEE 1

$$\boxed{\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{2\, y\, \frac{\nu}{V}}}}$$

IDEE 2

$$\boxed{\psi(x,y) = -V\, \delta(y)\, f(\eta(x,y))}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\boxed{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V \delta f' \frac{1}{\delta} = \boxed{V f'}$$

$$\boxed{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -V\left[\delta' f + \delta f' \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{-\frac{x\delta'}{\delta^2} = -\frac{\eta \delta'}{\delta}}\right] = \boxed{V \delta' (f' \eta - f)}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V f''}{\delta}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{V f'''}{\delta^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial y}} = V f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \boxed{-\frac{V f'' \eta\, \delta'}{\delta}}$$

Ecrire l'équation du mouvement…

$$\boxed{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V \delta f' \frac{1}{\delta} = \boxed{V f'}$$

$$\boxed{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -V\left[\delta' f + \delta f' \frac{\partial \eta}{\partial y}\right] = \boxed{V \delta' (f'\eta - f)}$$

$$\sim -\frac{x \delta'}{\delta^2} = -\frac{\eta \delta'}{\delta}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V f''}{\delta}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{V f'''}{\delta^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial y}} = V f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \boxed{-\frac{V f'' \eta \delta'}{\delta}}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\cancel{\frac{V^2 f'' \delta' f' \eta}{\delta}} - \frac{V^2 \delta' f f''}{\delta} - \cancel{\frac{V^2 f' f'' \eta \delta'}{\delta}} = \nu \frac{V f'''}{\delta^2}$$

$$\cancel{V^2 \frac{f'' \delta' f'}{\delta}\eta} - V^2 \frac{\delta' f f''}{\delta} - \cancel{V^2 \frac{f' f''}{\delta}\eta\, \delta'} = \nu \frac{V f'''}{\delta^2}$$

$$-V^2 \frac{\delta'}{\delta} f f'' = \nu \frac{V f'''}{\delta^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(y) &= \sqrt{\frac{2 y \nu}{V}} \\ \delta'(y) &= \frac{\cancel{2}\nu}{V} \, \frac{1}{\cancel{2}} \, \frac{1}{\sqrt{}} \\ &= \frac{\nu}{V \delta} \end{aligned}}$$

$$V^2 \frac{\delta'}{\delta} = \frac{\nu}{V \delta^2} V^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} & f f'' + f''' = 0 \\ & f(0) = 0 \\ & f'(0) = 0 \\ & f'(\eta \to \infty) = 1 \end{aligned}}$$

… et obtenir une ode !

$$\boxed{\psi(x,y) = -\,V\;\delta(y)\;f(\eta(x,y))}$$

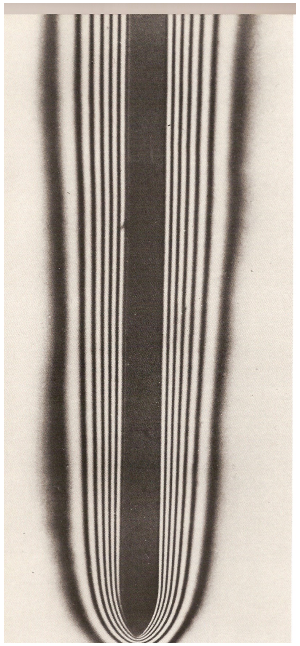
$$u \;=\; \frac{\partial\psi}{\partial y} \;=\; -V\left(\delta'(y)\,f(\eta(x,y)) + \delta(y)\,f'(\eta(x,y))\,\overbrace{\frac{\partial\eta}{\partial y}(x,y)}^{-\eta\,\frac{\delta'(y)}{\delta(y)}}\right) \;=\; V\delta'(\eta f' - f)$$

$$v \;=\; -\frac{\partial\psi}{\partial x} \;=\; V\,\delta(y)\,f'(\eta(x,y))\,\underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial x}(x,y)}_{\frac{1}{\delta(y)}} \;=\; V f'$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \;=\; -V f''\eta\,\frac{\delta'}{\delta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \;=\; V f''\frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \;=\; V f'''\frac{1}{\delta^2}$$



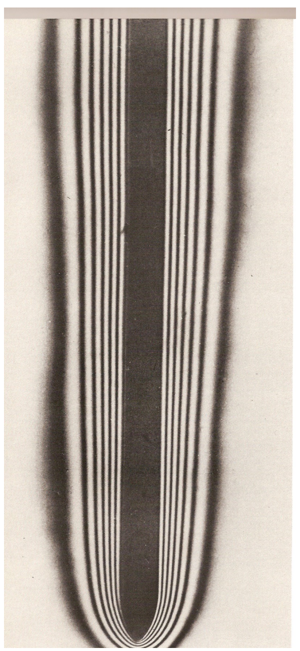
$$\boxed{\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\dfrac{2\nu y}{V}}}}$$

Un peu d'algèbre !

Et voilà l'équation de Blasius :-)

$$\boxed{u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} \;=\; \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

$$V^2\cancel{\delta'\eta f'}\, f''\,\frac{1}{\delta} - V^2\delta' f\, f''\,\frac{1}{\delta} - V^2\cancel{f'\, f''}\eta\,\frac{\delta'}{\delta} \;=\; \nu V f'''\,\frac{1}{\delta^2}$$



$$u = V\delta'(\eta f' - f)$$

$$v = V f'$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -V f''\eta\,\frac{\delta'}{\delta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = V\, f''\frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = V\, f'''\,\frac{1}{\delta^2}$$

$$\boxed{f\,f'' + f''' = 0}$$

Paul Richard Heinrich Blasius
Student of Ludwig Prandtl
1883 - 1970

Résolution numérique

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) & = & 0 \\ \\ f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \\ \lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(\eta) & = & v(\eta) \\ v'(\eta) & = & w(\eta) \\ w'(\eta) & = & -u(\eta)w(\eta) \end{array}\right.$$

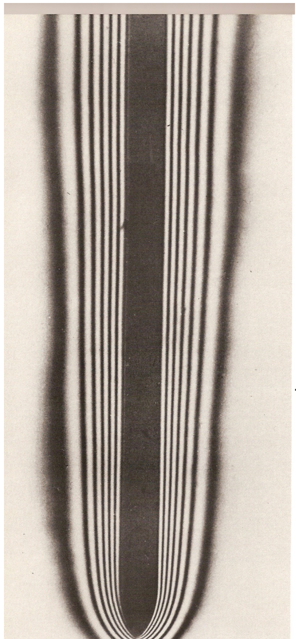
Utilisation conjointe de la technique du tir et de la méthode de Heun

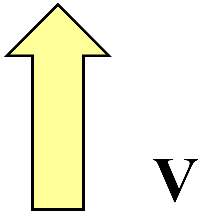
```
function u = blasius(h)
 n = 1; nmax = 10;
 a = 0; fa = heun(a,h);
 b = 1; fb = heun(b,h);
 delta = (b-a)/2;
 if (fa*fb > 0) error(); end;
 while (abs(delta) >= 0.01 && n <= nmax)
    x = a + delta; fx = heun(x,h);
    if (fx*fa > 0)    a = x;  fa = fx;
    else              b = x;  fb = fx;
    end
    delta = (b-a)/2; n = n+1;
 end
 if (n > nmax)  error(); end
 [b u] = heun(x,h);  u = u(:,1);
end
```

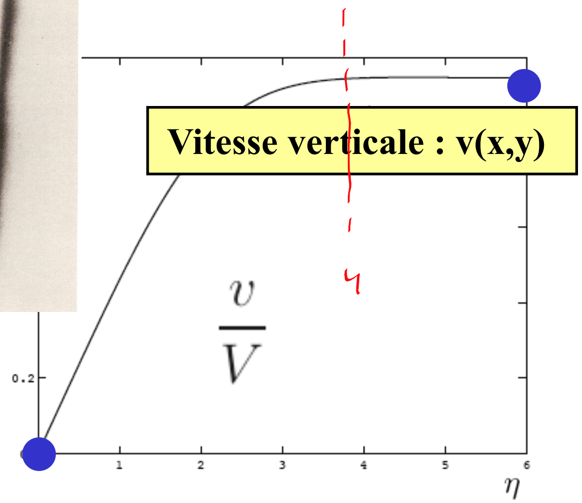
```
function [b u] = heun(a,h)
 i = 1; imax = 100; test = 1;
 X = [0:imax]*h; U = [[0 0 a] ; zeros(imax,3)];
 while (test > 0.01 && i < imax)
    P        = U(i,:) + h * f(X(i),U(i,:));
    U(i+1,:) = U(i,:) + h * ( f(X(i),U(i,:)) + f(X(i+1),P) ) /2;
    test = (U(i+1,2) - U(i,2)); i = i+1;
 end
 if (i == imax)  error(); end
 b = 1 - U(i,2); u = U(1:i,:);
end
```

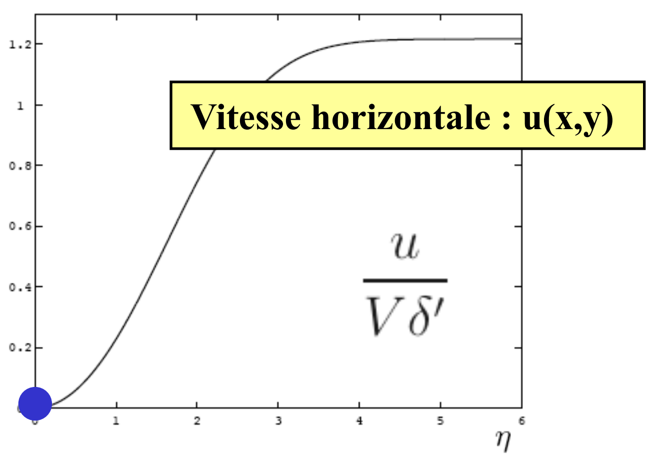
```
function dudx = f(x,u)
 dudx = [u(2) u(3) -u(1)*u(3)];
end
```

Solution de Blasius









$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

L'estimation de l'ordre de grandeur de la couche limite était bien adéquat !

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2\nu y}{V}}}$$

FROTTEMENT A LA PAROI ?

$$D = \int_0^X \tau_w \, dx$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$= \mu \, u_e \underbrace{\left. f'' \right|_{\eta=0}}_{0.4696} \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\sqrt{\frac{u_e}{2\nu x}}}$$

$$= 0.332 \sqrt{\frac{\mu \rho u_e^3}{x}}$$

$$= 0.664 \, \rho \frac{u_e^2}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_e x}}$$

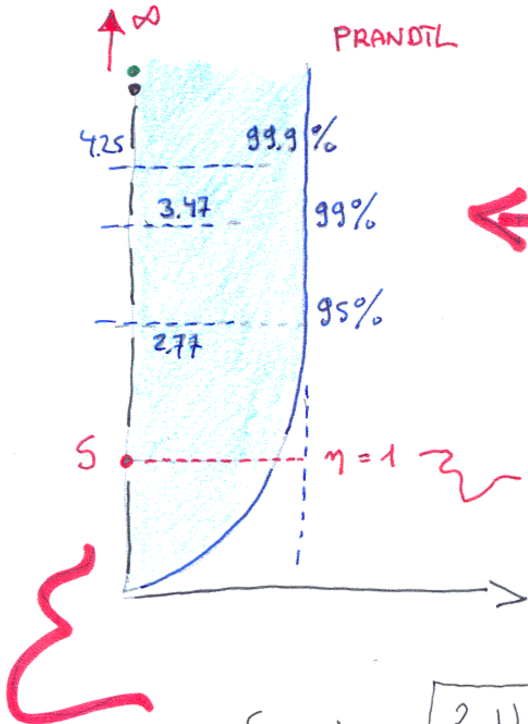
$$D = 0.332 \sqrt{\mu \rho u_e^3} \underbrace{\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2\sqrt{X}}$$

$$= 0.664 \sqrt{\mu \rho U_e^3 X} = 1.328 \, \rho \frac{u_e^2 X}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_e X}}$$

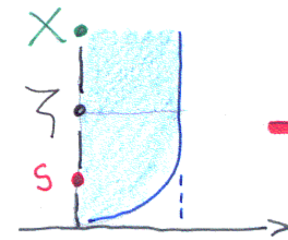
$$C_f = \frac{\tau_w|_{x=X}}{\rho u_e^2/2} = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$C_{f,m} = \frac{D}{\rho u_e^2 X/2} = 1.328 \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

COEFFICIENTS DE FROTTEMENT LOCAL ET GLOBAL

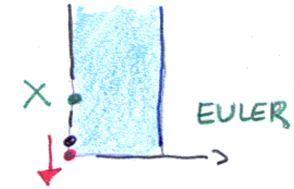


$\eta = 1 \rightsquigarrow \eta = y/\delta$



$\delta \ll X$

$1 \ll Re$



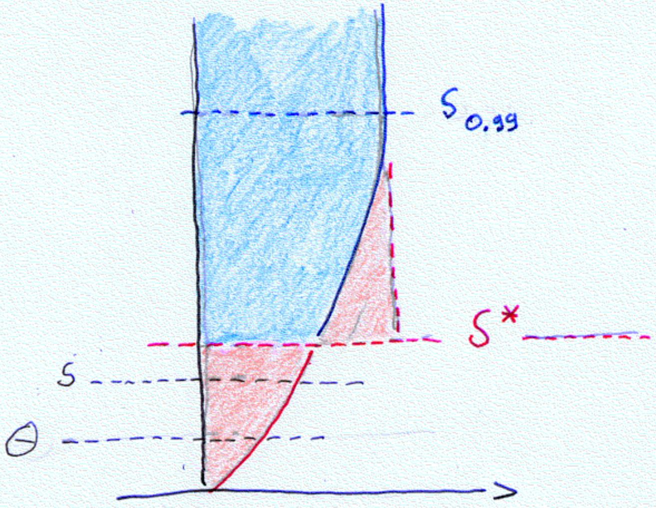
$$u_e(\underbrace{\eta = 3.47}_{\eta_{0.99}}) = 0.99\, u_e$$

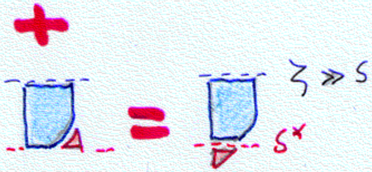
δ CE N'EST QU'UN ORDRE DE GRANDEUR ADEQUAT !

$$\frac{\delta}{x} \triangleq \sqrt{\frac{2\nu}{u_e x}}$$

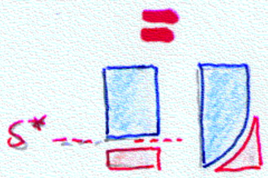
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\delta_{0.95}}{x} &= 2.77\,\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{Re}} = 3.92\,\frac{1}{\sqrt{Re}} \\ \frac{\delta_{0.99}}{x} &= 3.47\,\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{Re}} = 4.91\,\frac{1}{\sqrt{Re}} \\ \frac{\delta_{0.999}}{x} &= 4.25\,\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{Re}} = 6.02\,\frac{1}{\sqrt{Re}} \end{aligned}}$$

EPAISSEUR DE DEPLACEMENT δ^*





$$\underbrace{(\zeta - \delta^*)\, u_e}_{\int_0^{\zeta} u_e\, dy \;-\; \delta^* u_e} = \int_0^{\zeta} u\, dy$$

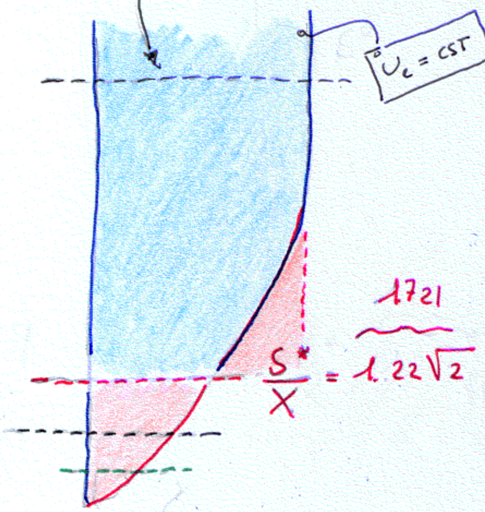


$$\boxed{\delta^* \triangleq \underbrace{\int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy}_{\text{CONVERGE SI } \zeta \to \infty}}$$

EPAISSEUR DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$\boxed{\Theta \triangleq \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(1-\frac{u}{U_e}\right) dy}$$

$$\frac{\delta_{0.99}}{X} = \overbrace{4.25\sqrt{2}}^{6.02}\,\frac{1}{\sqrt{Re}}$$



$$\frac{\delta^*}{X} = \overbrace{1.22\sqrt{2}}^{1.721}\,\frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$\frac{\delta}{X} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Re}}$$

$$\frac{\Theta}{X} = \underbrace{0.47\sqrt{2}}_{0.664}\,\frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$U_e = cst$

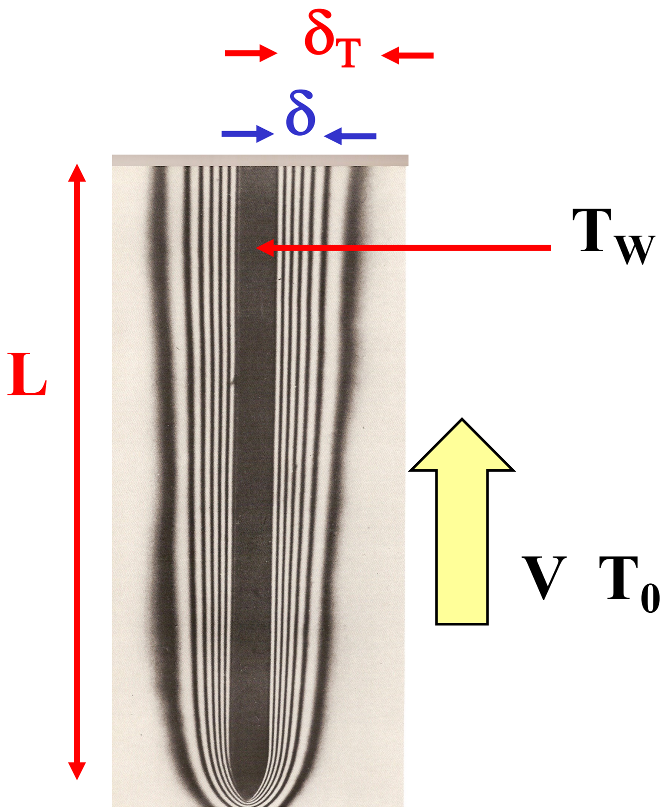
$$\frac{\Theta}{X} = \underbrace{0.664\,\frac{1}{\sqrt{Re}}}_{C_f}$$

$$C_f = \underbrace{C_{f,m}}_{\frac{D}{\rho U_e^2 X/2}}/2$$

$$\rightarrow \quad \Theta = D/\rho U_e^2$$

DENSITÉ DE FORCE DE TRAINEE NORMALISÉE
EXERCÉE PAR LA PLAQUE SUR LE FLUIDE ENTRE O ET X

-ii- problème thermique



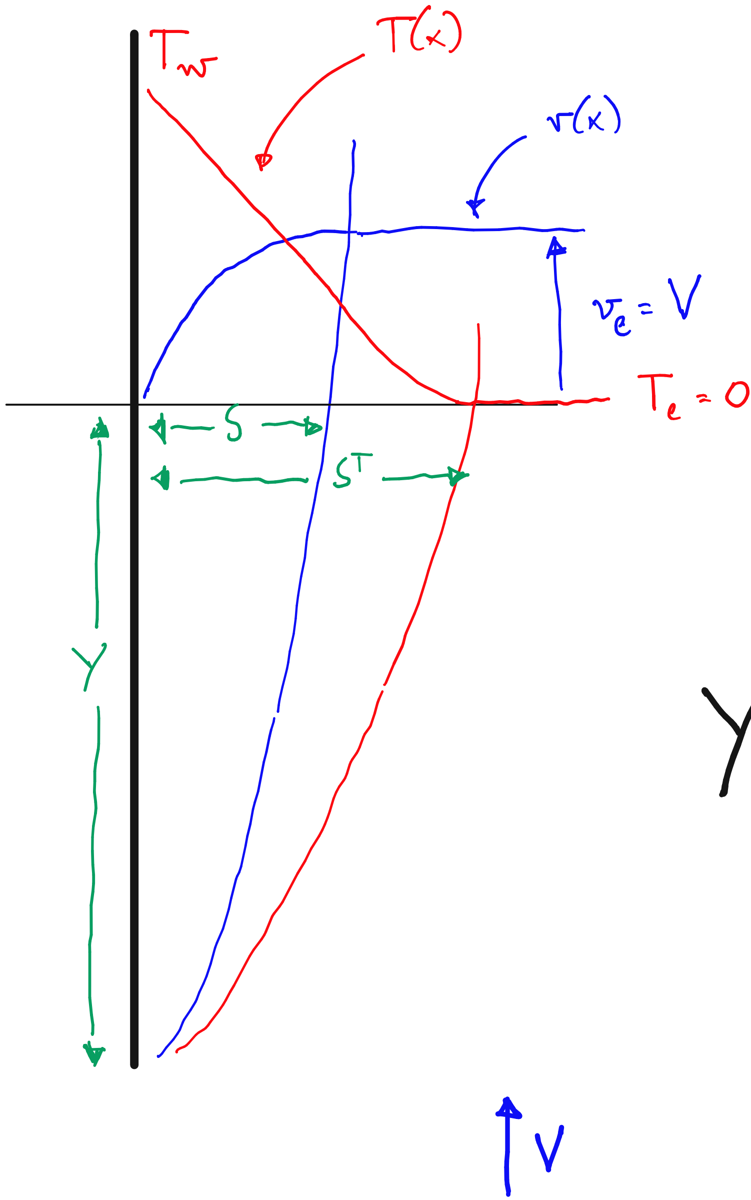
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}
\end{aligned}
\qquad \delta \ll Y
$$

$$
u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\qquad \delta_T \ll Y
$$

Près de la plaque, les effets conductifs sont dominants…
C’est la zone dite de <u>couche limite thermique</u>
Loin de la plaque, la conduction est négligeable

On définit l’épaisseur thermique comme le lieu géométrique où la conduction et la convection sont du même ordre de grandeur.

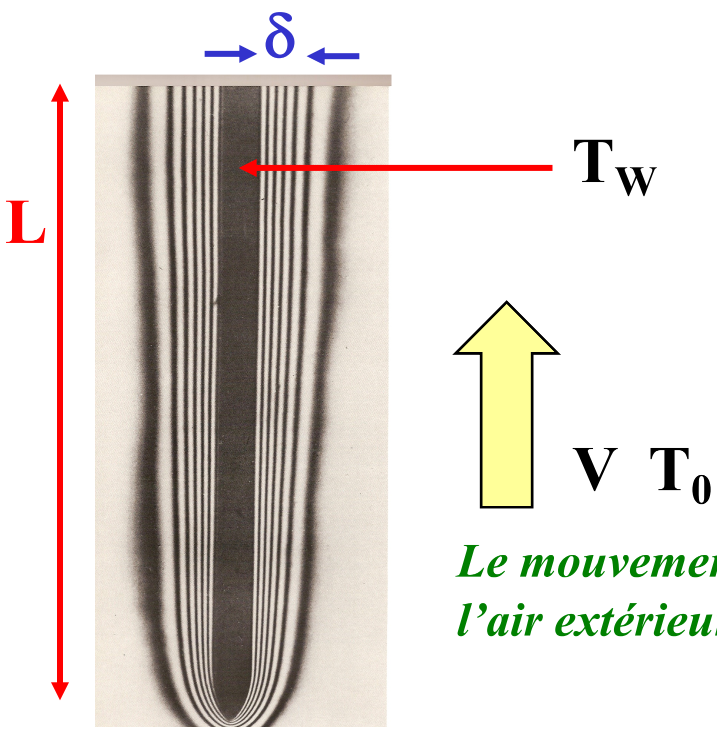
Mais, tout d'abord, un peu de convection forcée



$$Y \gg \delta, \; \delta_T$$

EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE DE VITESSE

EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE



Mais, tout d'abord, un peu de convection forcée

Le mouvement vertical de l'air extérieur est forcé

Problème de l'écoulement

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2\mu \, \mathbf{d} : \mathbf{d} + r + \nabla \cdot (k \nabla T).$$

Problème thermique

Plus facile car, il est ici possible de découpler le problème de l'écoulement et le problème thermique !

$$\boxed{u\,\frac{\partial T}{\partial x}} + \boxed{v\,\frac{\partial T}{\partial y}} = \boxed{\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \cancel{\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Re}}}$$

$$\frac{U}{\delta} = \frac{V}{Y} \qquad \partial\left(\frac{V\,\Delta T}{Y}\right) \qquad \frac{\alpha\,\Delta T}{\delta_T^2}$$

$$\partial\left(\frac{V\,\Delta T}{Y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Pe}} = \sqrt{\frac{1}{Re\,Pr}}}$$

$$\frac{V\,\Delta T}{Y}$$

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{V\,\cancel{\Delta T}}{Y}\,\frac{\delta_T^2}{\cancel{\Delta T}\,\alpha} = 1$$

$$\frac{\delta_T^2}{Y^2} = \frac{\alpha}{V\,Y}$$

Et δ_T ?

$$\boxed{u\frac{\partial T}{\partial x}} + \boxed{v\frac{\partial T}{\partial y}} = \boxed{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \boxed{\cancel{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}}$$

Lieu où l'ordre de la convection et de la conduction sont identiques

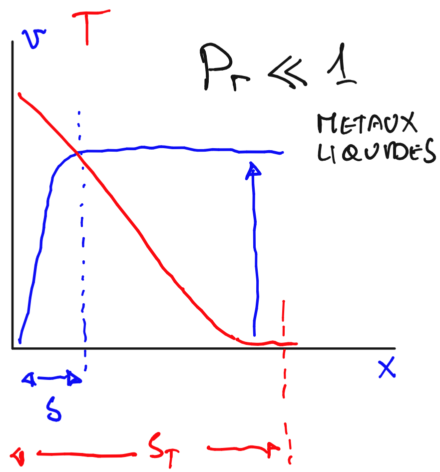
$$\frac{\boxed{\text{Convection}}}{\boxed{\text{Conduction}}} = \frac{V\Delta T/Y}{\alpha\Delta T/\delta_T^2} = \underbrace{\frac{VY}{\alpha}}_{Pe_Y}\frac{\delta_T^2}{Y^2} = 1$$

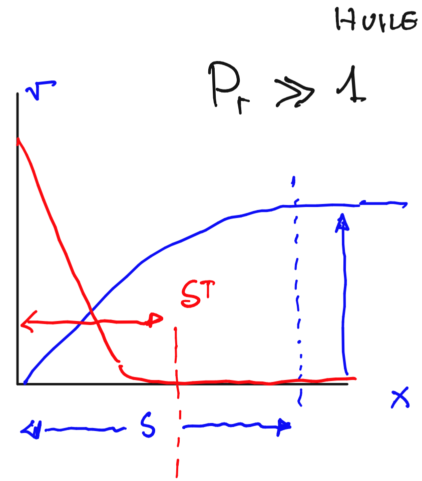
Et δ_T ?

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{1}{Pe_Y}} = \sqrt{\frac{1}{Pr\,Re_Y}}$$

Epaisseurs de couches limites et le nombre de Prandtl

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{Pr}}$$





En fait, c'est uniquement l'ordre de grandeur…
Lorsqu'on calcule la vraie épaisseur pour Blasius, c'est plutôt un exposant 1/3 !
Car l'ordre de grandeur de vitesse est un peu surestimé en prenant U !

Métaux liquides	**Pr << 1**
Gaz	**Pr = 0.7**
Eau	**Pr = 2… 7**
Huiles	**Pr >> 1**

Attention : Prantl est une fonction de la température (davantage pour les liquides que pour les gaz) !

Soyons un peu plus général : et la dissipation visqueuse ?

Problème de l'écoulement

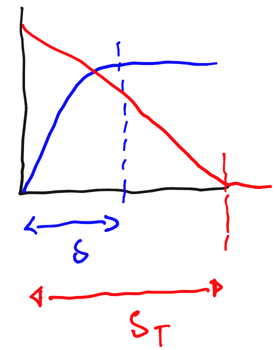
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

$$
u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
$$

Problème thermique

Eckert : dissipation visqueuse ?

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \boxed{\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \boxed{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$



$$\frac{\nu}{c}\,\frac{V^2}{\delta^2}$$

DISSIPATION VISQUEUSE

$$\alpha\,\frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

DIFFUSION / CONDUCTION THERMIQUE

$$= \underbrace{\frac{\nu}{c}\,\frac{V^2}{\delta^2}}\;\underbrace{\frac{\delta_T^2}{\alpha\,\Delta T}} = \underbrace{\frac{V^2}{c\,\Delta T}}_{Ec}$$

$$\frac{\nu}{\alpha}\,\frac{\delta_T^2}{\delta^2} \qquad \frac{V^2}{c\,\Delta T}$$

Pr $\quad$ $1/Pr$

Eckert : dissipation visqueuse ?

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \boxed{\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \boxed{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Dissipation visqueuse $\mathcal{O}(\frac{\nu V^2}{c\delta^2})$

$\mathcal{O}(\frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2})$ ***Conduction***

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} = \frac{\nu V^2}{\alpha c \Delta T}\underbrace{\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2}_{Pr^{-1}} = \frac{V^2}{c\Delta T} = Ec$$

Nombre d'Eckert

$$Ec = \frac{u_e^2}{c(T_w - T_e)}$$

Picture was taken on August 22, 2000

caractérise un écoulement d'un fluide !

$$\frac{\textbf{Energie cinétique}}{\textbf{Energie interne}}$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

Couches limites identiques

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

Dissipation visqueuse négligeable

Quatre cas possibles !

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

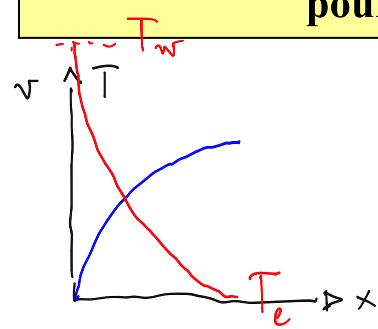
$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}}$$

Les équations d'énergie et de quantité de mouvement expriment les mêmes opérateurs différentiels pour la température et la vitesse verticale !



$$T = Av + B$$

Si, si, c'est aussi simple !

Relation de Crocco

$$\begin{array}{ll} Pr = 1 \\ Ec \ll 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} Pr = 1 \\ Ec \not\ll 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Pr \neq 1 \\ Ec \ll 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} Pr \neq 1 \\ Ec \not\ll 1 \end{array}$$

$$cT + \frac{v^2}{2} = Av + B$$

On a les mêmes opérateurs différentiels pour l'énergie interne totale et la vitesse verticale !

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$v\left[u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}\right] = v\left[\nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]$$

$$c\left[u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y}\right] = c\left[\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \nu\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]$$

Relation de Crocco

$$cT + \frac{v^2}{2} = Av + B$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$u\,\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left[cT + \frac{v^2}{2}\right]} + v\,\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left[cT + \frac{v^2}{2}\right]} = \nu\,\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[cT + \frac{v^2}{2}\right]}$$

$$\nu\frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$= \nu\,\cancel{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \nu\, \cancel{v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

$$v\left[\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}}\right] = v\left[\cancel{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right]$$

$$c\left[\cancel{u\frac{\partial T}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial T}{\partial y}}\right] = c\left[\cancel{\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} + \nu\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}\right]$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}}$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}$$

On procède comme pour Blasius !

$$Pr\ f\theta' + \theta'' = 0$$

Solution de similitude

$$\underbrace{\underbrace{\exp(g)\, \underbrace{Pr\, f}_{g'(\eta)}}_{(\exp(g))'}\, \theta' + \exp(g)\, \theta''}_{(\exp(g)\,\theta')' = 0} = 0$$

$$\exp(g)\, \theta' = A$$

$$\theta' = A \exp(-g)$$

$$\theta = A \int_0^{\eta} \exp(-g) + B$$

$$Pr\ f\theta' + \theta'' = 0$$

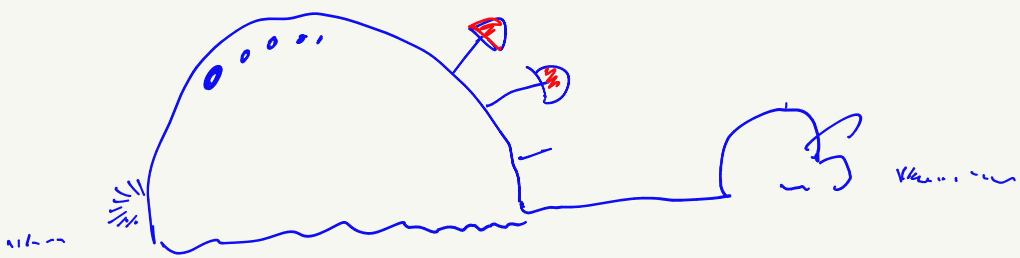
Calcul de la solution de similitude

$$\Theta(\eta) = A\int_0^{\eta} \exp(-g(\xi))\,d\xi + B$$

$$\boxed{\Theta(\eta) = \frac{\displaystyle\int_0^{\eta} \exp\left[-P_r\int_0^{\xi} f(\zeta)\,d\zeta\right] d\xi}{\displaystyle\int_0^{\infty} \cdots\cdots \; d\xi}}$$

$$\Theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}$$

- $\Theta(0) = 0$
- $\Theta(\eta \to \infty) = 1$



$$g'(\eta) = P_r\, f(\eta)$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &= 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}$$

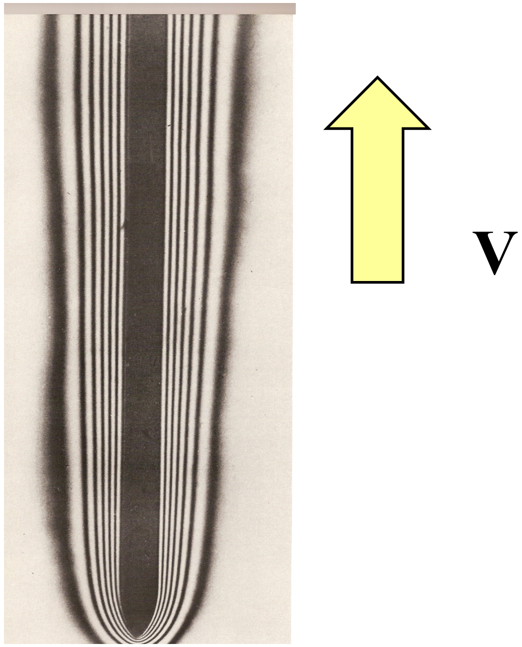
$$\boxed{\begin{aligned} Pr &\neq 1 \\ Ec &\not\ll 1 \end{aligned}}$$

Le cas le plus général (et donc aussi le plus probable !)

$$u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pas de solution analytique…



$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}$$

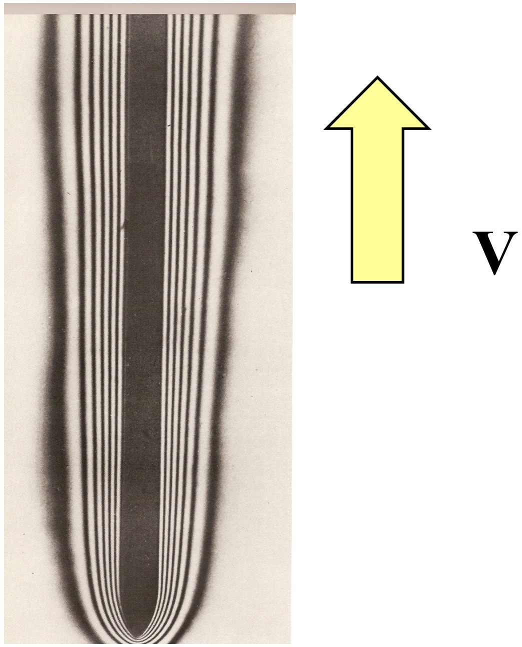
$$= \mu V \underbrace{f''\big|_{\eta=0}}_{0,4696} \frac{1}{\delta} \qquad \sqrt{\frac{V}{2\nu y}}$$

$$= 0,332 \sqrt{\frac{\mu^2 V^3}{\nu y}} \qquad \sqrt{\frac{\nu^2 \rho^2 V^4}{\nu y V}}$$

$$= \frac{\rho V^2}{2}\, 0,664 \underbrace{\sqrt{\frac{\nu}{V y}}}_{Re^{-1/2}}$$

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = 0,664\, Re^{-1/2}}$$

Calcul de la force de trainée



$$q_w = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$= -k\,(T_e - T_w)\,\underbrace{\Theta'\big|_{\eta=0}}_{\simeq\, 0{,}332\,\sqrt{2}\,P_r^{1/3}}\,\frac{1}{\delta} \qquad \sqrt{\frac{V}{2\nu y}}$$

VALABLE si $P_r > 0.01$

$$= -k\,(T_e - T_w)\;0{,}332\,\sqrt{\frac{V}{\nu y}}\;P_r^{1/3}$$

$$= -\rho c V (T_e - T_w)\;0{,}332\;\underbrace{\underbrace{\frac{k}{\rho c}}_{\alpha}\;\underbrace{\sqrt{\frac{V}{V^2 \nu y}}}_{\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\nu}{V y}}}\;P_r^{1/3}}_{P_r^{-1}\,R_e^{-1/2}}$$

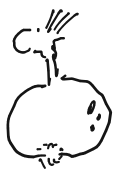
$$= -\rho c V (T_e - T_w)\;0{,}332\;P_r^{-2/3}\,R_e^{-1/3}$$

$$\boxed{S_t = \frac{-q_w}{\rho c V (T_e - T_w)} = 0{,}332\;P_r^{-2/3}\,R_e^{-1/2}}$$

Calcul du flux de chaleur

$$\underbrace{C_f}_{\text{FORCE DE FROTTEMENT ADIMENSIONNELLE}} = 2\, P_r^{2/3}\, \underbrace{S_t}_{\text{FLUX DE CHALEUR ADIMENSIONNEL}}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = 0{,}664\; Re^{-1/2}$$



$$S_t = \frac{-q_w}{\rho c V (T_e - T_w)} = 0{,}332\; P_r^{-2/3}\; Re^{-1/2}$$

Analogie de Reynolds