



Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences

PHYSIQUE DES FLUIDES

V. Legat

Notes pour le cours PHY1352
Année académique 2015-2016 (version 1.0 15-10-2015)

*Ce document est une oeuvre originale protégée par le droit d'auteur.
Copyright V. Legat, mars 2010*

Ce texte est toujours une version provisoire. Malgré tout le soin apporté à sa rédaction, il est possible que quelques erreurs soient toujours présentes dans le texte. Tout commentaire, critique ou suggestion de votre part, est évidemment le bienvenu. Il vous est possible de m'envoyer vos commentaires directement par courrier électronique à l'adresse suivante : vincent.legat@uclouvain.be

Les éventuels errata du texte (ainsi que les nouvelles versions successives) seront disponibles sur le site Web du cours.

La section sur la convection naturelle a été rédigée par Quentin Bouvy sur base du cours et des transparents 08-09 Les titulaires du cours lui sont très reconnaissants pour ce travail fait avec beaucoup de soin. Toutefois, il est possible que quelques petites inexactitudes soient encore présentes et cette partie devra encore être largement retravaillée.

Les sections sur le transfert de masse et le transfert de chaleur ne correspondent pas totalement à l'exposé du cours et nécessiteront aussi une certaine indulgence de la part des étudiants. Nous espérons vous fournir une version mise à jour au fur à mesure de la remise à jour des notes.

Le secret d'ennuyer est de vouloir tout dire -Voltaire-

Avant-propos

Les phénomènes de transfert interviennent dans un grand nombre de domaines d'application de l'ingénieur. Il est donc essentiel d'en introduire la modélisation mathématique. Il s'agit du transfert de quantité de mouvement (écoulements visqueux), du transfert d'énergie (conduction thermique, convection et radiation) ainsi que du transfert de masse. En général, le milieu dans lequel les phénomènes de transfert sont décrits est supposé être continu. Il s'agit de *l'hypothèse de milieux continus*. En négligeant presque complètement une interprétation au niveau moléculaire des phénomènes de transferts, cette démarche permet de répondre à la plupart des problèmes pratiques posés à l'ingénieur. Afin d'avoir une compréhension complète des phénomènes étudiés, il est évidemment opportun d'avoir une compréhension aux deux échelles.

Pourquoi effectue-t-on l'hypothèse des milieux continus au lieu d'effectuer un calcul de dynamique moléculaire ? Pour un système avec un petit nombre d'éléments, nous pouvons effectuer des prédictions en utilisant les lois de la dynamique classique. Mais, cela n'est plus possible pour un système avec un très grand nombre d'éléments ? A titre d'exemple, il suffit d'observer qu'un litre d'air contient 10^{23} molécules, tandis qu'un ordinateur fait actuellement 10^{10} opérations par seconde. En d'autres mots, il faut 10^{13} secondes ou approximativement 100000 années juste pour référencer chaque molécule ! Il est donc totalement impossible de prédire le comportement de l'air dans la plupart des situations usuelles par la dynamique moléculaire. C'est pourquoi, nous utilisons la mécanique des milieux continus.

L'hypothèse fondamentale de la mécanique des milieux continus est que le comportement de la plupart des gaz, solides et liquides est quasiment identique que si ils étaient parfaitement identique. L'observation expérimentale supporte cette hypothèse, du moins pour l'air, l'eau, les métaux... Les quantités physiques telles que la masse et la quantité de mouvement associées avec les molécules contenues dans un volume donné peuvent être vues comme étant réparties uniformément sur le volume au lieu d'être concentré sur chaque molécule.

La densité obtenue comme une moyenne...

A titre d'illustration, nous allons expliquer et décrire l'hypothèse de mécanique de milieux continus dans un monde uni-dimensionnel. Le système de coordonnées spatiales se réduit donc simplement à l'axe \mathbf{e}_x . Dans ce monde uni-dimensionnel, nous avons des molécules. Supposons donc que nous souhaitons mesurer la densité d'un matériau à un point x et à un instant t . Dans cette optique, nous considérons un intervalle de longueur L centré en

x et nous mesurons la quantité de masse $\mathcal{M}_L(t)$ présente dans cet intervalle. La densité en ce point x et à un instant t est alors simplement définie par :

$$\rho(L, x, t) = \frac{\mathcal{M}_L(t)}{L}.$$

Evidemment, le résultat obtenu est différent pour chaque longueur L d'intervalle et pour chaque position x et instant t . En d'autres mots, pour une position donnée et un instant donné, la densité est une fonction de la longueur L . Expérimentalement, on observe en général un comportement semblable à celui illustré sur la Figure 1.

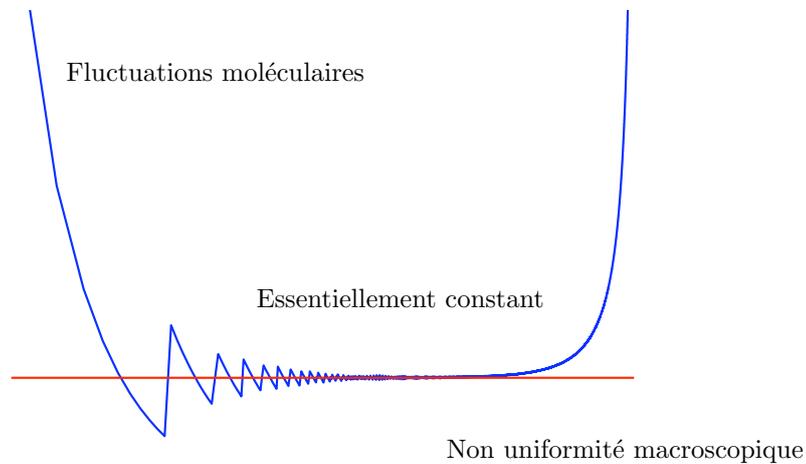


Figure 1: Allure schématique de la moyenne de la densité $\rho(L, x, t)$ en fonction de la longueur de l'intervalle de référence L à une position donnée x et à un instant fixé t .

On peut alors imaginer de définir la densité du milieu continu en x et t comme la valeur de la moyenne de $\rho(L, x, t)$ dans la zone centrale de la Figure 1 et de prolonger cette valeur constante pour les tailles d'intervalles tendant vers zéro. En d'autres mots, on supprime la partie gauche du graphe en extrapolant la valeur constante de la zone centrale, dans la partie où on observe normalement les fluctuations moléculaires. Notons qu'à une dimension, la densité aura les dimensions de masse par longueur. Dans le cas tridimensionnel, nous aurons évidemment des unités de masse par volume. D'une certaine manière, il y a une sorte de principe d'incertitude ici. Pour calculer la densité, nous effectuons une moyenne sur une certaine longueur L : ce qui introduit une certaine incertitude sur la valeur fournie... Pour réduire cette incertitude, il faudrait diminuer la longueur L .

Par contre, si nous diminuons trop cette longueur, nous allons être une incertitude due aux fluctuations moléculaires. Donc, plus on souhaite réduire l'erreur dû au processus de moyenne, plus on introduit une incertitude due aux fluctuations moléculaires.

En mécanique de milieux continus, un *point matériel* est donc physiquement une volume élémentaire suffisamment grand afin de lisser toutes les fluctuations moléculaires et suffisamment petit afin d'être négligeable par rapport aux variations macroscopiques. La validité de l'hypothèse de mécanique des milieux continus est directement lié à la séparation des échelles entre les fluctuations moléculaires et les variations macroscopiques. En général, on observe une séparation des échelles d'un facteur 10^{15} dans les milieux solides, liquides et gazeux pour les applications usuelles de l'ingénieur.

Cette procédure de moyenne peut être effectuée pour toutes les quantités physiques que l'on souhaite conserver. A chaque point de l'espace et du temps, on pourra ainsi assigner une densité de masse $\rho(x, t)$, une densité de quantité de mouvement $p(x, t)$ ou une densité d'énergie interne massique $U(x, t)$. Si nous supposons que les fluctuations aléatoires de la position et de la masse des molécules n'est pas corrélé avec les fluctuations aléatoires de vitesses de celles-ci, on peut écrire simplement que :

$$p(x, t) = \rho(x, t) v(x, t). \quad (1)$$

En d'autres mots, nous allons prendre l'équation (1) comme la manière d'obtenir un champ moyen de vitesses pour le milieu continu. La vitesse du milieu continu est donc définie comme le rapport de la quantité de mouvement et de la densité par le processus que nous venons de décrire.

L'équation de continuité...

De manière générale en physique, il existe un principe universel que la matière ne peut être ni créée, ni détruite. Dans la mécanique des milieux continus, ce principe permet l'obtention de *l'équation de continuité* : cette équation s'applique à l'évolution de n'importe que volume matériel puisqu'il ne fait intervenir que la vitesse et la densité du matériau.

Pour obtenir la forme locale du principe de conservation, nous allons considérer un petit intervalle du milieu continu et y appliquer le principe de conservation de la masse. La tranche de matériau ainsi considéré ne doit toutefois pas vraiment être trop petit afin de pouvoir négliger toutes les fluctuations. Considérons donc un intervalle fixe quelconque $[a, b]$ du milieu continu tel qu'illustré sur la Figure 2.

La masse présente sur l'intervalle est simplement l'intégrale de la densité $\rho(x, t)$. Comme il n'y a ni création, ni destruction de masse sur l'intervalle, la masse totale qui y est présente ne peut changer que par la matière qui entre ou qui sort par les deux

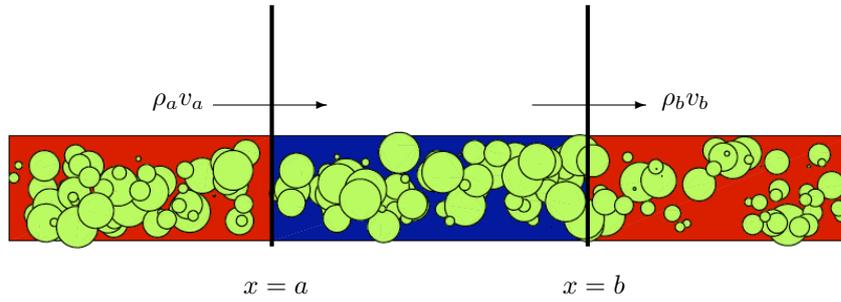


Figure 2: Un intervalle quelconque du milieu continu pour y appliquer le principe de conservation de la masse.

extrémités en $x = a$ et $x = b$. Si le milieu se déplace à une vitesse $v(x, t)$, le flux massique $\rho(x, t) v(x, t)$ est la mesure du transport de la masse vers la droite en un point donné. On peut donc écrire la conservation de la masse sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = \rho(a, t)v(a, t) - \rho(b, t)v(b, t) \quad \forall a, b$$

$$\int_a^b \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = -[\rho v]_a^b \quad \forall a, b$$

$$\int_a^b \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx \quad \forall a, b$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) \right) dx = 0 \quad \forall a, b$$

↓ Si ρ et v sont continues,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (2)$$

Il est essentiel ici d'observer que l'on obtient l'équation de continuité du principe global de conservation de la masse en utilisant le théorème suivant : si l'intégrale d'une fonction continue sur tout intervalle est nulle, alors cette fonction doit s'annuler sur tout l'intervalle. Le passage de la forme globale du principe de conservation à une forme locale n'est donc possible que grâce à l'hypothèse des milieux continus.

L'équation (2) est la *forme conservative de l'équation de continuité*. C'est l'expression que l'on obtient naturellement en appliquant le principe de conservation de la masse à un intervalle (ou à un volume) de contrôle. Il est aisé d'obtenir ce qu'on appelle la *forme non-conservative de l'équation de continuité* en développant la dérivée spatiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

où la notation D/Dt représente la dérivée matérielle. Cette seconde forme peut s'obtenir directement en appliquant non plus le principe de conservation à un intervalle fixe, mais un intervalle matériel dont les frontières suivent le moment du milieu continu. Ce petit exercice est laissé au soin du lecteur.

On peut aisément interpréter cette seconde équation comme suit : le changement de densité d'un point matériel est donc proportionnel à l'opposé du gradient de vitesse. Considérons une vitesse v positive et donc un mouvement de la gauche vers la droite. Lorsque $\partial v/\partial x < 0$, les points matériels en $x = b$ sont plus lents que ceux en $x = a$ et donc les particules se retrouvent plus serrées entre elles et doivent s'agglutiner dans un plus petit espace : la densité doit logiquement augmenter.

Références

- G.K. BATCHELOR *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press 1967 (reprinted paperback 1994).
- F. M. WHITE *Viscous fluid flow" second edition, Series in Mechanical Engineering*, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- P. A. THOMPSON *Compressible-fluid dynamics, advanced engineering series*, Maple Press, 1984.
- H. LAMB *Hydrodynamics*, sixth edition, Cambridge University Press 1932, Dover Publications (paperback).
- L. ROSENHEAD *Laminar boundary layers*, Oxford University Press 1963, Dover Publications (paperback).
- P. G. DRAZIN AND W. H. REID *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press 1985.
- M. VAN DYKE *An album of fluid motion*, The Parabolic Press, 1982.
- A. BEJAN *Heat transfer*, John Wiley, Inc., 1993.

- R.B. BIRD, W.E. STEWART., E.N. LIGHFOOT *Transport phenomena*, Wiley int.ed., 1960.
- H. SCHLICHTING *Boundary-layer theory*, Mc Graw-Hill, NY, 1986.
- L.D. LANDAU AND E.M. LIFSCHITZ *Fluid mechanics*, Course of Theoretical Physics vol. 6, Pergamon Press, London, 1959.
- L. PRANDTL AND O.G. TIETJENS *Fundamentals of hydro- and aero-mechanics*, Dover publ., NY, 1957.
- J. HAPPEL AND H. BRENNER *Low Reynolds number hydrodynamics*, Noordhoff int. publ., Leyden, 1973.
- D.J. TRITTON *Physical fluid dynamics*, Van Nostrand Reinhold, UK, 1985.
- R. SIEGEL AND J. HOWELL *Thermal radiation heat transfer*, 2nd ed., McGraw-Hill, NY, 1981.
- A.J. ROBERTS, *A one-dimensional introduction to continuum mechanics*, World Scientific, London, 1994.

Table des matières

1	Les fluides dans la mécanique des milieux continus	1
1.1	Lois de conservation	1
1.1.1	Formes globales des lois de conservation pour les volumes matériels	2
1.1.2	Formes locales des lois de conservation	5
1.1.3	Formes globales des lois de conservation pour les volumes de contrôle	7
1.1.4	Concept de puissance des efforts internes	10
1.1.5	Concept d'énergie potentielle	11
1.1.6	Concepts de pression, d'extra-tensions et d'enthalpie	13
1.2	Lois de comportement	14
1.2.1	Concept d'entropie et de température absolue	15
1.2.2	Modèle du fluide visqueux newtonien	17
1.2.3	Modèle du gaz idéal	23
1.2.4	Écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien	24
1.3	Conditions aux limites	25
2	Écoulements incompressibles établis	29
2.1	Écoulements de Hagen-Poiseuille et de Couette	29
2.2	Écoulements instationnaires	38
2.2.1	Démarrage brusque de l'écoulement dans une conduite	38
2.2.2	Écoulement cyclique avec gradient de pression oscillant	42

2.2.3	Démarrage brusque d'une plaque	45
2.2.4	Plaque oscillante	48
2.3	Zone d'entrée et longueur d'établissement	48
3	Transfert de chaleur	53
3.1	Transfert de chaleur dans les solides	54
3.1.1	Conduction : loi de Fourier	54
3.1.2	Convection : loi de Newton	57
3.1.3	Notion de résistance thermique	61
3.1.4	Exemple de solution analytique de l'équation de Laplace	65
3.2	Transfert thermique en écoulement établi	68
3.2.1	Transfert thermique établi avec température de paroi constante	69
3.2.2	Transfert thermique établi avec température de paroi linéaire	71
3.2.3	Entrée thermique: le problème de Grätz	75
3.2.4	Nombre de Nusselt moyen	80
4	Couches limites laminaires	83
4.1	Introduction	83
4.2	Etablissement des équations de la couche limite laminaire	85
4.2.1	Approche physique	85
4.2.2	Approche mathématique	88
4.3	Solution pour le cas avec u_e constant (Blasius)	91
4.4	Épaisseurs de la couche limite	95
4.5	Approche intégrale pour le cas général	97
4.6	Couches limites thermiques	101
4.6.1	cas $Pr = 1$ et u_e constant	102
4.6.2	cas Pr général, dissipation négligeable, u_e et T_w constants	104

5	Convection naturelle	109
5.1	Une étape préliminaire : la convection forcée...	110
5.2	Nombre de Grashof	113
5.3	Une solution approchée pour le problème de la convection naturelle	115

*Even the mountains flowed before the Lord.
(from the song of Deborah after her victory over the Philistines, Judges 5:5)*

Chapitre 1

Les fluides dans la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus est une discipline scientifique où l'on souhaite construire un modèle pour prédire l'évolution d'un milieu (ici, le fluide considéré). Ce modèle est formé d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites. Les équations d'un modèle continu sont d'une part les équations de conservation qui s'appliquent à tous les milieux, et d'autre part les équations de comportement (ou de constitution) qui sont spécifiques au comportement particulier du matériau considéré. Les conditions aux limites sont, en général, classées en conditions initiales et en conditions aux frontières.

1.1 Lois de conservation

Les lois de conservation ont une forme globale universelle schématisée sur la figure (1.1). Le contenu $\mathcal{C}(t)$ d'un système considéré évolue en fonction de divers apports externes $\mathcal{A}_1(t)$, $\mathcal{A}_2(t)$... en accord avec une équation différentielle de conservation

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t) + \dots \quad (1.1)$$

Il est essentiel de correctement définir le système, en identifiant clairement ce qui est dans le système et ce qui est à l'extérieur du système. Il est aussi important de noter que l'expression des lois de conservation est toujours relative à un certain observateur (galiléen ou quelconque). Il convient donc également d'identifier pour quelle classe d'observateurs, une loi de conservation est valable.

Les lois de conservation mènent ensuite, sous certaines conditions de continuité, à des

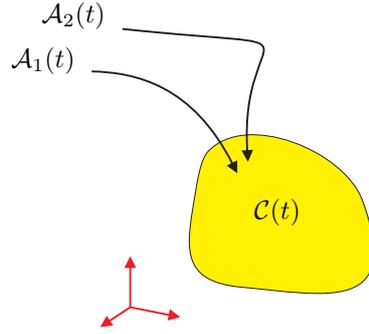


Figure 1.1: Forme globale universelle des lois de conservation.

formes locales, qui sont des équations algébriques ou des équations aux dérivées partielles équivalentes. Plus précisément, le fait qu'une loi de conservation soit satisfaite pour une certaine classe de systèmes (par exemple, tous les volumes matériels ou tous les volumes de contrôle) est équivalent à ce que sa forme locale soit satisfaite en tout point à tout instant.

Rappelons que la physique d'un milieu s'exprime en postulant, sous forme de principes, les formes globales des lois de conservation dont on déduit ensuite les formes locales. En présence de surfaces de discontinuité (comme les ondes de choc), les formes locales ne peuvent plus être établies dans la discontinuité. Il est, dès lors, nécessaire de revenir aux formes globales et d'établir les relations de saut adéquates.

1.1.1 Formes globales des lois de conservation pour les volumes matériels

Un volume matériel $V(t)$ est défini comme un ensemble de points matériels en mouvement. Ces points se déplacent à la vitesse macroscopique définie par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_i(x_j, t)\mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

Cette vitesse est définie par rapport à un repère $(0, \mathbf{e}_i)$ préalablement défini. Il s'agit ici d'une représentation eulérienne des vitesses puisque les composantes sont exprimées en termes des coordonnées actuelles et du temps. En général, on écrit simplement \mathbf{v} ou v_i en omettant la dépendance par rapport à x_j et à t . Evidemment, si le contexte l'exige, on peut introduire une représentation lagrangienne du même champ de vitesse et utiliser des symboles distincts.

Afin d'écrire les lois de conservation globales pour un volume matériel, il convient d'abord de définir les grandeurs physiques nécessaires associées à un volume matériel $V(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \int_{V(t)} \rho dV, && \text{(masse),} \\
\mathcal{P}(t) &= \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV, && \text{(quantité de mouvement),} \\
\mathcal{N}(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV, && \text{(moment de la quantité de mouvement),} \\
\mathcal{U}(t) &= \int_{V(t)} \rho U dV, && \text{(énergie interne),} \\
\mathcal{K}(t) &= \int_{V(t)} \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} dV, && \text{(énergie cinétique),} \\
\mathcal{F}_d(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{f} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV, && \text{(forces à distance),} \\
\mathcal{F}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS, && \text{(forces de contact),} \\
\mathcal{M}_d(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dV, && \text{(moment des forces à distance),} \\
\mathcal{M}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS, && \text{(moment des forces de contact),} \\
\mathcal{P}_d(t) &= \int_{V(t)} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV, && \text{(puissance des forces à distance),} \\
\mathcal{P}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS, && \text{(puissance des forces de contact),} \\
\mathcal{Q}_d(t) &= \int_{V(t)} r dV, && \text{(puissance calorifique fournie à distance),} \\
\mathcal{Q}_c(t) &= \int_{\partial V(t)} q(\mathbf{n}) dS, && \text{(puissance calorifique fournie par conduction),}
\end{aligned}$$

(1.3)

où $\partial V(t)$ représente la frontière du volume matériel $V(t)$. Les éléments de volume ou de surface dans $V(t)$ ou sur $\partial V(t)$ sont donnés par dV et dS respectivement. La normale

unitaire sortante de $\partial V(t)$ est notée \mathbf{n} . Les autres symboles désignent les fonctions de champ usuelles :

- ρ , la masse volumique,
- \mathbf{v} , la vitesse,
- U , l'énergie interne massique,
- $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, la densité des forces de distance,
- \mathbf{g} , la densité des forces de masse,
- $\mathbf{t}(\mathbf{n})$, la densité des forces de contact exercées sur la frontière,
- r , la densité de puissance calorifique fournie à distance,
- $q(\mathbf{n})$, le flux de puissance calorifique fourni par conduction.

Les lois de conservation globales pour un volume matériel représentées de manière schématique sur la figure 1.2 sont données par :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= 0, & \forall V(t), \\
 \frac{d\mathcal{P}}{dt}(t) &= \mathcal{F}_d(t) + \mathcal{F}_c(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel}, \\
 \frac{d\mathcal{N}}{dt}(t) &= \mathcal{M}_d(t) + \mathcal{M}_c(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel}, \\
 \frac{d(\mathcal{K} + \mathcal{U})}{dt}(t) &= \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_c(t) \\
 & \quad + \mathcal{Q}_d(t) + \mathcal{Q}_c(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel},
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

A l'exception de la conservation de la masse, ces lois ne s'appliquent que pour un repère inertiel. Il est possible de démontrer que, lorsque l'ensemble des lois de conservation est

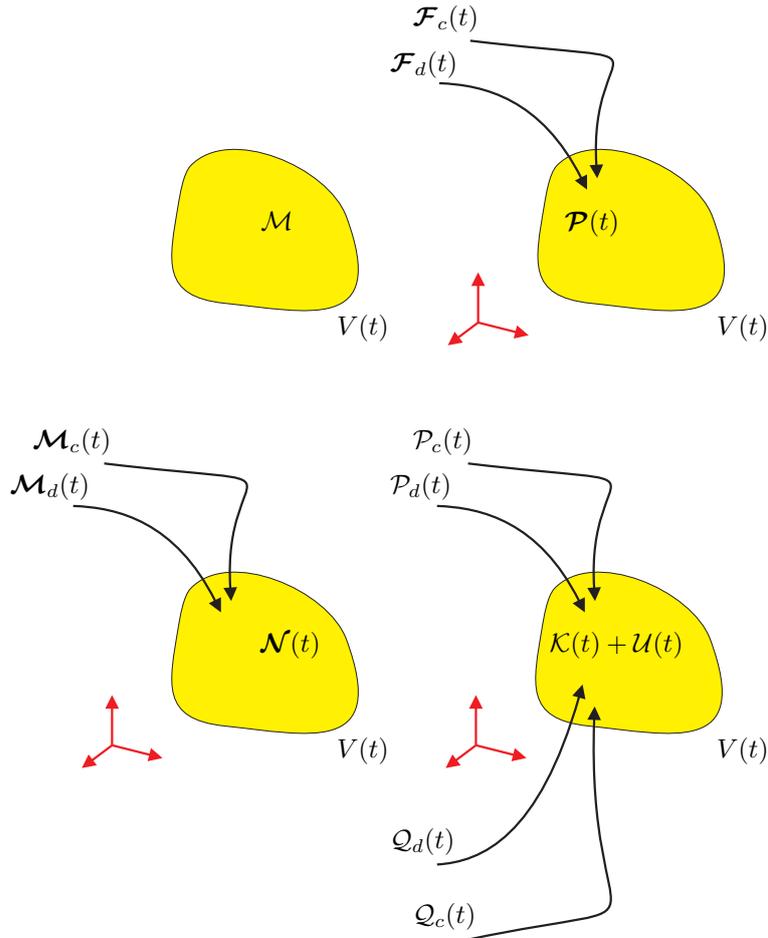


Figure 1.2: Lois de conservation pour un volume matériel.

satisfait par rapport à un certain repère inertiel, elles le sont également pour tout autre repère inertiel (et même pour tout repère dans le cas de la conservation de la masse).

1.1.2 Formes locales des lois de conservation

Les formes locales des lois de conservation s'établissent à partir de l'ensemble des formes globales à l'aide des théorèmes de Reynolds et de Green. Les formes locales peuvent être classées en relations algébriques et en relations différentielles.

Les relations algébriques font apparaître le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le vecteur flux de chaleur \mathbf{q} et leurs relations avec $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ et $q(\mathbf{n})$. En utilisant respectivement la conservation de la quantité de mouvement, du moment de la quantité de mouvement et de l'énergie, on obtient pour tout repère :

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(\mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}, \\
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T, \\
q(\mathbf{n}) &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}.
\end{aligned}
\tag{1.5}$$

Afin d'écrire les relations différentielles locales de conservation, il est utile d'introduire maintenant quelques notations : la dérivée matérielle D/Dt et le tenseur des taux ou vitesses de déformation \mathbf{d} .

La dérivée matérielle est définie par

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.
\tag{1.6}$$

Elle représente la variation d'un champ par rapport au temps lorsqu'on accompagne le mouvement du point matériel qui se trouve à l'endroit où le champ est mesuré.

Le tenseur des taux de déformation est défini par

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}).
\tag{1.7}$$

Physiquement, il est possible d'interpréter les composantes de ce tenseur comme suit :

- Les composantes diagonales de ce tenseur s'interprètent en termes d'allongements relatifs par unité de temps de segments matériels élémentaires parallèles aux axes du repère à l'instant t . Ainsi, d_{11} est l'allongement relatif par unité de temps d'un segment parallèle à \mathbf{e}_1 en t .
- Les composantes non-diagonales représentent le rapprochement (ou l'éloignement) angulaire par unité de temps de deux segments matériels élémentaires. Ainsi, $2d_{12}$ est la variation angulaire par unité de temps de deux segments matériels élémentaires précisément parallèles à \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 à l'instant t . Un rapprochement ou un éloignement angulaire correspond respectivement à une variation positive ou négative.
- La trace du tenseur des vitesses de déformation (d_{ii}) correspond à un accroissement relatif par unité de temps d'un volume matériel élémentaire en t .

En utilisant les notations de la dérivée matérielle et du tenseur des taux de déformation, les relations différentielles qui expriment localement les lois de conservation (la conservation locale de la masse, la conservation locale de la quantité de mouvement et la conservation locale de l'énergie interne, respectivement) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\
\rho \frac{DU}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ces relations ont une autre forme dite *conservative*. Cette forme conservative est fort utilisée en mécanique des fluides et s'obtient facilement en tenant compte de la conservation de la masse :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \\
\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \nabla \cdot \mathbf{q}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Rappelons que la loi locale de conservation de la quantité de mouvement, qu'elle soit exprimée en termes de dérivées matérielles ou sous forme conservative, ne s'applique que dans un repère inertiel.

1.1.3 Formes globales des lois de conservation pour les volumes de contrôle

Les lois de conservation peuvent également s'écrire, de manière totalement équivalente, pour un volume de contrôle V^c fixe dans le repère considéré. Dans ce cas, il faut désormais inclure des apports convectifs dus au transport de matière au travers la frontière du volume de contrôle.

Les lois de conservation globales pour un volume de contrôle représentées de manière schématique sur la figure 1.3, sont données par :

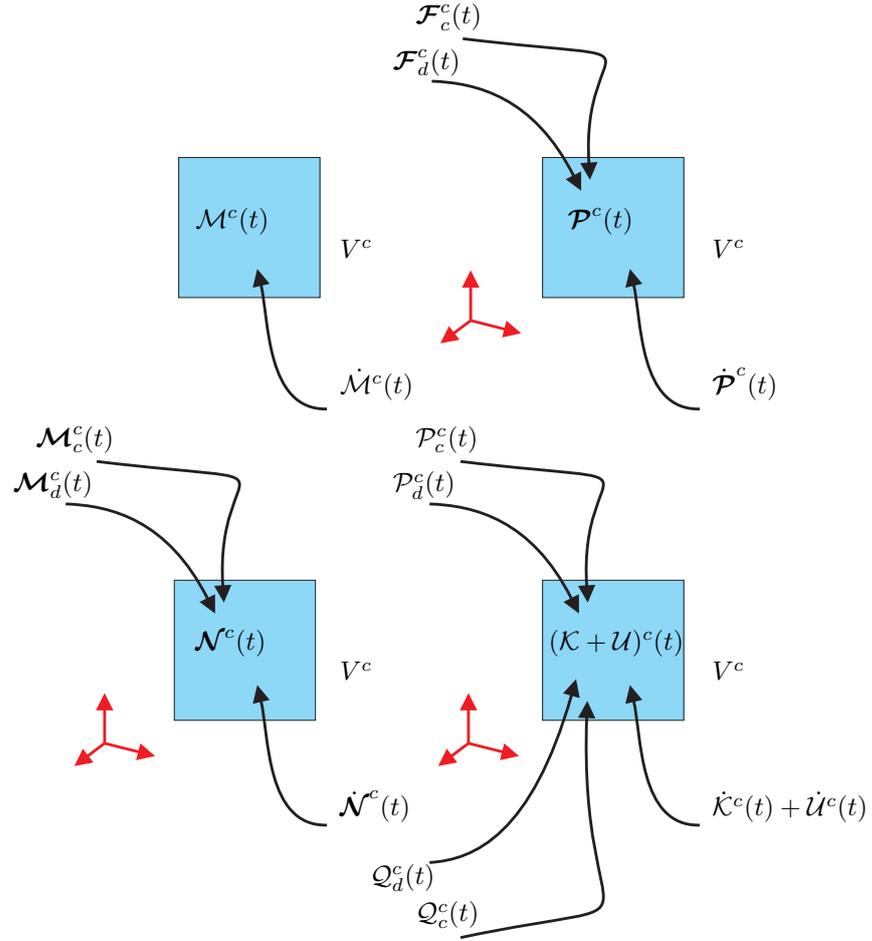


Figure 1.3: Lois de conservation pour un volume de contrôle.

$$\frac{d\mathcal{M}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{M}}^c(t), \quad \forall V^c,$$

$$\frac{d\mathcal{P}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{P}}^c(t) + \mathcal{F}_d^c(t) + \mathcal{F}_c^c(t), \quad \forall V^c, \\ \forall \text{ repère inertiel},$$

$$\frac{d\mathcal{N}^c}{dt}(t) = \dot{\mathcal{N}}^c(t) + \mathcal{M}_d^c(t) + \mathcal{M}_c^c(t), \quad \forall V^c, \\ \forall \text{ repère inertiel}, \quad (1.10)$$

$$\frac{d(\mathcal{K}^c + \mathcal{U}^c)}{dt}(t) = \dot{\mathcal{K}}^c(t) + \dot{\mathcal{U}}^c(t) \\ + \mathcal{P}_d^c(t) + \mathcal{P}_c^c(t) \\ + \mathcal{Q}_d^c(t) + \mathcal{Q}_c^c(t), \quad \forall V^c, \\ \forall \text{ repère inertiel},$$

Les grandeurs \mathcal{M}^c , \mathcal{P}^c ... sont définies exactement par des expressions similaires à (1.3), mais dont le domaine d'intégration n'est plus le volume matériel (ou sa frontière), mais le volume de contrôle (ou sa frontière). Il ne reste donc plus qu'à définir les apports convectifs par les expressions :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{M}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{P}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{N}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{K}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \\
\dot{\mathcal{U}}^c(t) &= \int_{\partial V^c} -\rho U(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Il est aisé d'établir les lois de conservation pour un volume de contrôle, à partir de celles sur un volume matériel. Il suffit de considérer un volume matériel $V(t)$ occupant précisément le domaine V^c à l'instant t (mais pas nécessairement aux autres temps). On peut alors écrire au temps t pour un champ f quelconque

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{V(t)=V^c \text{ ent}} \rho f dV &= \int_{V^c} \rho \frac{Df}{Dt} dV \\
&= \int_{V^c} \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla f \right] dV \\
&= \int_{V^c} \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla f + f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \right] dV \\
&= \int_{V^c} \left[\frac{\partial (\rho f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} f) \right] dV \\
&= \frac{d}{dt} \int_{V^c} \rho f dV + \int_{\partial V^c} \rho f (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.
\end{aligned}$$

On voit donc bien apparaître l'apport convectif. Il est également possible d'obtenir les formes globales pour un volume de contrôle en partant des lois de conservation locales sous forme conservative (ou vice-versa).

1.1.4 Concept de puissance des efforts internes

La formalisation des lois de conservation en termes de systèmes et d'apports externes permet d'obtenir d'autres formulations ou variantes des lois de conservations. Il est ainsi possible d'obtenir des variantes de l'équation d'énergie. En particulier, à partir des formes globales de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, il est possible d'établir des lois de conservation de l'énergie cinétique (ou théorème de l'énergie cinétique) et de l'énergie interne.

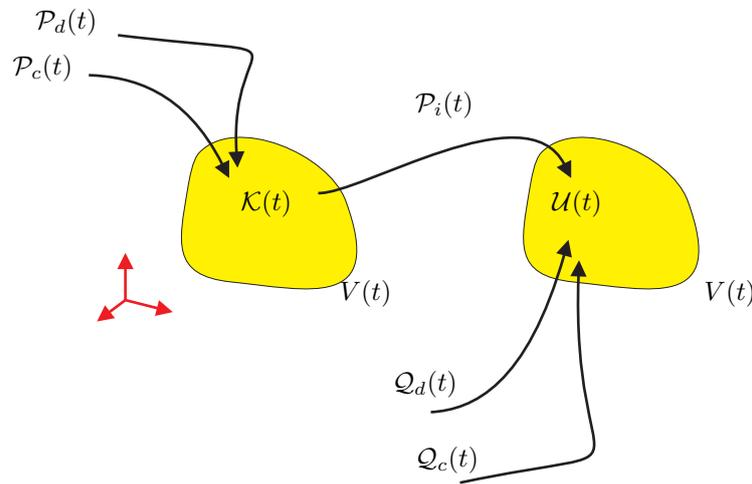


Figure 1.4: Lois de conservation de l'énergie cinétique et interne pour un volume matériel.

Ces relations qui sont représentées schématiquement sur la figure 1.4 s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{K}}{dt}(t) &= \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_c(t) - \mathcal{P}_i(t), & \forall V(t), \\
 & & \forall \text{ repère inertiel}, \\
 \frac{d\mathcal{U}}{dt}(t) &= \mathcal{Q}_d(t) + \mathcal{Q}_c(t) + \mathcal{P}_i(t), & \forall V(t),
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

où $\mathcal{P}_i(t)$ désigne la puissance de efforts internes et est donné par :

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_{V(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV. \quad (1.13)$$

La conservation de l'énergie interne s'applique dans un repère quelconque et donne directement la forme locale (1.8.3). On peut donc dire qu'étant donné un volume matériel $V(t)$, celui-ci reçoit par unité de temps un apport externe d'énergie cinétique $\mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_c(t)$ et un apport externe d'énergie interne $\mathcal{Q}_d(t) + \mathcal{Q}_c(t)$. En outre, il y a une transformation d'énergie cinétique en énergie interne (ou vice-versa) proportionnel à $\mathcal{P}_i(t)$. La forme locale de la conservation de l'énergie cinétique s'obtient directement et est

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}. \quad (1.14)$$

On peut faire exactement le même raisonnement pour un volume de contrôle et écrire les lois correspondantes.

1.1.5 Concept d'énergie potentielle

Lorsque dans le repère inertiel considéré, les forces à distances dérivent d'un potentiel $W(\mathbf{x})$, il est possible de faire apparaître le concept d'énergie potentielle que l'on définit par :

$$\mathcal{W}(t) = \int_{V(t)} \rho W dV. \quad (1.15)$$

Puisque $\mathbf{g} = -\boldsymbol{\nabla}W$, l'utilisation du théorème de Reynolds permet de déduire immédiatement la loi de conservation de l'énergie potentielle

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho W dV &= \int_{V(t)} \rho \frac{DW}{Dt} dV \\
&= \int_{V(t)} \left[\rho \frac{\partial W}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla W \right] dV \\
&= \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla W dV \\
&= - \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} dV .
\end{aligned}$$

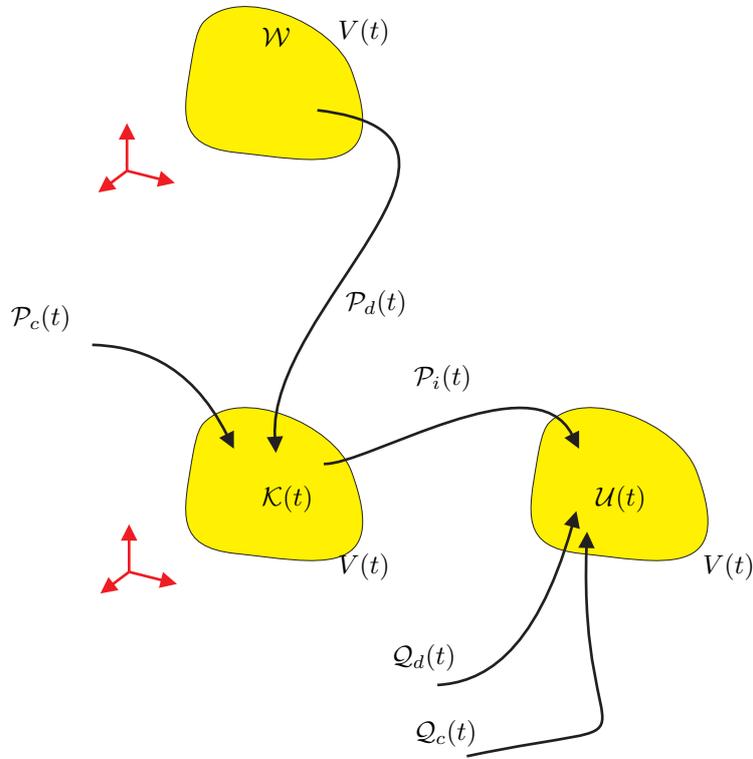


Figure 1.5: Lois de conservation de l'énergie potentielle, cinétique et interne pour un volume matériel.

Dans le cas où les forces à distance dépendent d'un potentiel, les apports et les transformations d'énergie peuvent être maintenant représentés par le diagramme de la figure 1.5. On distingue l'énergie interne, cinétique et potentielle, et on peut écrire les relations globales et locales de conservation de l'énergie potentielle et de la somme de l'énergie potentielle et cinétique.

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{W}}{dt}(t) &= -\mathcal{P}_d(t), & \forall V(t), \\
& & \forall \text{ repère inertiel}, \\
\frac{d(\mathcal{W} + \mathcal{K})}{dt}(t) &= \mathcal{P}_c(t) - \mathcal{P}_i(t), & \forall V(t), \\
& & \forall \text{ repère inertiel},
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{DW}{Dt} &= -\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \\
\rho \frac{D}{Dt} \left(W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}.
\end{aligned}
\tag{1.17}$$

1.1.6 Concepts de pression, d'extra-tensions et d'enthalpie

En mécanique des fluides, la pression thermodynamique p joue un rôle central. C'est pourquoi on décompose le tenseur des contraintes comme suit

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau},
\tag{1.18}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des extra-contraintes et $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identité. Dans le cas d'un fluide visqueux newtonien, ce tenseur des extra-contraintes sera uniquement formé des termes visqueux. Puisque le volume massique est $v = 1/\rho$, on définit également l'enthalpie massique H par :

$$H = U + \frac{p}{\rho}.
\tag{1.19}$$

L'enthalpie d'un volume matériel est alors

$$\mathcal{H}(t) = \int_{V(t)} \rho H dV.
\tag{1.20}$$

Il est dès lors possible d'utiliser H , p et $\boldsymbol{\tau}$ plutôt que U et $\boldsymbol{\sigma}$ dans l'écriture de la forme

locale de l'équation de la conservation de l'énergie. Tout d'abord observons que

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \rho \left(\frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) \\ &= \rho \frac{DU}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.\end{aligned}$$

En utilisant la conservation de l'énergie interne, on développe ensuite

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= -p \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ &= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0}.\end{aligned}$$

et on obtient finalement une expression locale de la conservation de l'enthalpie. Il est également possible d'écrire le théorème de l'énergie cinétique en termes de pression et d'extra-tensions et d'en déduire finalement une expression locale de la conservation de l'enthalpie massique totale $H + W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}$.

$$\begin{aligned}\rho \frac{DH}{Dt} &= \frac{Dp}{Dt} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} \\ \rho \frac{D}{Dt} \left(W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} p - \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \quad (1.21) \\ \rho \frac{D}{Dt} \left(H + W + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + r - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q},\end{aligned}$$

1.2 Lois de comportement

Les lois de conservation forment un ensemble d'équations aux dérivées partielles qui doivent être complétées par des équations de constitution ou de comportement qui caractérisent le fluide considéré. L'ensemble des équations de conservation et de comportement formera alors le modèle mathématique permettant la prédiction de l'évolution du milieu.

Toutefois, la définition des équations de constitution doit obéir à certaines règles. En particulier, les équations de constitution doivent être écrites de manière à satisfaire le second principe de la thermodynamique.

1.2.1 Concept d'entropie et de température absolue

Si on désigne l'entropie massique par S et la température absolue par T , les potentiels thermodynamiques classiques, c'est-à-dire, l'énergie libre massique de Helmholtz F et l'enthalpie libre massique (ou enthalpie libre de Gibbs massique) G sont définis par les expressions usuelles :

$$\begin{aligned} F &= U - TS, \\ G &= H - TS. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Et donc pour un volume matériel, on écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= \int_{V(t)} \rho S dV, \\ \mathcal{F}(t) &= \int_{V(t)} \rho F dV, \\ \mathcal{G}(t) &= \int_{V(t)} \rho G dV. \end{aligned} \tag{1.23}$$

On peut donner une interprétation physique aux grandeurs $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{G}(t)$ par des diagrammes de type loi de conservation. Mais ceux-ci ne peuvent s'établir que sous des hypothèses restrictives (transformations isobares et/ou isothermes) qui n'ont d'intérêt réel que dans les milieux à plusieurs constituants (milieux réactifs) ou à plusieurs phases.

Par contre, les concepts d'entropie et de température absolue permettent d'énoncer le second principe de la thermodynamique. Celui-ci est d'une nature fondamentalement différente des lois de conservation. Il exprime que pour tout volume matériel, l'accroissement d'entropie par unité de temps est au moins égal à l'apport externe d'entropie par unité de temps. La différence $\xi(t)$ est donc nécessairement positive et compte pour la production irréversible d'entropie par le système. Une relation d'égalité est évidemment associée aux transformations réversibles.

Pour un volume matériel, on obtient sur la figure 1.6 un diagramme du même type

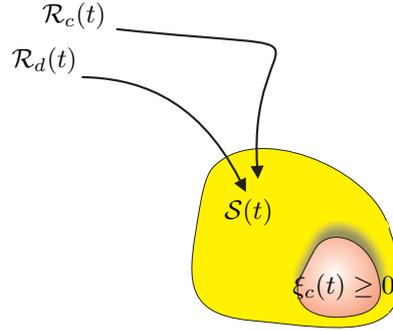


Figure 1.6: Second principe de la thermodynamique.

que pour les lois de conservation. Le second principe peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{dS}{dt} \geq \mathcal{R}_d(t) + \mathcal{R}_c(t), \quad \forall V(t),} \quad (1.24)$$

où les apports externes d'entropie sont définis par

$$\mathcal{R}_d(t) = \int_{V(t)} \frac{r}{T} dV, \quad (\text{apport externe radiatif d'entropie par unité de temps}), \quad (1.25)$$

$$\mathcal{R}_c(t) = \int_{\partial V(t)} \frac{q(\mathbf{n})}{T} dS, \quad (\text{apport externe conductif d'entropie par unité de temps}).$$

Un traitement classique par usage des théorèmes de Reynolds et de Green permet d'exprimer le second principe sous une forme locale :

$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \nabla T, \quad (1.26)$$

et d'obtenir en combinant (1.26) avec l'équation de conservation de l'énergie, l'inégalité

de Clausius-Duhem, soit en termes de U et $\boldsymbol{\sigma}$ ou en termes de H , $\boldsymbol{\tau}$ et p

$$\begin{aligned}\rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DU}{Dt} &\geq -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T, \\ \rho T \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DH}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} &\geq -\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T.\end{aligned}\tag{1.27}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem doit être satisfaite en tout point et en tout instant. Une égalité correspond au caractère localement réversible de la transformation. Plus précisément, la formulation dite rationnelle du second principe impose que l'inégalité de Clausius-Duhem soit identiquement satisfaite pour une histoire arbitraire des variables thermodynamiques du point matériel considéré. Une telle histoire est appelée processus thermodynamique.

En toute rigueur, on notera que la formulation précédente du second principe n'est valable que pour les transformations dites proches de l'équilibre thermodynamique. Dans ce cas, on accepte l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir, en fonction des coordonnées et du temps, l'entropie massique comme une mesure du désordre énergétique local, et la température absolue d'une manière telle que deux corps à l'équilibre et en contact échangent immédiatement de la chaleur du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Par contre, lorsque les transformations sont fortement irréversibles, une formulation différentielle (et plus complexe...) du second principe est nécessaire. Cette question qui ne fait pas l'unanimité dans la communauté scientifique déborde largement le cadre de ce cours.

1.2.2 Modèle du fluide visqueux newtonien

Décomposons le tenseur des taux de déformation en une partie sphérique \mathbf{d}^s et une partie déviatoire \mathbf{d}^d de la manière suivante

$$\mathbf{d} = \underbrace{(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3}}_{\mathbf{d}^s} + \underbrace{(\mathbf{d} - (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) \frac{\boldsymbol{\delta}}{3})}_{\mathbf{d}^d},\tag{1.28}$$

où $\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}$ est la trace du tenseur des taux de déformation et peut aussi être notée $tr(\mathbf{d})$ ou d_{mm} .

Les équations de constitution du fluide visqueux newtonien peuvent être alors écrites comme suit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 3\hat{\kappa}(p, T)\mathbf{d}^s + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}^d, \\
\mathbf{q} &= -\hat{k}(p, T)\nabla T, \\
\rho &= \hat{\rho}(p, T), \\
H &= \hat{H}(p, T), \\
S &= \hat{S}(p, T).
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

où $\kappa = \hat{\kappa}(p, T)$ et $\mu = \hat{\mu}(p, T)$ sont respectivement les coefficients de viscosité de volume et de cisaillement, tandis que $k = \hat{k}(p, T)$ est le coefficient de conduction (ou conductibilité) thermique du fluide. Les variables thermodynamiques sont donc la pression, la température, le tenseur des taux de déformation et le gradient de température. Dans la pratique, on définit également la viscosité cinématique d'un fluide $\nu = \mu/\rho$, tandis que μ est appelé viscosité dynamique.

En conclusion, on voit que l'ensemble des 17 équations formés par les formes locales des lois de conservation et les équations de comportement forment un modèle cohérent où le nombre d'équations et d'inconnues s'équilibrent. En particulier, on constate que l'introduction de p comme variable additionnelle correspond à une équation de constitution pour la masse volumique.

conservation locale de la masse	ρ	1
conservation locale de la quantité de mouvement	\mathbf{v}	3
conservation locale de l'énergie	T	1
constitution pour les contraintes	$\boldsymbol{\sigma}$	6
constitution pour le flux calorifique	\mathbf{q}	3
constitution pour la masse volumique	p	1
constitution pour l'enthalpie	H	1
constitution pour l'entropie	S	1

Pour satisfaire identiquement l'inégalité de Clausius-Duhem pour tout processus thermodynamique, on peut montrer que les conditions nécessaires et suffisantes suivantes doivent prévaloir :

$$\begin{aligned}
TdS &= dH - \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{pd\rho}{\rho^2}, \\
k &\geq 0, \\
\kappa &\geq 0, \\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{1.30}$$

La relation différentielle $\rho T dS = \rho dH - dp$ peut être détaillée sous la forme

$$\begin{cases}
T \frac{\partial \hat{S}}{\partial p}(p, T) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p}(p, T) - \frac{1}{\hat{\rho}(p, T)}, \\
T \frac{\partial \hat{S}}{\partial T}(p, T) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial T}(p, T).
\end{cases}
\tag{1.31}$$

On voit donc que la différentielle dS doit être une différentielle exacte, les variables indépendantes étant la pression et la température.

Ceci montre comment le second principe de la thermodynamique intervient dans les modèles de mécanique des milieux continus. Même si l'entropie massique ne joue aucun rôle dans le système d'équations à résoudre, le modèle doit être tel que son existence soit assurée. En d'autres mots, on doit pouvoir intégrer la différentielle dS donnée par (1.30.1) dans le diagramme (p, T) de manière indépendante du chemin d'intégration. Ceci implique classiquement le respect de la condition suivante :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} - \frac{1}{\hat{\rho} T} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right)
\tag{1.32}$$

Cette condition contraint les possibilités de définition des équations d'état pour H et ρ . Afin d'illustrer ceci, définissons tout d'abord la chaleur spécifique à pression constante c_p , le coefficient de diffusivité thermique α , les coefficients de dilatation thermique β , de

compressibilité γ par

$$\begin{aligned}
c_p &= \hat{c}_p(p, T) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial T}, \\
\alpha &= \hat{\alpha}(p, T) = \frac{\hat{k}}{\hat{\rho} \hat{c}_p}, \\
\beta &= \hat{\beta}(p, T) = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T}, \\
\gamma &= \hat{\gamma}(p, T) = \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial p}.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

On peut alors montrer que la contrainte précédente peut s'écrire de manière équivalente comme une condition liant la chaleur spécifique à pression constante et la dérivée partielle de l'enthalpie par rapport à la pression

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} - \frac{1}{\hat{\rho} T} \right) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right) \\
-\frac{1}{T^2} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial p \partial T} + \frac{1}{\rho T^2} + \frac{1}{\rho^2 T} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} &= \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial p \partial T}, \\
-\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} + \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T} &= 0.
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho} (1 - T\beta). \tag{1.34}$$

Interprétation physique du fluide visqueux newtonien

Afin de bien comprendre le sens physique des équations de constitution du fluide visqueux newtonien, il faut, d'une part, observer que les contraintes se composent d'un terme isotrope de pression et de deux termes visqueux. Ces derniers sont chacun le produit d'un coefficient de viscosité par un facteur proportionnel à la vitesse de déformation (la trace ou le déviateur du tenseur des vitesses de déformation) qui mesure soit la vitesse de dilatation (ou compression), soit la vitesse de cisaillement. Ainsi, les contraintes visqueuses

disparaissent non pas en l'absence de déformation (par retour de la matière à l'état initial), mais quand la déformation cesse d'évoluer. Ceci marque la différence fondamentale entre les fluides visqueux où les contraintes sont proportionnelles à la vitesse de déformation et les solides élastiques où les contraintes sont proportionnelles aux déformations elles-mêmes. Il est aussi important de préciser qu'un grand nombre de matériaux ne sont pas correctement caractérisés, ni par un modèle de fluide newtonien, ni par un modèle de solide élastique. On recourt alors à des modèles de fluides non-newtoniens ou des modèles viscoélastiques qui incluent des effets de mémoire dans l'équation de comportement. Ce qui n'est pas le cas du modèle newtonien où toute l'histoire passée du point matériel considéré se résume à la valeur actuelle de pression et de température.

Afin de quantifier les taux de déformation subie par un matériau, on définit le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ par la relation

$$\dot{\gamma}^2 = 2\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d. \quad (1.35)$$

Il s'agit donc d'une norme du déviateur du tenseur des taux de déformation.

D'autre part, il faut observer que l'équation de constitution du flux de chaleur est gouvernée par la loi de Fourier. Ceci modélise le fait que dans un matériau isotrope, comme les fluides classiques, la chaleur va du chaud au froid et est directement opposée au gradient de température. Enfin, les équations d'état de H , S et ρ font partie de la thermodynamique classique et illustrent le fait que l'état du fluide visqueux newtonien à un endroit et à un instant donnés est caractérisé par la pression et la température locales.

Finalement, il est intéressant d'écrire l'inégalité de Clausius-Duhem pour un fluide visqueux newtonien

$$\left[\kappa(\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})^2 + 2\mu\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d + \frac{k}{T}\boldsymbol{\nabla}T \cdot \boldsymbol{\nabla}T \right] \geq 0, \quad (1.36)$$

Cette relation montre que toutes les irréversibilités thermodynamiques proviennent des effets visqueux (proportionnels à la viscosité du fluide) et des transferts de chaleur par conduction (proportionnels au coefficient de conduction du fluide).

Formulation en pression, vitesse et température

Le système formé par les 5 équations de conservation et les 12 équations de constitution est fermé puisqu'il comporte autant d'équations que d'inconnues. On rappelle que les forces à distance et les apports radiatifs sont externes et sont donc des données du problème au même titre que les forces de contacts et les apports de chaleur par conduction. Le système peut être considérablement simplifié si l'on injecte les équations de constitution dans les lois de conservation, sans plus se préoccuper de l'entropie, et en gardant la pression, les vitesses et la température comme inconnues de base. C'est ce qu'on désigne par formulation pression-vitesse-température du problème.

Après calculs, les équations de masse, de mouvement et d'énergie prennent la forme :

$$\begin{aligned}\gamma \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \nabla(\kappa \boldsymbol{\delta} : \mathbf{d}) + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}^d) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} &= \kappa (\boldsymbol{\delta} : \mathbf{d})^2 + 2\mu (\mathbf{d}^d : \mathbf{d}^d) + r + \nabla \cdot (k \nabla T),\end{aligned}\tag{1.37}$$

où, pour des raisons de commodité et de clarté, les expressions \mathbf{d} et \mathbf{d}^d ainsi que l'opérateur de la dérivée matérielle n'ont pas été détaillés en termes de vitesses. De plus, les coefficients β , γ , ρ , κ , μ , c_p et k doivent être compris comme des fonctions données de la pression et de la température. On obtient donc bien 5 équations à 5 inconnues.

De nombreuses simplifications peuvent être introduites dans le système ci-dessus. Avant de les présenter, il convient d'observer que tout fluide réel est toujours tant soit peu compressible, tant soit peu visqueux et qu'il conduit toujours tant soit peu la chaleur. Les simplifications usuelles doivent donc être considérées comme des approximations dont la validité effective relève de l'analyse dimensionnelle.

Les simplifications les plus courantes sont :

- fluide incompressible : $\gamma = 0$,
- fluide indilatable : $\beta = 0$,
- écoulement incompressible : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$,
- écoulement incompressible et irrotationnel : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$,
- transformations adiabatiques : $q = r = 0$.

Dans la pratique, l'expression *fluide incompressible* désigne souvent un modèle de fluide incompressible et indilatable, tandis que l'expression *écoulement incompressible* désigne un problème où le champ de vitesse est à divergence nulle.

L'utilisation adéquate de ces approximations ou simplifications est un des aspects les plus importants de la modélisation mathématique d'un écoulement réel. On notera ainsi que l'écoulement particulier d'un fluide réel connu pour être compressible peut parfois être parfaitement représenté par un modèle d'écoulement incompressible, si le champ de vitesse de cet écoulement est à divergence nulle.

1.2.3 Modèle du gaz idéal

Dans le cadre du modèle du fluide visqueux newtonien, une équation d'état possible pour la masse volumique est celle du gaz idéal (aussi appelé gaz parfait):

$$\hat{\rho}(p, T) = \frac{p}{RT}, \quad (1.38)$$

où $R = \mathcal{R}/m$ est la constante du gaz idéal considéré.

Dans ce cas, la condition (1.34) devient

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \underbrace{\frac{p}{\rho RT}}_{=1} \right) = 0, \quad (1.39)$$

ce qui implique que l'enthalpie massique et la chaleur massique à pression constante ne dépendent que de la température. Il est ensuite facile de montrer qu'il en est de même pour l'énergie interne massique et la chaleur spécifique à volume constant.

Typiquement, on obtient de cette manière les propriétés suivantes pour un gaz idéal :

$$\begin{aligned} dU &= \hat{c}_v(T) dT, \\ dH &= \hat{c}_p(T) dT, \\ R &= \hat{c}_p(T) - \hat{c}_v(T). \end{aligned} \quad (1.40)$$

où la chaleur spécifique à volume constant est définie par :

$$c_v = \hat{c}_v(T) = \frac{\partial \hat{U}}{\partial T}. \quad (1.41)$$

1.2.4 Écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien

Lorsqu'on introduit l'hypothèse d'incompressibilité et d'indilatabilité, on obtient le modèle de l'écoulement incompressible du fluide visqueux newtonien.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= -p\boldsymbol{\delta} + 2\hat{\mu}(p, T)\mathbf{d}, \\
 \mathbf{q} &= -\hat{k}(p, T)\nabla T, \\
 U &= \hat{U}(T), \\
 S &= \hat{S}(T).
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

Pour satisfaire identiquement l'inégalité de Clausius-Duhem pour tout processus thermodynamique, on peut, à nouveau, montrer que les conditions nécessaires et suffisantes suivantes doivent prévaloir :

$$\begin{aligned}
 \rho T dS &= \rho dH - dp, \\
 k &\geq 0, \\
 \mu &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.43}$$

En particulier, l'utilisation de (1.34) devient

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{1}{\rho},
 \tag{1.44}$$

ce qui implique bien que l'énergie interne ne peut dépendre que de la température. N'ayant plus d'intérêt ici à distinguer chaleur spécifique à volume ou à pression constante, nous définirons simplement la chaleur spécifique c comme étant

$$c = \hat{c}(T) = \frac{\partial \hat{U}}{\partial T} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial T},
 \tag{1.45}$$

dans le cas d'un modèle d'écoulement incompressible.

Formulation en pression, vitesse et température

Le système formé par les équations de conservation et les équations de constitution peut, à nouveau, être considérablement simplifié si l'on injecte les équations de constitution dans les lois de conservation.

Après calculs, les équations de la formulation pression-vitesse-température du problème prennent la forme :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}) + \rho \mathbf{g}, \\ \rho c \frac{DT}{Dt} &= 2\mu(\mathbf{d} : \mathbf{d}) + r + \nabla \cdot (k \nabla T),\end{aligned}\tag{1.46}$$

1.3 Conditions aux limites

Dans le formalisme de la mécanique des milieux continus, le problème à résoudre porte le plus souvent sur la prédiction de l'évolution des champs inconnus dans un volume matériel ou un volume de contrôle. Dans la mécanique des fluides classique, les champs inconnus sont, en général, la pression, les vitesses et la température, tandis que le domaine d'étude est généralement un volume de contrôle, puisque les fluides sont susceptibles de subir d'énormes déformations. Il est donc préférable de s'attacher à l'étude d'un volume fixe de l'espace pour un observateur déterminé.

Pour définir correctement un problème, il faut spécifier le modèle (par exemple, le modèle de fluide visqueux newtonien en formulation pression-vitesse-température), mais également préciser complètement l'action de l'extérieur sur le système. Cette action comprend des effets à distance, ainsi que les conditions initiales et aux frontières.

Les effets à distance se limitent aux forces de masse (\mathbf{g}) et à la puissance radiative volumique (r) qui sont donc bien des données du problème.

Les conditions initiales et les conditions frontières peuvent prendre des formes extrêmement différentes et il est très difficile d'en donner une description systématique. Toutefois, il faut observer que la matière ne s'arrête pas aux frontières du domaine considéré et que son évolution ne commence pas au temps initial. Comme il est impossible d'étendre sans limite le domaine d'analyse et de reculer arbitrairement le temps initial où démarre l'analyse, on devra donc effectuer un compromis. En pratique, on choisit donc des frontières telles que certaines informations puissent y être considérées comme approximativement correctes. Mais il ne s'agit que d'un modèle de la réalité : on doit donc toujours garder à l'esprit, et en particulier pour les problèmes thermiques, le fait que ces conditions ne sont qu'une approximation de la réalité.

Conditions initiales

Pour un fluide visqueux newtonien quelconque, les conditions initiales consistent à spécifier les champs de pression, de vitesse et de température au temps initial.

Lorsqu'on suppose que l'écoulement est incompressible, il ne faut plus imposer que les vitesses et la température. Ce fait est lié à la nature mathématique des équations aux dérivées partielles associées à ce problème. De manière purement intuitive, ceci peut être expliqué par le fait que le terme d'évolution temporelle disparaît dans l'équation de conservation de la masse qui est associée au champ de pression. Dans le cas incompressible, la pression s'adapte instantanément à l'écoulement à chaque instant, sans le retard dû à la propagation des ondes acoustiques.

Conditions aux frontières

En restant dans le cas d'un fluide visqueux newtonien, trois ou quatre conditions mécaniques et une condition thermique doivent être spécifiées le long de toutes les frontières. Le long des parois, le fluide est supposé coller et on impose donc que la vitesse du fluide soit égale à la vitesse de la paroi solide. Il faut y ajouter une condition thermique, en prescrivant soit la température à la paroi, soit le flux de chaleur sortant à travers celle-ci. Le long d'une section d'entrée, il est usuel d'imposer la pression, le profil de vitesse et la température. Par contre, le long des sections de sortie du domaine, on impose généralement des conditions moins raides de façon à éviter la génération de zones minces de transition indésirables. On impose seulement la composante normale de la force de contact, en exigeant que les composantes tangentielles de la vitesse (ou les composantes tangentielles de la force de contact) soient nulles. On agit de même pour la condition thermique en imposant un flux de chaleur nul.

Il est essentiel d'observer que les conditions aux frontières changent complètement lorsque l'une des simplifications classiques (écoulement incompressible, écoulement incompressible et irrotationnel, transformations adiabatiques) est introduite. A titre d'exemple, mentionnons seulement les points suivants :

- Pour un écoulement incompressible et irrotationnel ou écoulement de fluide parfait, seule une condition sur la composante normale de la vitesse peut être appliquée le long d'une paroi. Le fluide glisse sur les parois.
- Il ne faut pas imposer la pression aux sections d'entrée, dans le cas incompressible.
- Il n'y a pas de conditions thermiques à spécifier sur les parois et les sections de sortie, dans le cas d'un écoulement en transformations adiabatiques (sans échange de chaleur).

Conditions d'interface

Dans de très nombreux problèmes, des interfaces de forme inconnue entre deux fluides (ou entre un fluide et un solide) doivent être considérées. On parle alors de problème à frontière libre. En général, on impose à l'interface la continuité des vitesses, des forces de contact, de la température et du flux de chaleur. A nouveau, les simplifications classiques modifient les conditions d'interface qu'il faut appliquer.

D'autre part, des phénomènes physiques supplémentaires importants peuvent être en jeu. Par exemple, la présence d'effets capillaires modifie les conditions de forces de contact à l'interface de deux fluides, tandis que la chaleur latente de fusion ou d'évaporation doit être prise en compte pour des problèmes de changement de phase solide-liquide ou liquide-gaz.

Chapitre 2

Écoulements incompressibles établis

Un écoulement établi est un écoulement dont le profil transversal de vitesse est le même quelle que soit la section (transversale à l'écoulement) où on mesure ce profil. “Établi” signifie donc “complètement développé” (“fully developed”). Les écoulements établis ne peuvent donc se rencontrer qu'en écoulement avec section de passage invariable le long de l'écoulement: écoulement entre deux plaques planes séparées par une distance invariable, écoulement en conduite cylindrique de section circulaire invariable, écoulement en conduite cylindrique de section non circulaire (e.g., carré, rectangle, etc.) invariable. Pour la suite, la direction de l'écoulement est la direction x .

A noter que le profil de vitesse pour un écoulement à section invariable n'est pas nécessairement établi: par exemple, si on connecte une très longue conduite de section invariable à la base d'un réservoir rempli d'un fluide, et qu'on laisse le fluide s'écouler par l'autre bout de la conduite, il faudra compter une distance non-négligeable à partir de la sortie du réservoir pour que l'écoulement s'“établisse” (i.e., se développe complètement). Nous y reviendrons plus loin.

En résumé: avoir une section invariable est une condition nécessaire mais non suffisante pour assurer un écoulement établi.

2.1 Écoulements de Hagen-Poiseuille et de Couette

Écoulements plans

Considérons l'écoulement bidimensionnel et établi entre deux plaques planes, fixes, et séparées par une distance $d = 2h$ (Poiseuille, 1840, d'où le nom d'écoulement de Poiseuille). Le système de coordonnées est centré entre les plaques, avec x la direction de l'écoulement et y la direction perpendiculaire à l'écoulement, voir Fig. 2.1. Comme l'écoulement est établi, on a, par définition, que $u = u(y)$ et donc que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. La continuité implique donc

que $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. L'intégration de cette équation implique que $v = v(x)$ au plus. Comme on a que $v = 0$ à la paroi, on en conclut, finalement, que $v = 0$ partout.

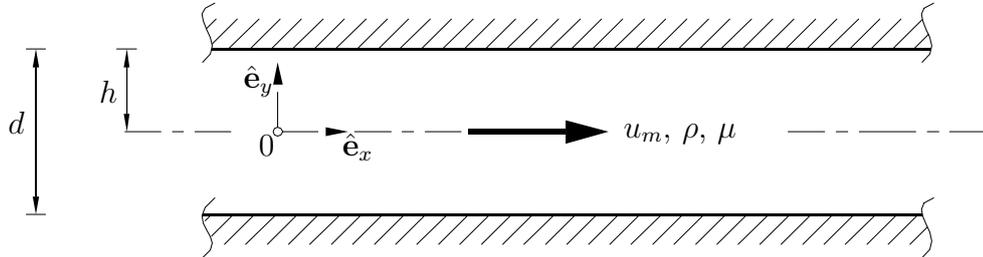


Figure 2.1: Écoulement établi entre deux plaques.

On considère ensuite les équations de quantité de mouvement. Comme $v = 0$, l'équation en y donne: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. La pression ne dépend donc que de x . De l'équation en x , on obtient:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2} . \quad (2.1)$$

Donc, pour de tels écoulements, les termes non-linéaires de convection s'annulent exactement, et ce indépendamment du nombre de Reynolds. En particulier, le nombre de Reynolds ne doit pas nécessairement être petit.

Comme $P = P(x)$ et $u = u(y)$, on a nécessairement que

$$\frac{dP}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = C . \quad (2.2)$$

avec C une constante (négative car, dû aux pertes de charges, la pression diminue en x). Le profil de vitesse est donc finalement obtenu par intégration:

$$u(y) = \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{1}{\nu} \left(\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \right) . \quad (2.3)$$

Avec la condition que $u(-h) = u(h) = 0$, on obtient:

$$u(y) = \left(-\frac{dP}{dx} \right) \frac{h^2}{2\nu} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{h^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) . \quad (2.4)$$

Le profil de vitesse est donc parabolique, voir Fig. 2.2. La vitesse maximale est la vitesse au centre:

$$u_c = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{h^2}{2\mu} . \quad (2.5)$$

Le débit volumique (par unité de profondeur) est aussi facilement obtenu:

$$Q = 2 \int_0^h u(y) dy = \frac{2}{3} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{h^3}{\mu} = \frac{4}{3} h u_c . \quad (2.6)$$

La vitesse de débit est définie comme étant le débit volumique (par unité de profondeur) divisé par la section de passage:

$$u_m = \frac{Q}{2h} = \frac{2}{3} u_c . \quad (2.7)$$

On a donc aussi, pour le profil de vitesse:

$$u(y) = \frac{3}{2} u_m \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) . \quad (2.8)$$

La vitesse maximale est égale à 3/2 de la vitesse de débit.

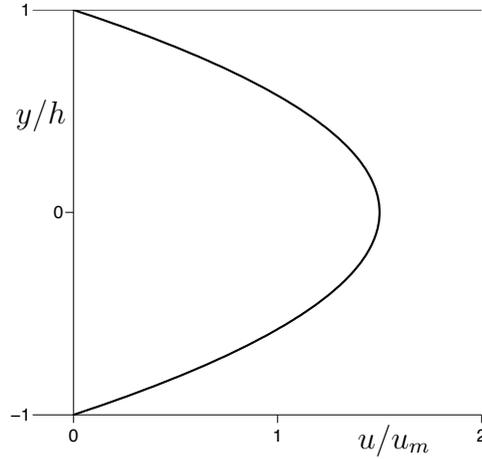


Figure 2.2: Profil de vitesse pour l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques.

La contrainte de frottement à la paroi est:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=-h} = -\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) h = \frac{2\mu u_c}{h} = \frac{3\mu u_m}{h} . \quad (2.9)$$

Le coefficient adimensionnel de frottement, C_f , est défini comme étant la contrainte de frottement divisée par la pression dynamique (basée sur la vitesse de référence, u_m):

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} . \quad (2.10)$$

On obtient donc:

$$C_f = \frac{6\mu}{\rho h u_m} = \frac{6\nu}{h u_m} = \frac{12}{Re_d} \quad (2.11)$$

avec $Re_d = u_m d / \nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement (avec la normalisation classique qui utilise comme vitesse de référence la vitesse de débit, et comme longueur de référence la distance entre les plaques, $d = 2h$).

On utilise aussi souvent le coefficient de perte de charge, λ , défini par:

$$\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\rho u_m^2}{2} \frac{\lambda}{d}. \quad (2.12)$$

En comparant C_f et λ , on obtient immédiatement que

$$\lambda = 2 C_f. \quad (2.13)$$

Donc, pour les pertes de charge, on a:

$$\lambda = \frac{24}{Re_d}. \quad (2.14)$$

Un autre type d'écoulement est l'écoulement de Couette: $u(-h) = 0$ et $u(h) = U$, sans gradient de pression. On a alors:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (2.15)$$

Le profil de vitesse est obtenu par intégration, voir Fig. 2.3:

$$u(y) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right). \quad (2.16)$$

Finalement, une combinaison linéaire des deux écoulements ci-dessus correspond au cas Poiseuille-Couette combinés: $u(-h) = 0$ et $u(h) = U$, avec gradient de pression. Le profil de vitesse est aussi obtenu par combinaison linéaire:

$$u(y) = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2}{2\mu} \left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right) + \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right). \quad (2.17)$$

A noter que l'approche par combinaison linéaire est rendue possible par le fait que les termes non-linéaires de convection s'annulent exactement. Les profils de vitesse d'écoulements de type Poiseuille-Couette sont donnés à la Fig. 2.4, en fonction du paramètre adimensionnel $\beta = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{h^2}{2\mu U}$. Le cas Couette pur correspond à $\beta = 0$. Pour les écoulements avec pertes de charge ($\beta > 0$), la vitesse $u(y)$ est toujours supérieure à celle de l'écoulement de Couette. Il n'en va pas de même pour les écoulements avec "gains" de charge ($\beta < 0$): la vitesse $u(y)$ est alors toujours inférieure à celle de l'écoulement de Couette. En fait, pour $\beta < -1/4$, on a même des vitesses négatives.

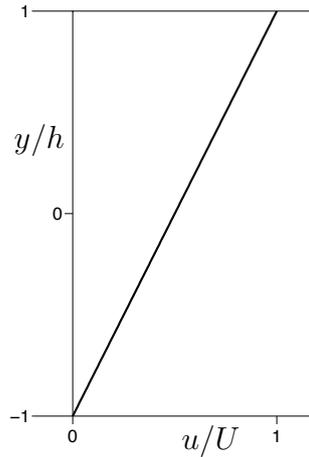


Figure 2.3: Profil de vitesse pour l'écoulement de Couette entre deux plaques.

Écoulements axisymétriques

Considérons ensuite l'écoulement axisymétrique en conduite cylindrique de section circulaire de diamètre $D = 2R$ (Hagen 1839 et Poiseuille, 1840, d'où le nom d'écoulement de Hagen-Poiseuille). Le système de coordonnées est centré, avec x la direction de l'écoulement et r la direction radiale, voir Fig. 2.5. Comme l'écoulement est établi, on a, par définition, que $u = u(r)$ et donc que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. La continuité implique donc que $\frac{\partial}{\partial r}(r v) = 0$. L'intégration de cette équation implique que $r v = f(x)$ au plus. Comme on a que $v = 0$ à la paroi $r = R$, on obtient $f(x) = 0$. On conclut donc, finalement, que $v = 0$ partout.

On considère ensuite les équations de quantité de mouvement. Comme $v = 0$, l'équation en r donne: $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$. La pression ne dépend donc que de x . De l'équation en x , on obtient:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right). \quad (2.18)$$

De nouveau, les termes non-linéaires de convection s'annulent exactement pour de tels écoulements. Le profil de vitesse est obtenu par intégration:

$$u(r) = \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{1}{\nu} \left(\frac{r^2}{4} + C_1 \log r + C_2 \right). \quad (2.19)$$

Avec les conditions impliquant que $u(R) = 0$ et que la solution ne soit pas singulière en $r = 0$, on obtient:

$$u(r) = \left(-\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\nu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{h^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right). \quad (2.20)$$

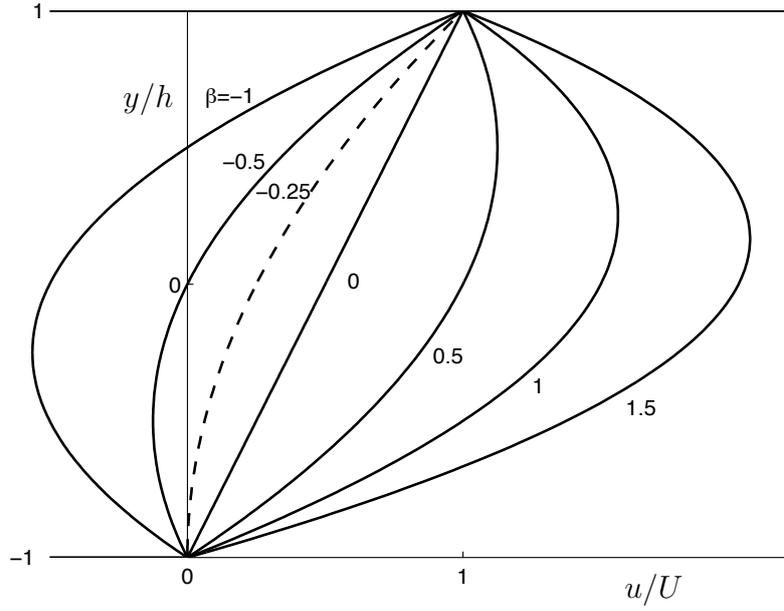


Figure 2.4: Profils de vitesse pour les écoulements de Poiseuille-Couette entre deux plaques.

Le profil de vitesse est donc de nouveau parabolique. La vitesse maximale est au centre:

$$u_c = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} . \quad (2.21)$$

Le débit est obtenu par intégration du profil de vitesse, avec $dA = dr r d\theta$:

$$Q = \int_A u(r) dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R u(r) r dr = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu} = \frac{\pi R^2 u_c}{2} . \quad (2.22)$$

La vitesse de débit est donc:

$$u_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{u_c}{2} , \quad (2.23)$$

et on a aussi:

$$u(r) = 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) . \quad (2.24)$$

La vitesse maximale est donc égale à deux fois la vitesse de débit.

La contrainte de frottement à la paroi est:

$$\tau_w = -\mu \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{R}{2} = \frac{2\mu u_c}{R} = \frac{4\mu u_m}{R} , \quad (2.25)$$

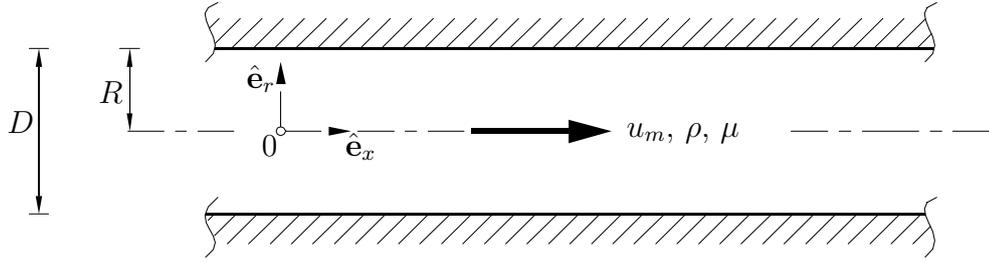


Figure 2.5: Ecoulement établi en conduite circulaire.

ce qui donne, pour le coefficient de frottement:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} = \frac{8\mu}{\rho R u_m} = \frac{8\nu}{R u_m} = \frac{16}{Re_D} \quad (2.26)$$

avec $Re_D = u_m D / \nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement qui est ici basé sur la vitesse de débit et sur le diamètre de la conduite. Le coefficient de perte de charge est ici défini par:

$$\left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{\rho u_m^2}{2} \frac{\lambda}{D}. \quad (2.27)$$

En comparant C_f et λ , on obtient immédiatement que

$$\lambda = 4 C_f. \quad (2.28)$$

Finalement, pour les pertes de charge en conduites circulaires, on a:

$$\lambda = \frac{64}{Re_D}. \quad (2.29)$$

A noter que le cas des écoulements entre deux cylindres concentriques de diamètres D_i ("inner diameter") et D ("outer diameter") est aussi facilement obtenu: il suffit de déterminer les constantes d'intégration du profil de vitesse, C_1 et C_2 , afin de satisfaire les conditions aux limites: $u(R_i) = u(R) = 0$. Il s'agit là encore d'écoulements de type Hagen-Poiseuille, voir Fig. 2.7.

Finalement, on peut même considérer le cas où il y a une vitesse relative de translation entre les deux cylindres: soit Couette (sans gradient de pression), voir Fig. 2.8, soit même Hagen-Poiseuille et Couette combinés (avec gradient de pression).

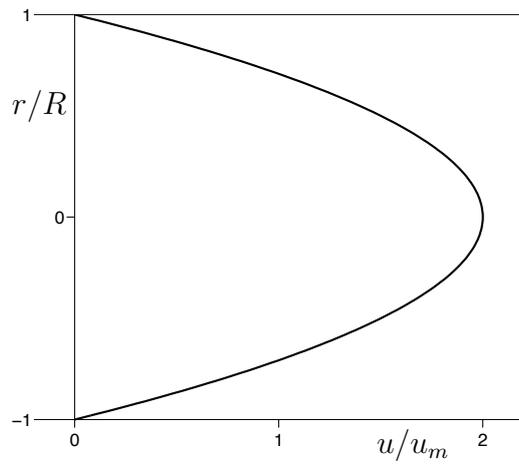


Figure 2.6: Profil de vitesse pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille en conduite circulaire.

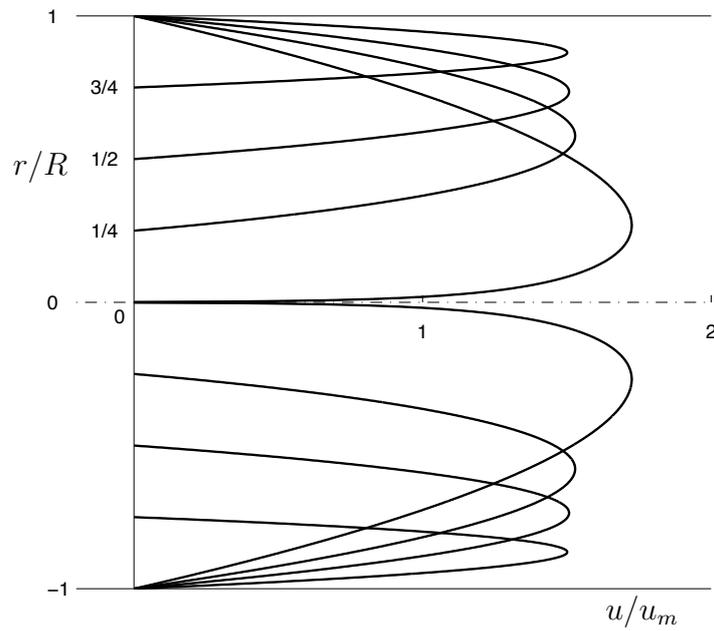


Figure 2.7: Profils de vitesse pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille en conduite circulaire avec cylindre interne. Cas $D_i/D = 0, 1/4, 1/2$ et $3/4$.

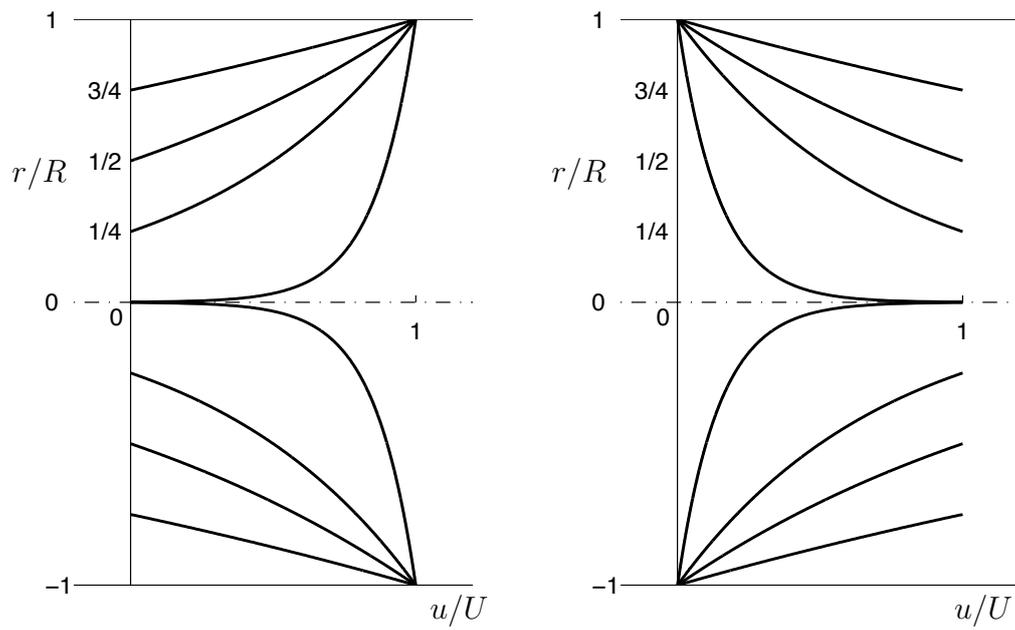


Figure 2.8: Profils de vitesse pour l'écoulement de Couette en conduite circulaire avec cylindre interne. Cas $D_i/D = 0, 1/4, 1/2$ et $3/4$. Gauche: cas avec cylindre intérieur fixe et cylindre extérieur mobile. Droite: cas avec cylindre intérieur mobile et cylindre extérieur fixe.

2.2 Ecoulements instationnaires

2.2.1 Démarrage brusque de l'écoulement dans une conduite

Pour un écoulement établi mais instationnaire en conduite, on a, avec $u = u(r, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (2.30)$$

Considérons tout d'abord le problème du démarrage brusque de l'écoulement dans une conduite: pour $t < 0$, il n'y a pas de gradient de pression imposé à la conduite, et donc pas d'écoulement $u(r, t < 0) = 0$. Pour $t > 0$, un gradient de pression constant est imposé à la conduite. Un écoulement "démarré" donc au sein de celle-ci en $t = 0_+$, tout en respectant la condition de non-glissement à la paroi: $u(R, t) = 0$. Clairement, il s'agit d'un problème aux conditions initiale et limite bien posé. On sait que, pour $t \rightarrow \infty$, l'écoulement tendra vers l'écoulement de Poiseuille, $u = u(r) = u_c \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$ avec $u_c = 2 u_m = - \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{4\nu}$, écoulement qui satisfait l'équation,

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right), \quad (2.31)$$

ainsi que la condition limite de non-glissement à la paroi. Par soustraction des équations ci-dessus, on obtient l'équation pour la fonction "différence entre $u(r, t \rightarrow \infty)$ et $u(r, t)$ ". Appelons cette fonction $\tilde{u}(r, t)$. On a donc que $\tilde{u}(r, t)$ satisfait

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right), \quad (2.32)$$

avec, comme condition initiale, $\tilde{u}(r, 0) = u_c \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$ et, comme condition limite, $\tilde{u}(R, t) = 0$. Comme dans le problème de l'entrée thermique (Grätz), on travaille en variables adimensionnelles en définissant:

$$\tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{u_c}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{\nu t}{R^2}, \quad (2.33)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \eta} \right), \quad (2.34)$$

avec $\tilde{u}^*(\eta, 0) = (1 - \eta^2)$ et $\tilde{u}^*(1, \zeta) = 0$. Le problème est clairement séparable: $\tilde{u}^* = f(\eta) g(\zeta)$, ce qui donne:

$$f \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) g, \quad (2.35)$$

et donc:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta f} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) = -\lambda^2, \quad (2.36)$$

ou encore:

$$\frac{dg}{d\zeta} + \lambda^2 g = 0, \quad (2.37)$$

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta f = 0. \quad (2.38)$$

La fonction g est donc de la forme $g = C e^{-\lambda^2 \zeta}$, et la solution du problème est construite comme:

$$\tilde{u}^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\eta) e^{-\lambda_n^2 \zeta} \quad (2.39)$$

avec

$$\eta^2 \frac{d^2 f_n}{d\eta^2} + \eta \frac{df_n}{d\eta} + \lambda_n^2 \eta^2 f_n = 0, \quad (2.40)$$

l'équation de Bessel d'ordre 0 dont les solutions sont $J_0(\lambda_n \eta)$ et $Y_0(\lambda_n \eta)$. Cette dernière étant non bornée à l'origine est donc à rejeter. La solution du problème s'exprime donc sous la forme:

$$\tilde{u}^*(\eta, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta) e^{-\lambda_n^2 \zeta}. \quad (2.41)$$

L'imposition de la condition à la limite, $\tilde{u}^*(1, \zeta) = 0$, implique que les λ_n (i.e., les valeurs propres) sont les zéros successifs de la fonction de Bessel J_0 . L'imposition de la condition initiale, $\tilde{u}^*(\eta, 0) = (1 - \eta^2)$ demande que

$$(1 - \eta^2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta), \quad (2.42)$$

ce qui, par l'orthogonalité des fonctions de Bessel, permet de déterminer les C_n . En multipliant Eq. (2.42) par $\eta J_0(\lambda_m \eta)$ et en intégrant, on obtient donc:

$$\int_0^1 \eta (1 - \eta^2) J_0(\lambda_m \eta) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) J_0(\lambda_n \eta) d\eta = C_m \frac{1}{2} (J_1(\lambda_m))^2. \quad (2.43)$$

Comme $\int s J_0(s) ds = s J_1(s)$, et que $\int s^3 J_0(s) ds = s^3 J_1(s) + 2s^2 J_0(s) - 4 \int s J_0(s) ds$, on obtient finalement que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta (1 - \eta^2) J_0(\lambda_m \eta) d\eta &= \\ \frac{1}{\lambda_m} [\eta (1 - \eta^2) J_1(\lambda_m \eta)]_0^1 &- \frac{2}{\lambda_m^2} [\eta^2 J_0(\lambda_m \eta)]_0^1 + \frac{4}{\lambda_m^3} [\eta J_1(\lambda_m \eta)]_0^1 \\ &= \frac{4}{\lambda_m^3} J_1(\lambda_m). \end{aligned} \quad (2.44)$$

On a donc, pour le coefficient C_m :

$$C_m = \frac{8}{\lambda_m^3 J_1(\lambda_m)}. \quad (2.45)$$

Finalement, la solution est:

$$\tilde{u}^*(\eta, \zeta) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}, \quad (2.46)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_c} &= (1 - \eta^2) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}, \\ &= \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{R^2}\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

L'établissement du profil de vitesse est donné à la Fig. 2.9.

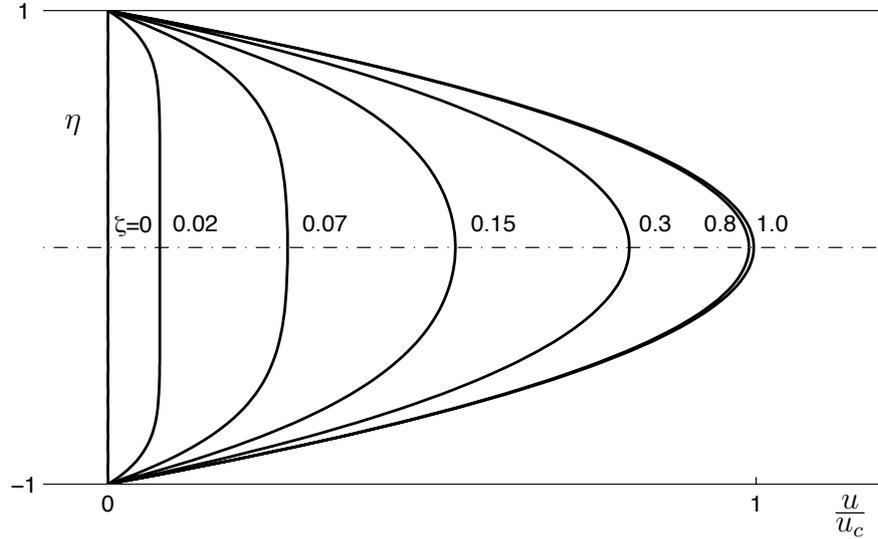


Figure 2.9: Démarrage brusque d'un écoulement de Poiseuille en conduite circulaire: développement du profil de vitesse.

Combien de temps faut-il pour établir un tel écoulement? Le temps caractéristique d'établissement est essentiellement déterminé par le terme exponentiel qui décroît le moins rapidement: $e^{-\lambda_1^2 \zeta}$. On a donc, comme estimation du temps caractéristique de développement (pour passer de 1 à e^{-1} dans le facteur exponentiel dominant),

$$\zeta_c \approx \frac{1}{\lambda_1^2} = 0.173. \quad (2.48)$$

Plus précisément, examinons la vitesse au centre de la conduite:

$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta) = 1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \zeta}. \quad (2.49)$$

Pour $\zeta > \zeta_c$, cela donne

$$\frac{u}{u_c}(0, \zeta > \zeta_c) \approx 1 - \frac{8}{\lambda_1^3 J_1(\lambda_1)} e^{-\lambda_1^2 \zeta} = 1 - 1.108 e^{-5.783 \zeta} . \quad (2.50)$$

Par exemple, le temps de développement tel que la vitesse au centre de la conduite soit égale à 99% de la vitesse maximum, est

$$\zeta_{c,0.99} = \frac{\nu t_{c,99}}{R^2} \approx 0.814 , \quad (2.51)$$

estimation qui est effectivement confirmée par la Fig. 2.9. Celui tel que la vitesse soit égale à 95% de la vitesse maximum est

$$\zeta_{c,0.95} = \frac{\nu t_{c,95}}{R^2} \approx 0.536 . \quad (2.52)$$

Il y a manifestement un certain parallèle entre l'écoulement établi et instationnaire correspondant à un démarrage brusque en conduite, et celui de la zone d'entrée pour l'établissement d'un écoulement stationnaire en conduite. En effet, on constate que, pour chaque problème, il y a développement (temporel ou spatial, selon le cas) d'une couche limite qui émane de la paroi, diffuse, et éventuellement occupe toute la section de la conduite pour former ainsi l'écoulement de Poiseuille. Il y a cependant aussi des différences notables. Dans le cas du développement spatial, le profil de vitesse passe de l'écoulement bouchon, $u(r) = u_m$, à l'écoulement de Poiseuille, $u(r) = 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$. Dans le cas du développement temporel, il passe de $u(r) = 0$ à Poiseuille. Dans le cas spatial, la vitesse au centre passe donc de $u_c = u_m$ à $u_c = 2 u_m$, tandis que, dans le cas temporel, elle passe de $u_c = 0$ à $u_c = 2 u_m$. Quoi qu'il en soit, l'analogie espace-temps est évidente, même si elle est imparfaite. En "remplaçant" t_c par x_c/u_m dans le résultat ci-dessus, on obtient une estimation de la longueur de développement pour le cas spatial:

$$\frac{x_c}{u_m} \frac{\nu}{R^2} \approx t_c \frac{\nu}{R^2} = \zeta_c , \quad (2.53)$$

et donc

$$4 \frac{x_c}{D} \frac{\nu}{u_m D} \approx \zeta_c \quad \iff \quad \frac{x_c}{D} \approx \frac{\zeta_c}{4} Re_D \approx 0.2 Re_D . \quad (2.54)$$

Bien sûr, puisque l'analogie n'est pas parfaite, on ne peut pas utiliser de chiffre précis. On a ici proposé 0.20 comme estimation acceptable. De toute façon, cela dépend aussi de la valeur de x_c : est-ce $x_{c,0.95}$, où plutôt $x_{c,0.99}$?... Quoi qu'il en soit, on a établi ici un résultat encore plus précis que celui obtenu par l'analyse dimensionnelle: i.e., que la fonction $f(Re_D)$ pour la longueur d'établissement d'un écoulement laminaire en conduite est simplement de la forme $C Re_D$, et que le coefficient de proportionalité, C , est proche de 0.2 .

Notons, en passant, que la longueur d'établissement d'un écoulement de Poiseuille peut être considérable. Par exemple, pour établir un écoulement à $Re_D = 1000$, il faudra compter environ 200 diamètres! Tout ceci, bien sûr, n'est valable que pour les écoulements laminaires. Pour les écoulements turbulents, la loi de variation sera différente.

2.2.2 Ecoulement cyclique avec gradient de pression oscillant

Considérons ensuite le cas où le gradient de pression imposé est oscillant:

$$-\frac{dP}{dx} = -\frac{dP}{dx}\Big|_0 \cos(\omega t) = -\frac{dP}{dx}\Big|_0 e^{i\omega t} \quad (2.55)$$

avec ω la fréquence circulaire d'excitation (en radians par seconde) et $-\frac{dP}{dx}\Big|_0 > 0$ l'amplitude du gradient de pression imposé. Il est bien entendu que l'on considère uniquement la partie réelle de $e^{i\omega t}$.

La vitesse de référence est, naturellement, la vitesse maximum de l'écoulement de Poiseuille, $u_c = -\frac{dP}{dx}\Big|_0 \frac{R^2}{4\nu}$. Eq. (2.30) devient donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{4\nu}{R^2} u_c e^{i\omega t} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (2.56)$$

Les variables adimensionnelles à utiliser sont:

$$u^* = \frac{u}{u_c}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \omega^* = \frac{\omega R^2}{\nu}, \quad \zeta = \frac{t\nu}{R^2}. \quad (2.57)$$

A noter que $\omega t = \omega^* \zeta$. On cherche donc une solution de la forme

$$u^* = f(\eta) e^{i\omega t} = f(\eta) e^{i\omega^* \zeta}. \quad (2.58)$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u_c f i \omega e^{i\omega t} = \frac{\nu}{R^2} u_c f i \omega^* e^{i\omega^* \zeta}, \\ \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{\nu}{R^2} u_c \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} \right) e^{i\omega^* \zeta}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

ce qui mène à l'équation différentielle non-homogène suivante:

$$\eta^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \eta \frac{df}{d\eta} - i \omega^* f \eta^2 = -4 \eta^2. \quad (2.60)$$

Une solution particulière de l'équation non-homogène est

$$f_p(\eta) = \frac{4}{i \omega^*}. \quad (2.61)$$

L'équation homogène est l'équation de Bessel d'ordre 0 dont la solution (régulière) est

$$f_h(\eta) = C J_0 \left(\sqrt{-i \omega^*} \eta \right). \quad (2.62)$$

La solution générale de l'équation non-homogène est donc:

$$f(\eta) = \frac{4}{i \omega^*} + C J_0 \left(\sqrt{-i \omega^*} \eta \right). \quad (2.63)$$

L'imposition de la condition limite de vitesse nulle à la paroi, $f(1) = 0$, fournit la constante C . Finalement, la solution est

$$f(\eta) = \frac{4}{i\omega^*} \left(1 - \frac{J_0(\sqrt{-i\omega^*}\eta)}{J_0(\sqrt{-i\omega^*})} \right). \quad (2.64)$$

Comme $-i = e^{i3\pi/2}$, on a que $\sqrt{-i} = e^{i3\pi/4}$. La solution finale s'écrit:

$$\frac{u}{u_c} = \Re \left\{ \frac{4}{i\omega^*} \left(1 - \frac{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*}\eta)}{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*})} \right) e^{i\omega^*\zeta} \right\}. \quad (2.65)$$

La fonction complexe $J_0(e^{i3\pi/4}s)$ avec s réel ≥ 0 a un nom en mathématique: sa partie réelle s'appelle la fonction $Ber(s)$ (avec $Ber(0) = 1$), et sa partie imaginaire s'appelle la fonction $Bei(s)$ (avec $Bei(0) = 0$):

$$J_0(e^{i3\pi/4}s) = Ber(s) + iBei(s). \quad (2.66)$$

On a donc, comme solution:

$$\frac{u}{u_c} = \Re \left\{ \frac{4}{i\omega^*} \left(1 - \frac{Ber(\sqrt{\omega^*}\eta) + iBei(\sqrt{\omega^*}\eta)}{Ber(\sqrt{\omega^*}) + iBei(\sqrt{\omega^*})} \right) e^{i\omega^*\zeta} \right\}. \quad (2.67)$$

Cette solution est générale et valable pour toutes les fréquences d'excitation. Les cas de forçages lent et rapide sont des cas particuliers intéressants.

En forçage lent, on considère que $\sqrt{\omega^*}\eta$ est petit. Comme on a que $0 \leq \eta \leq 1$, une condition suffisante est que $\sqrt{\omega^*}$ soit petit. La série de Taylor est alors:

$$J_0(e^{i3\pi/4}s) = Ber(s) + iBei(s) = 1 + i\frac{s^2}{4} - \frac{s^4}{64} + \dots, \quad (2.68)$$

et on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*}\eta)}{J_0(e^{i3\pi/4}\sqrt{\omega^*})} &= \frac{1 + i\frac{\omega^*\eta^2}{4} - \frac{\omega^{*2}\eta^4}{64} + \dots}{1 + i\frac{\omega^*}{4} - \frac{\omega^{*2}}{64} + \dots} \\ &= 1 - i\frac{\omega^*}{4}(1 - \eta^2) + \frac{\omega^{*2}}{64}(\eta^4 - 4\eta^2 + 3) + \mathcal{O}(\omega^{*2}). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Cela donne finalement:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_c} &= \Re \left\{ \left((1 - \eta^2) - i\frac{\omega^*}{16}(\eta^4 - 4\eta^2 + 3) \right) e^{i\omega^*\zeta} \right\} \\ &= (1 - \eta^2) \cos(\omega^*\zeta) + \frac{\omega^*}{16}(\eta^4 - 4\eta^2 + 3) \sin(\omega^*\zeta) + \mathcal{O}(\omega^{*2}). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Cette formule est uniformément valable (i.e., valable pour tous les η) tant que ω^* reste faible. On constate donc, qu'à faible ω^* , l'écoulement est essentiellement un écoulement

de Poiseuille en phase avec le gradient de pression imposé. Ceci est tout à fait logique: le gradient de pression de forçage variant lentement, l'écoulement à le temps de "suivre" sa variation et d'être en équilibre quasi-statique avec celui-ci. Le terme additionnel, proportionnel à ω^* et donc d'autant plus petit que ω^* est faible, est un terme de déphasage de $\pi/2$ (i.e., de 90 deg). En début de cycle ($\omega^* \zeta = 0$), le profil de vitesse est le profil de Poiseuille correspondant au gradient de pression, voir Fig. 2.10. En quart de cycle ($\omega^* \zeta = \pi/2$), le profil de vitesse n'est pas nul bien que le gradient de pression le soit, voir Fig. 2.10. On a donc un retard entre le profil de vitesse et le gradient de pression. En milieu de cycle ($\omega^* \zeta = \pi$), le profil de vitesse est, de nouveau, le profil de Poiseuille en phase avec le gradient de pression. On a donc "récupéré" le retard. Par exemple, au centre de la conduite, on a que

$$\frac{u(0)}{u_c} = \cos(\omega^* \zeta) + \frac{3\omega^*}{16} \sin(\omega^* \zeta) + \mathcal{O}(\omega^{*2}) , \quad (2.71)$$

et on constate bien que cette vitesse ne suit pas parfaitement la variation du gradient de pression.

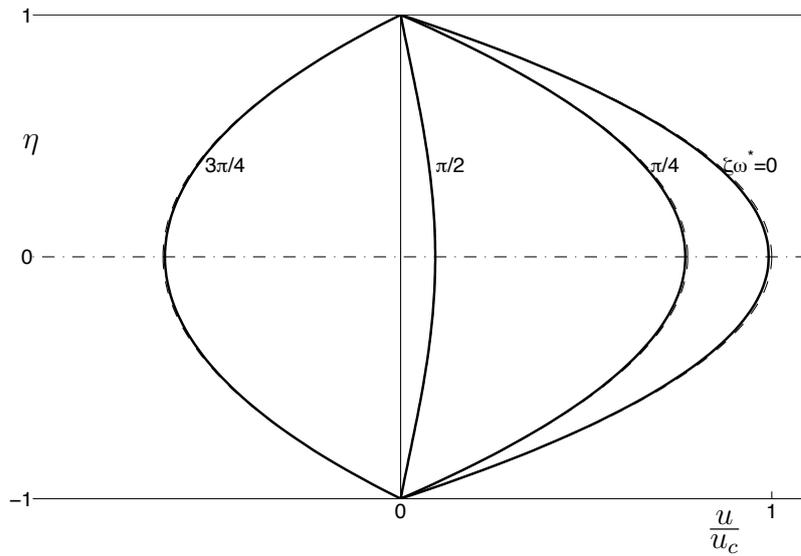


Figure 2.10: Ecoulement cyclique en conduite circulaire: cas d'un forçage lent avec $\omega^* = 1/2$. Solution exacte (trait plein) et solution approchée (trait interrompu).

En forçage rapide, on considère que $\sqrt{\omega^*} \eta$ est grand, et ce pour tous les η . Clairement, le centre de la conduite, $\eta = 0$, doit être exclu d'une telle analyse. La solution obtenue ne sera pas uniformément valide. On utilise ici l'expansion asymptotique de $J_0(z)$ valable pour de grande valeurs de $|z|$ avec $\arg(z) < \pi$:

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \quad (2.72)$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
J_0(e^{i3\pi/4} s) &= Ber(s) + i Bei(s) \\
&\approx e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \cos\left(e^{i3\pi/4} s - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \cos\left(i \frac{s}{\sqrt{2}} - \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[\cos\left(i \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(i \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left[\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&\approx e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \frac{1}{2} e^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \left[\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&= e^{-i3\pi/8} \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{\frac{s}{\sqrt{2}}} e^{i\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}, \tag{2.73}
\end{aligned}$$

ce qui mène à:

$$\frac{J_0(e^{i3\pi/4} \sqrt{\omega^* \eta})}{J_0(e^{i3\pi/4} \sqrt{\omega^*})} \approx \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} e^{-i\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)}, \tag{2.74}$$

et finalement au résultat asymptotique suivant:

$$\begin{aligned}
\frac{u}{u_c} &= \Re \left\{ \frac{4}{i\omega^*} \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} e^{-i\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} \right) e^{i\omega^* \zeta} \right\} \\
&= \frac{4}{\omega^*} \left[\sin(\omega^* \zeta) - \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-\sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)} \sin\left(\omega^* \zeta - \sqrt{\frac{\omega^*}{2}}(1-\eta)\right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{*2}}\right) \tag{2.75}
\end{aligned}$$

résultat qui n'est pas uniformément valable: il nécessite que $\sqrt{\omega^* \eta}$ soit suffisamment grand. L'écoulement est essentiellement en déphasage de $\pi/2$ (i.e., de 90 deg) par rapport au gradient de pression, voir Fig. 2.11: c'est en $\omega^* \zeta = \pi/2$ (i.e., lorsque le gradient de pression est nul) que le profil de vitesse est le plus "plein". En début de cycle, on observe une zone de grande vitesse près de la paroi (i.e., plus grande que la vitesse au centre). La dynamique de cet écoulement est donc fort compliquée.

2.2.3 Démarrage brusque d'une plaque

Considérons un écoulement instationnaire le long d'une plaque plane: $u = u(y, t)$. Comme une plaque ne borne l'écoulement que d'un côté (l'autre "côté" étant à l'infini), il n'y a pas de gradient de pression latéral pour un écoulement établi le long d'une plaque. On a alors simplement que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2.76}$$

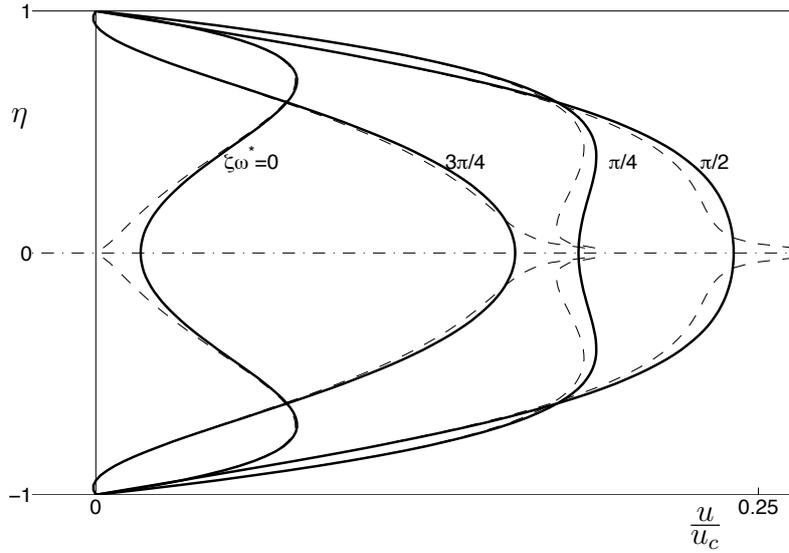


Figure 2.11: Ecoulement cyclique en conduite circulaire: cas d'un forçage rapide avec $\omega^* = 20$. Solution exacte (trait plein) et solution approchée (trait interrompu).

Cette équation est l'équation classique de diffusion.

Considérons tout d'abord le problème du démarrage brusque d'une plaque: pour $t < 0$, il n'y a pas de vitesse de plaque, et donc pas d'écoulement $u(y, t < 0) = 0$. Pour $t > 0$, une vitesse de plaque constante, U , est imposée. Un écoulement "démarré" donc au sein du fluide en $t = 0_+$, et ce afin de respecter la condition de non-glissement à la paroi: $u(0, t > 0) = U$. Clairement, il s'agit d'un problème aux conditions initiale et limite bien posé. L'analyse dimensionnelle nous fournit la variable de similitude à utiliser: $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$. En fait, l'algèbre est un peu plus facile si on utilise plutôt $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$. On considère donc:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = f(\eta). \quad (2.77)$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= U \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -U \frac{df}{d\eta} \eta \frac{1}{2t}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U \frac{df}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{1}{4\nu t}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (2.79)$$

Intégrée une première fois, elle donne:

$$\frac{df}{d\eta} = C e^{-\eta^2} . \quad (2.80)$$

Intégrée une deuxième fois, elle donne:

$$f(\eta) = C \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' + D . \quad (2.81)$$

La condition $f(0) = 1$ donne $D = 1$. La condition $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 0$ donne $C \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 = 0$. On a donc la solution:

$$\frac{u}{U} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta) , \quad (2.82)$$

avec erf la fonction erreur et erfc la fonction erreur complémentaire. Le développement du champ de vitesse est montré à la Fig. 2.12.

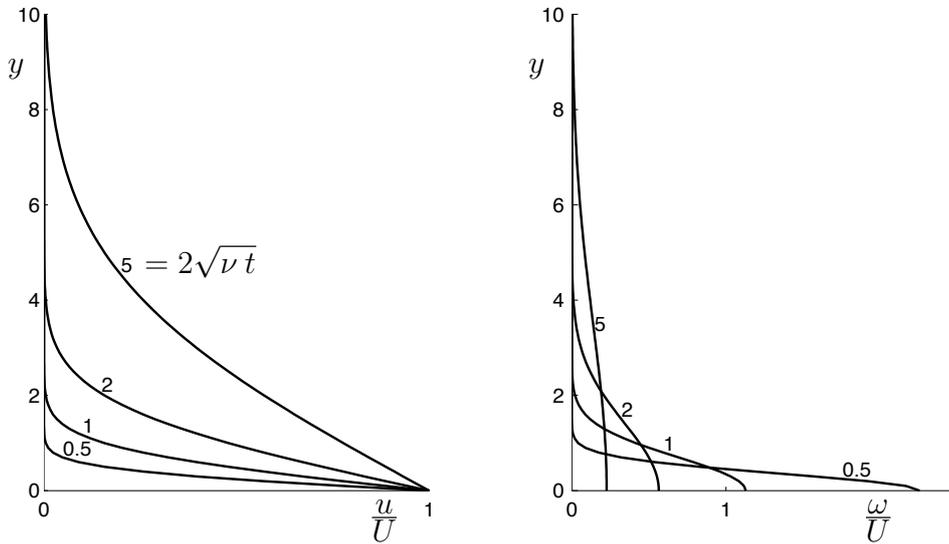


Figure 2.12: Démarrage brusque d'une plaque: développement des profils de vitesse et de tourbillon.

Le tourbillon est aussi facilement obtenu:

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} = \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} . \quad (2.83)$$

Son graphe est aussi donné à la Fig. 2.12. En fait, au temps $t = 0_+$, une feuille tourbillon infiniment mince (i.e., un Dirac de tourbillon) a été déposée sur la surface de la plaque. Elle diffuse ensuite dans le fluide, et la valeur du tourbillon à la paroi diminue en fonction du temps. L'intégrale du tourbillon reste cependant conservée et égale à U . En effet:

$$\int_0^\infty \omega dy = - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial y} dy = -[u(y)]_0^\infty = U . \quad (2.84)$$

2.2.4 Plaque oscillante

Dans le cas d'une plaque oscillante, la vitesse de la plaque est

$$U \cos(\omega t) = \Re \{ U e^{i\omega t} \} . \quad (2.85)$$

Par analyse dimensionnelle, on détermine que la variable est $\eta = y \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$. On considère donc:

$$\frac{u}{U} = \Re \{ f(\eta) e^{i\omega t} \} , \quad (2.86)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= U f i \omega e^{i\omega t} , \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} e^{i\omega t} , \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\omega}{\nu} e^{i\omega t} , \end{aligned} \quad (2.87)$$

où on a négligé de préciser qu'on doit considérer la partie réelle des fonctions ci-dessus: on s'en souviendra à la fin. On obtient donc l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} - i f = 0 . \quad (2.88)$$

Les solutions sont de la forme $C e^{\lambda \eta}$. Le polynôme caractéristique est ici $\lambda^2 - i = 0$, c.-à.-d. $\lambda^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}}$, et donc $\lambda_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ et $\lambda_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$. Ici, la solution doit décroître lorsque $\eta \rightarrow \infty$. On doit donc exclure la solution de la forme $C e^{\lambda_1 \eta}$. On a donc:

$$\frac{u}{U} = \Re \left\{ C e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\eta} e^{i\omega t} \right\} . \quad (2.89)$$

La condition de non-glissement en $\eta = 0$ détermine que $C = 1$. Finalement, on obtient:

$$\frac{u}{U} = e^{-\frac{\eta}{\sqrt{2}}} \cos \left(\omega t - \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) = e^{-y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \cos \left(\omega t - y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) . \quad (2.90)$$

L'amplitude de la vitesse décroît de manière exponentielle. De plus, elle est déphasée par rapport à la vitesse de la plaque, l'angle de déphasage ϕ étant proportionnel à la distance à la plaque: $\phi = y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$, voir Fig. 2.13. Par exemple, la vitesse en $y = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \pi$ est déphasée de π (i.e., de 180 deg) par rapport à la vitesse de la plaque.

2.3 Zone d'entrée et longueur d'établissement

Comme nous l'avons déjà noté précédemment, le profil de vitesse pour un écoulement à section invariable n'est pas nécessairement établi. Nous considérons ici une longue

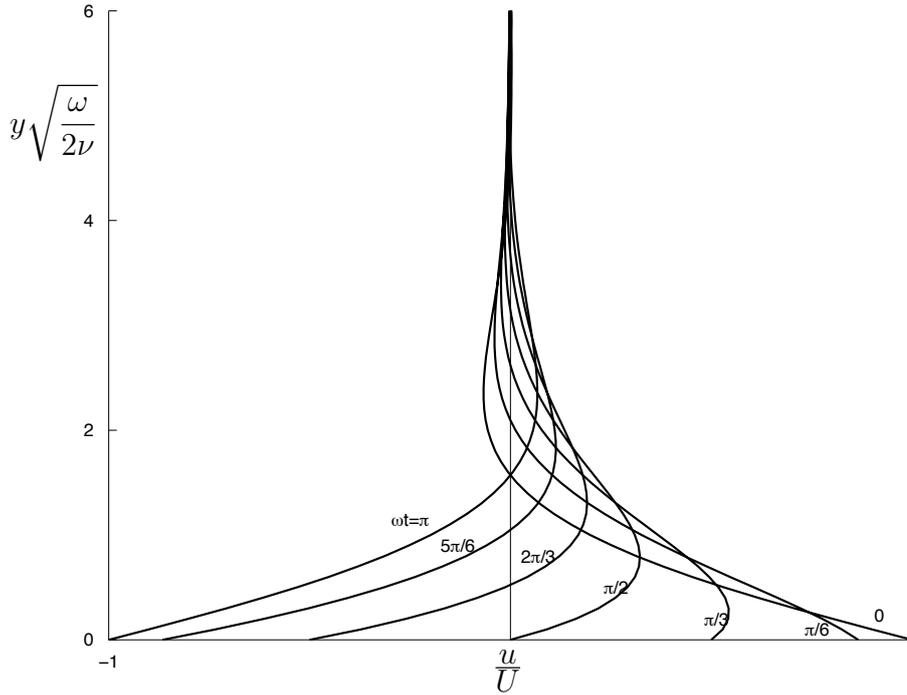


Figure 2.13: Oscillation d'une plaque: profils de vitesse.

conduite de section constante connectée à un grand réservoir, voir Fig. 2.14. A l'entrée de la conduite, $x = 0$, le profil de vitesse est essentiellement plat (i.e., écoulement bouchon) car la présence de la paroi de la conduite n'a pas encore pu influencer de façon significative le profil de vitesse. On a donc, en bonne approximation: $u(0, r) \approx u_m$ pour $0 \leq r < R$ et $u(0, R) = 0$. Il faudra compter une longueur d'établissement x_c non négligeable pour que l'écoulement s'établisse (i.e., se développe) et atteigne le régime qui correspond à l'écoulement de Poiseuille, $u(x > x_c, r) \approx u(r) = 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$, dans le cas d'un écoulement laminaire.

Les équations qui régissent ce problème sont essentiellement les équations de la couche limite (voir plus loin le chapitre du cours consacré aux couches limites) écrites ici en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{dP}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

En régime de couche limite, la pression n'est fonction que de x et le terme de diffusion en x est négligeable par rapport au terme de diffusion en r . Dans le problème laminaire que nous traitons, une couche limite se développe le long de la paroi, voir Fig. 2.14. Son épaisseur, $\delta(x)$, grandit en x jusqu'à ce qu'elle atteigne le centre de la conduite en $x \approx x_c$.

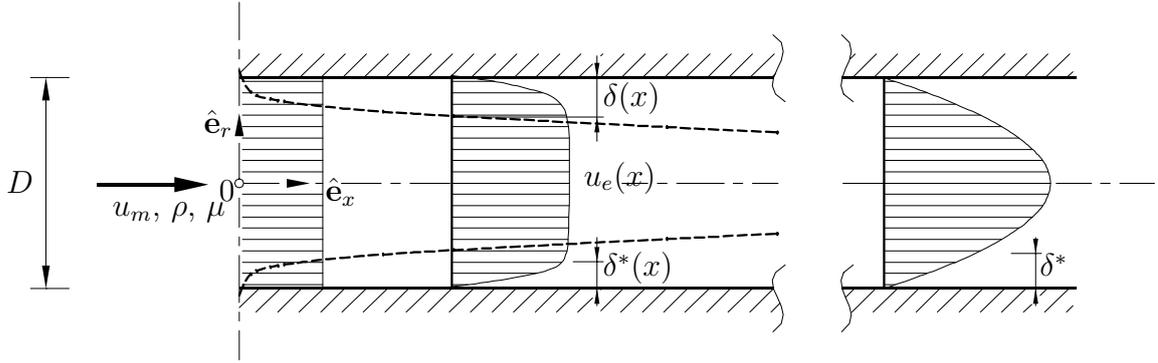


Figure 2.14: Zone d'entrée et établissement d'un écoulement en conduite circulaire.

A partir de cet endroit, on a essentiellement le profil de vitesse de Poiseuille pour un écoulement établi.

A noter que, d'un point de vue strictement mathématique, l'écoulement qui s'établit n'atteint le profil de vitesse établi que de façon asymptotique. Il faudra donc une distance infinie pour complètement établir un profil de vitesse. On considérera donc, pour la suite, que x_c est la longueur d'établissement telle que la vitesse au centre de la conduite soit presque égale à $2u_m$. Par exemple, $x_{c,0.99}$ désignera la longueur d'établissement nécessaire pour attendre 99% de cette vitesse, $x_{c,0.95}$ celle pour atteindre 95% de cette vitesse, etc.

Que vaut la pression $p(x)/\rho = P(x)$? Elle est en fait déterminée par la vitesse de l'écoulement, $u_e(x)$, dans la partie plate du profil en dehors de la couche limite, voir Fig. 2.14. Pour cette partie irrotationnelle de l'écoulement, l'équation de Bernoulli est satisfaite:

$$\begin{aligned} P(x) + \frac{1}{2}u_e^2(x) &= \text{constante} = P(0) + \frac{1}{2}u_m^2, \\ \frac{dP}{dx} + u_e \frac{du_e}{dx} &= 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Le problème posé revient donc finalement à résoudre le système d'équations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v) &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.93)$$

avec la condition initiale $u(0, r) = u_m$ et la condition frontière $u(x, R) = 0$. Comment détermine-t-on la vitesse $u_e(x)$? Clairement, par conservation du débit qui traverse chaque section: $\int u dA = u_m A$ pour tout x . Le profil de vitesse au sein de la couche limite

détermine donc $u_e(x)$ qui lui même intervient dans les équations qui déterminent le profil de vitesse. Le problème est donc fortement couplé. En fait, la notion d'épaisseur de couche limite, δ , est assez floue, comme on le verra par la suite. On utilise plutôt la notion d'épaisseur de déplacement, δ^* , qui est basée sur la notion de débit, voir Fig. 2.14. Ceci deviendra plus clair dans la partie du cours consacrée aux couches limites. Dans le cadre présent, elle est définie par:

$$u_e(x) \pi (R - \delta^*(x))^2 = \int u dA = u_m A = u_m \pi R^2, \quad (2.94)$$

et donc $\delta^*(x)$ et $u_e(x)$ sont reliés par

$$\left(1 - \frac{\delta^*(x)}{R}\right)^2 \frac{u_e(x)}{u_m} = 1, \quad (2.95)$$

ce qui constitue la relation fondamentale de couplage entre la couche limite et l'écoulement externe. A l'entrée, on a que $u_e(0) = u_m$ et donc que $\delta^*(0) = 0$. Asymptotiquement, on obtient Poiseuille avec $u_e = 2 u_m$, et donc avec $\delta^*/R = 1 - 1/\sqrt{2} = 0.293$.

Le problème ci-dessus n'a en fait pas de solution analytique. Il est certainement soluble par approche numérique. Il est aussi possible d'obtenir une solution approchée par utilisation de l'équation intégrale de von Karman, laquelle fait usage de $\delta^*(x)$ et de $u_e(x)$ qui sont, pour le problème présent, liés par l'équation ci-dessus. L'équation intégrale de von Karman sera aussi développée dans la partie du cours consacrée aux couches limites. A noter que, pour ce cours, la théorie des couches limites est développée pour le cas plan. Il faudrait, pour le problème présent, la développer pour le cas axisymétrique.

Même sans le résoudre, on peut déjà déterminer, par analyse dimensionnelle, que la loi qui régit la longueur de développement est de la forme:

$$\frac{x_c}{D} = f\left(\frac{u_m D}{\nu}\right) = f(Re_D). \quad (2.96)$$

Nous allons voir, dans la suite de ce chapitre, qu'il est possible d'estimer la loi de variation à partir de la solution analytique d'un problème différent: celui de l'écoulement instationnaire correspondant à un démarrage brusque en conduite.

Chapitre 3

Transfert de chaleur

La chaleur est une forme d'énergie. On appelle transfert de chaleur le transfert d'énergie suscité par un écart de température entre les différents points d'un milieu ou entre milieux distincts.

Il existe trois modes de transfert de chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement. Les deux premiers modes n'impliquent que des phénomènes locaux : ils sont décrits par des équations locales (équations aux dérivées partielles ou équations différentielles ordinaires). Le troisième mode fait intervenir tout l'environnement : il s'agit d'un phénomène global, décrit par des équations intégrales ou un ensemble équivalent d'équations algébriques.

La *conduction* de la chaleur est la transmission d'énergie, de proche en proche, par divers mécanismes mettant en jeu des particules élémentaires : molécules, atomes, phonons, électrons. La conduction dépend exclusivement des propriétés physiques du matériau considéré.

La *convection* de la chaleur est la transmission d'énergie thermique par delà une interface, généralement fluide-solide. Le mécanisme de convection, qui fait intervenir les propriétés de conduction des deux milieux au voisinage immédiat de l'interface, est principalement piloté par les caractéristiques de l'écoulement dans un voisinage assez étendu de l'interface.

Le *rayonnement thermique* est un rayonnement électromagnétique intervenant dans une gamme assez large de longueurs d'onde (le visible et l'infrarouge), et donc de fréquences pour lesquelles des interactions mécaniques sont possibles avec les constituants corpusculaires de la matière. Les substances solides absorbent en général le rayonnement thermique sur une épaisseur assez faible, voire très faible (quelques microns pour les matériaux conducteurs de l'électricité) : ces substances sont dites opaques. D'autres matériaux (les liquides, certains solides tels le verre ou les plastiques translucides, des gaz tels CO_2 , H_2O , $NH_3 \dots$) n'absorbent que partiellement et progressivement le rayonnement thermique :

ils sont dits semi-transparents. Enfin, des gaz dont la structure moléculaire est très simple (gaz monoatomiques tels Ar , diatomiques tels O_2 et N_2) sont quasi parfaitement transparents au rayonnement thermique. L'atmosphère ambiante n'a donc que très peu d'influence (seulement via H_2O et d'autres gaz à l'état de traces) sur la transmission du rayonnement thermique. Tout l'environnement du corps étudié doit être pris en considération : l'étude du rayonnement fait inévitablement appel à des relations globales. Cette caractéristique ne doit toutefois pas conduire à ignorer des phénomènes locaux parfois très complexes lors du transfert par rayonnement thermique : l'incidence du recouvrement de vitrages par des couches ultraminces en constitue un exemple.

Les lois relatives à la conduction et à la convection de la chaleur sont des lois linéaires, tout au moins dans leur formulation usuelle. Par contre, la loi de Stefan-Boltzman, loi fondamentale du rayonnement thermique, est hautement non-linéaire : elle fait intervenir la température absolue au quatrième degré.

3.1 Transfert de chaleur dans les solides

3.1.1 Conduction : loi de Fourier

Pour un matériau homogène et isotrope, le transfert de chaleur est caractérisé par le vecteur densité de flux de chaleur. Celui-ci est relié au gradient de température par la *loi de Fourier*

$$\mathbf{q} = -k\nabla T. \quad (3.1)$$

Il s'agit bien d'une loi de constitution qui apparaissait comme une partie du modèle de fluide visqueux newtonien décrit par (1.29). Toutefois, il convient de rappeler que la loi de Fourier est beaucoup plus générale et décrit le transfert de chaleur dans une multitude de matériaux.

Rappelons que le coefficient $k = \hat{k}(p, T)$ est la *conductibilité thermique*, propre à chaque matériau. La conductibilité thermique varie en général avec la température. Toutefois, contrairement à la viscosité, la variation de k avec la température est généralement faible dans des intervalles de température limités.

La conductibilité thermique des métaux est beaucoup plus élevée que celles des autres matériaux. Le tableau ci-dessous reprend quelques valeurs de conductibilités thermiques pour une température de $100^{\circ}C$. Il faut aussi observer qu'en général, la conductibilité d'un alliage est inférieure à celles de chacun de ses composants.

Matériau	k (W/mK)
eau (à pression atmosphérique)	0.67
cuivre	380
aluminium	260
acier	45

(D'après J. R. Bird, Transport Phenomena, Wiley, 60)

Le flux de chaleur qui traverse une surface A donnée se calcule aisément par

$$\mathcal{Q} = \int_A q(\mathbf{n})dA = \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}dA, \quad (3.2)$$

où $q(\mathbf{n})$ est la densité de flux de chaleur.

L'équation de la chaleur est la forme particulière de l'équation de conservation de l'énergie lorsqu'on l'applique à un corps solide, indéformable, éventuellement soumis à une génération interne de densité de puissance r . Le corps est en outre supposé au repos : il n'y a donc pas de travail exercé sur son environnement.

L'équation de conservation (1.8.3) devient dans ces conditions :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = r - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.3)$$

En y introduisant la chaleur massique c et en utilisant la loi de Fourier, on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = r + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (3.4)$$

Lorsque la conductibilité k ne varie pas avec la température, on trouve l'équation de la chaleur :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{r}{k} + \nabla^2 T, \quad (3.5)$$

où α est la diffusivité thermique :

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}. \quad (3.6)$$

La diffusivité thermique a une signification physique intéressante. Elle représente la facilité avec laquelle un flux de chaleur transmis à un solide se traduit, au sein de celui-ci,

par un relèvement de la température. Les propriétés de conductibilité thermique et de capacité calorifique du matériau interviennent donc toutes deux.

Par exemple, considérons un milieu semi-infini initialement à température nulle. Sa surface externe est forcée instantanément à $T_0 = 100^{\circ}C$. Le temps t après lequel la température aura atteint $\frac{1}{2}T_0 = 50^{\circ}C$ à 0.3 m de profondeur est repris ci-dessous :

Matériau	Argent	Cuivre	Acier	Verre
$10^6 \alpha \text{ m}^2/\text{s}$	170	103	12.9	0.59
t	9.5 min	16.5 min	2.2 h	2.0 jours

(D'après A. Bejan, Heat transfer, Wiley, 93)

Conduction à travers une plaque plane, en régime permanent

Considérons une plaque plane dont les faces latérales sont beaucoup plus grandes que son épaisseur L et ont une température connue. Si l'on néglige les effets de bord, on peut accepter que la recherche du champ de température dans la plaque est un problème unidimensionnel. L'équation de la chaleur se réduit à

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (3.7)$$

Cette équation indique que le profil de température est une droite dont les constantes d'intégration se déterminent par les conditions aux limites aux parois. Ici, on assigne les températures de paroi (figure 3.1).

- en $x = 0$, $T = T_0$,
- en $x = L$, $T = T_L$.

La solution particulière du problème est donnée par

$$T = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0, \quad (3.8)$$

la densité de flux de chaleur vaut

$$q = -k \frac{T_L - T_0}{L}, \quad (3.9)$$

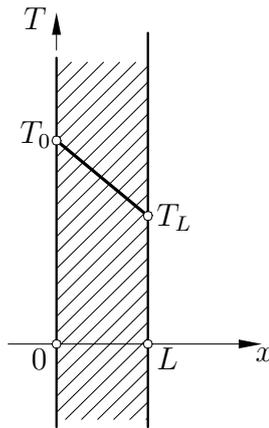


Figure 3.1: Profil de température dans une plaque plane.

et le flux de chaleur à travers une aire latérale A de la plaque vaut

$$\mathcal{Q} = Aq = -Ak \frac{T_L - T_0}{L}. \quad (3.10)$$

Tant le flux de chaleur que la densité de flux sont invariables avec x , ce qui est évident puisqu'en régime permanent sans puits ni source de chaleur, il ne peut y avoir accumulation d'énergie.

Le problème qui vient d'être résolu est trop partiel. En général, la plaque considérée est environnée, à ses deux faces, de fluides en écoulement dont on connaît les températures et les intensité d'échange par convection. Par contre les températures de parois sont généralement inconnues, et par ailleurs toujours très difficiles à mesurer.

3.1.2 Convection : loi de Newton

Lors du transfert de chaleur d'une paroi à température T_p vers un fluide environnant dont la température moyenne est T_f (supposée ici plus basse), l'expérience indique que l'on peut écrire une loi de transfert sous la forme

$$\mathcal{Q} = Ah(T_p - T_f), \quad (3.11)$$

où A est l'aire d'échange et $h(W/m^2K)$ est appelé *coefficient de convection*. Il apparaît que, souvent, h est indépendant ou ne dépend que faiblement de la température. La loi (3.11), dite *loi de Newton*, est donc approximativement linéaire.

La loi de Newton est plus formelle que physique, car le coefficient h ne peut être déterminé une fois pour toutes. Il contient en réalité toutes les informations relatives à l'écoulement et aux propriétés du fluide : profil de vitesse à la paroi, propriétés du fluide : viscosité, conductibilité thermique, masse volumique, chaleur massique. Ce sera l'objet de plusieurs chapitres ultérieurs de ce cours que d'exposer des méthodes de calcul du coefficient de convection h , en tenant compte de tous les éléments qui viennent d'être énumérés.

Ici, nous considérerons que la valeur de h est connue. Quelques valeurs typiques sont données, ci-dessous, à titre d'exemple et pour indiquer des ordres de grandeurs.

Type de transfert	Fluide	$h(W/m^2K)$
Convection forcée	gaz	10...300
	liquide aqueux	500...12000
	huile	50...1700
	métal liquide	6000...110000
Convection naturelle	gaz	5...30
	liquide aqueux	100...1000
Changement de phase	eau, ébullition	3000...60000
	eau, condensation	5000...110000

(D'après J. Taine et J.P. Petit, Heat transfer, Prentice Hall, 93)

Plaque soumise à convection

Considérons maintenant le cas d'une plaque soumise à convection illustré sur la figure 3.2. Le profil de température le long d'une normale aux parois de la plaque est continu. Les températures aux parois sont T_0 et T_L , tandis que les températures des fluides loin des parois sont respectivement

$$T_{\infty 0} \text{ et } T_{\infty L}.$$

Les conditions aux limites s'écrivent en exprimant le fait que le flux par conduction à l'intérieur de la plaque (loi de Fourier) est égal à celui qui sort par convection (loi de Newton). On a ainsi

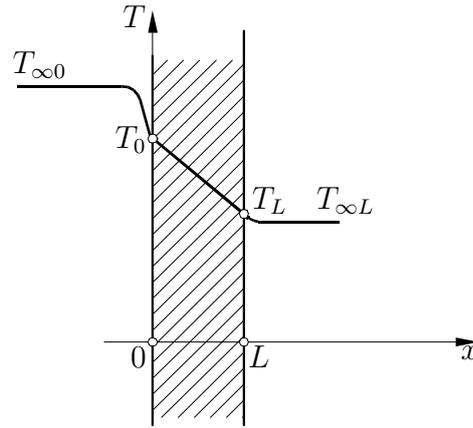


Figure 3.2: Profil de température : plaque plane soumise à convection.

- en $x = 0$,
$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_0 = h_0(T_{\infty 0} - T_0),$$
- en $x = L$,
$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_L = h_L(T_L - T_{\infty L}),$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient immédiatement le profil de température dans la plaque

$$T = \frac{(T_{\infty L} - T_{\infty 0}) \left(\frac{x}{L} + \frac{k}{h_0 L} \right)}{1 + \frac{k}{h_0 L} + \frac{k}{h_L L}} + T_{\infty 0}, \quad (3.12)$$

En introduisant un nombre de Biot Bi , estimé successivement à gauche et à droite par :

$$Bi_0 = \frac{h_0 L}{k}, \quad Bi_L = \frac{h_L L}{k}, \quad (3.13)$$

on peut écrire la solution (3.12) sous la forme

$$T = \frac{(T_{\infty L} - T_{\infty 0}) \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{Bi_0} \right)}{1 + \frac{1}{Bi_0} + \frac{1}{Bi_L}} + T_{\infty 0}, \quad (3.14)$$

Le nombre de Biot permet de quantifier les effets de convection par rapport aux effets de conduction.

On notera ainsi que la solution (3.8) est un cas limite de (3.14). En effet, pour maintenir inchangé le flux traversant la plaque, ce qui revient à maintenir T_0 et T_L inchangés, la condition de convection à la paroi gauche par exemple doit évoluer de manière à ce que la densité de flux $h_0(T_{\infty 0} - T_0)$ demeure constante. Si le coefficient de convection tend vers l'infini, la température doit se rapprocher asymptotiquement de T_0 . La solution (3.8) correspond donc à une convection d'intensité infinie ($Bi \rightarrow \infty$) aux deux faces.

Génération interne de chaleur dans un cylindre

Considérons un cylindre plein de rayon R qui soit l'objet d'une génération interne de chaleur. On suppose que la génération interne de chaleur est provoquée par effet Joule par le passage d'un courant électrique au sein du cylindre. La transmission d'un courant électrique est un processus irréversible et l'énergie électrique est convertie en chaleur par un effet de dissipation électrique. En supposant que le courant est uniformément réparti dans la section, la densité de puissance calorifique fournie est donc :

$$g = \frac{I^2}{\sigma} \quad (3.15)$$

où σ est la conductibilité électrique ($\Omega^{-1}m^{-1}$) et I est la densité de courant (Am^{-2}).

En régime permanent, l'équation de la chaleur (3.5) en coordonnées cylindriques se réduit à :

$$\frac{g}{k} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (3.16)$$

En supposant que la chaleur se dissipe par convection à l'extérieur du cylindre (coefficient de convection h , température moyenne du fluide environnant T_{∞} , les conditions aux limites sont :

- en $r = R$, $-k \frac{dT}{dr} \Big|_R = h(T_R - T_{\infty})$,
- en $r = 0$, $-k \frac{dT}{dr} \Big|_0 = 0$.

Cette dernière condition traduit le fait que, le long d'un diamètre et en particulier en l'axe du cylindre, la densité de flux ne peut présenter de discontinuité en l'absence de source ou de puits local de chaleur. La solution de (3.16) est

$$T = \frac{gR^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + \frac{gR}{2h} + T_{\infty}. \quad (3.17)$$

3.1.3 Notion de résistance thermique

Reprenons l'exemple de la figure 3.2. Le flux $\mathcal{Q} = Aq$ traversant une surface d'aire A de la paroi peut s'écrire sous les trois formes

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \frac{(T_{\infty 0} - T_0)}{\frac{1}{Ah_0}}, \\ \mathcal{Q} &= \frac{(T_0 - T_L)}{\frac{L}{Ak}}, \\ \mathcal{Q} &= \frac{(T_L - T_{\infty L})}{\frac{1}{Ah_L}},\end{aligned}\tag{3.18}$$

où on distingue la première et la troisième expression comme relatives au mode convectif de transfert, tandis que la seconde est relative au mode conductif.

Chacune de ces expressions du flux est analogue à la loi d'Ohm

$$I = \frac{\Delta U}{R},$$

où I est le courant, ΔU la différence de potentiel et R la résistance électrique. On est ainsi conduit à introduire la notion de résistance thermique (K/W) :

- résistance thermique conductive $\frac{L}{Ak}$,
- résistance thermique convective $\frac{1}{Ah}$.

On déduit de ce formalisme qu'un écart de température constitue un *potentiel de transfert thermique*. On notera également que le nombre de Biot exprime le rapport d'une résistance conductive à une résistance convective. L'analogie électrique peut être étendue au cas général tridimensionnel, en comparant la loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -k\nabla T.$$

à la forme vectorielle de loi d'Ohm

$$\mathbf{j} = -\sigma\nabla U.$$

où j est la densité de courant, σ la conductance unitaire ($\Omega^{-1}m^{-2}$). Finalement, l'analogie peut aussi être observée au niveau de l'expression de la résistance thermique conductive et celle de la résistance électrique $R = L/(A\sigma)$.

Si l'on se réfère à la figure 3.2, on observe que le flux de chaleur transmis du fluide de gauche à température $T_{\infty 0}$ au fluide de droite à température $T_{\infty L}$ doit "vaincre" trois résistances successives : résistance convective à gauche, résistance conductive dans la plaque, résistance convective à droite. La figure 3.3 montre bien que ces trois résistances sont placées en série. La résistance thermique totale est la somme des trois résistances mises en série :

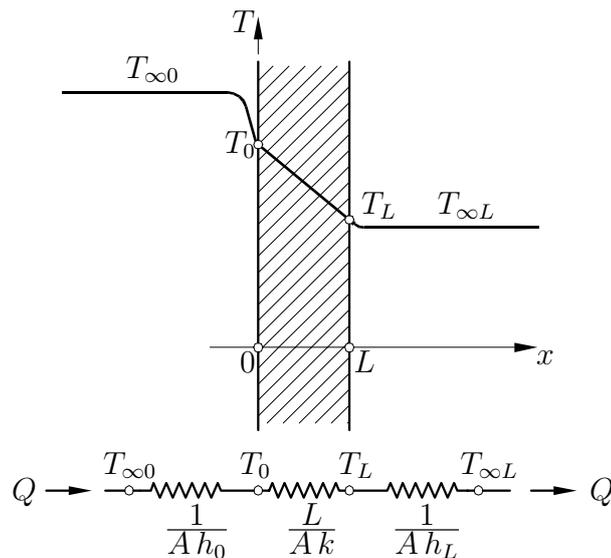


Figure 3.3: Circuit électrique équivalent au transfert de chaleur à travers une plaque.

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{(T_{\infty 0} - T_0)}{\frac{1}{Ah_0}} = \frac{(T_0 - T_L)}{\frac{L}{Ak}} = \frac{(T_L - T_{\infty L})}{\frac{1}{Ah_L}}, \\
 &= \frac{(T_{\infty 0} - T_{\infty L})}{\frac{1}{Ah_0} + \frac{L}{Ak} + \frac{1}{Ah_L}},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Le circuit thermique présente la même propriété d'additivité des résistances en série que son équivalent électrique. L'analogie peut être étendue à des circuits plus complexes,

présentant des résistances en parallèle.

En thermique du bâtiment, lors de l'étude des échangeurs de chaleur et dans bien d'autres cas, il est utile d'évaluer le flux transféré entre deux fluides séparés par une paroi, au moyen d'un paramètre unique. Le relation suivante est utilisée à cet effet

$$\mathcal{Q} = AU(T_{\infty 0} - T_{\infty L}) \quad (3.20)$$

qui constitue la relation de définition de U appelé *coefficient global de transfert de chaleur* (W/m^2K). La comparaison de (3.20) et (3.19) conduit à trouver l'expression du coefficient global en fonction des grandeurs physiques locales

$$\frac{1}{AU} = R_{tot} = \frac{1}{Ah_0} + \frac{L}{Ak} + \frac{1}{Ah_L} \quad (3.21)$$

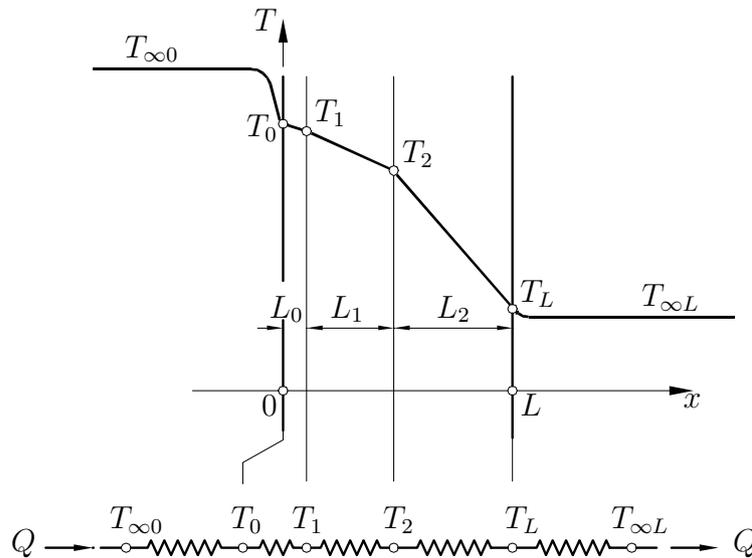


Figure 3.4: Transfert de chaleur à travers une plaque à couches multiples.

Lorsque la paroi est composée de plusieurs couches successives comme indiqué sur la figure 3.4, la généralisation des considérations précédentes conduit immédiatement à l'expression du coefficient global de transfert

$$\frac{1}{AU} = R_{tot} = \frac{1}{Ah_0} + \sum_i \frac{L_i}{Ak_i} + \frac{1}{Ah_L} \quad (3.22)$$

Conduction dans un tube

Considérons maintenant un tube et effectuons le même raisonnement. L'équation de Laplace en l'unique variable r s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (3.23)$$

dont la solution générale a la forme $T = a \log(r) + b$.

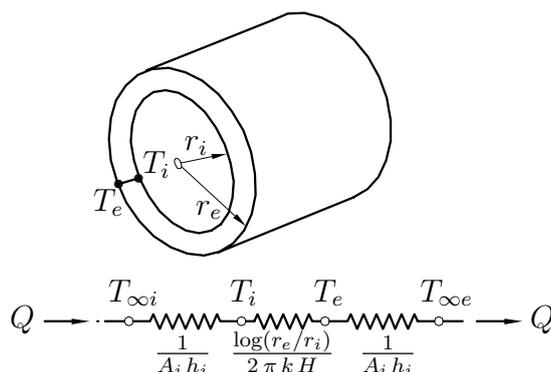


Figure 3.5: Transfert de chaleur à travers une paroi cylindrique.

Lorsqu'on choisit d'assigner les températures de paroi, les conditions aux limites s'écrivent en utilisant les notations définies sur la figure 3.5:

- en $r = r_i$, $T = T_i$,
- en $r = r_e$, $T = T_e$.

La solution particulière du problème est donnée par

$$T = \left(\frac{(T_e - T_i) \log(r)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \right) - \left(\frac{(T_e - T_i) \log(r_e)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} - T_e \right), \quad (3.24)$$

la densité de flux de chaleur vaut

$$q = -k \frac{(T_e - T_i)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right) r}, \quad (3.25)$$

et le flux de chaleur à travers une longueur L du tube vaut

$$Q = 2\pi L r q = -k \frac{(T_e - T_i)}{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} 2\pi L. \quad (3.26)$$

Lorsqu'on veut introduire les effets de convection, les conditions aux limites deviennent

- en $r = r_i$,
$$-k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r_i} = h_i(T_{\infty i} - T_i),$$
- en $r = r_e$,
$$-k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r_e} = h_e(T_e - T_{\infty e}),$$

où les notations sont définies sur la figure 3.5. On constate alors que pour le cas d'un tube de longueur L , le concept des résistances thermiques conductives et convectives donne les expressions suivantes :

- résistance thermique conductive $\frac{\log\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi Lk}$,
- résistance thermique convective interne $\frac{1}{2\pi Lr_i h_i}$,
- résistance thermique convective externe $\frac{1}{2\pi Lr_e h_e}$.

La définition de coefficients globaux de transfert U_i et U_e devient pour la paroi interne ou externe du tube respectivement :

$$\mathcal{Q} = (2\pi Lr_i)U_i(T_{\infty i} - T_{\infty e}) = (2\pi Lr_e)U_e(T_{\infty i} - T_{\infty e}) \quad (3.27)$$

On voit bien que les relations (3.27) définissent des valeurs distinctes de coefficient global de transfert de chaleur, selon que l'on choisit de se référer à la surface interne ou externe du tube. Comme pour la paroi plane, l'expression de la résistance totale peut très facilement être étendue au cas de parois cylindriques à couches multiples, comme le sont des conduites munies d'un isolant thermique.

3.1.4 Exemple de solution analytique de l'équation de Laplace

Soit le domaine rectangulaire représenté à la figure 3.6. Trois côtés du rectangle sont maintenus à la température T_0 tandis que le quatrième l'est à T_b . Des conditions aux limites homogènes facilitent la résolution du problème, ce qui conduit à le reformuler en termes d'excès de température : $\theta = T - T_0$. L'équation de Laplace est identique en T et θ :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} = 0 \quad (3.28)$$

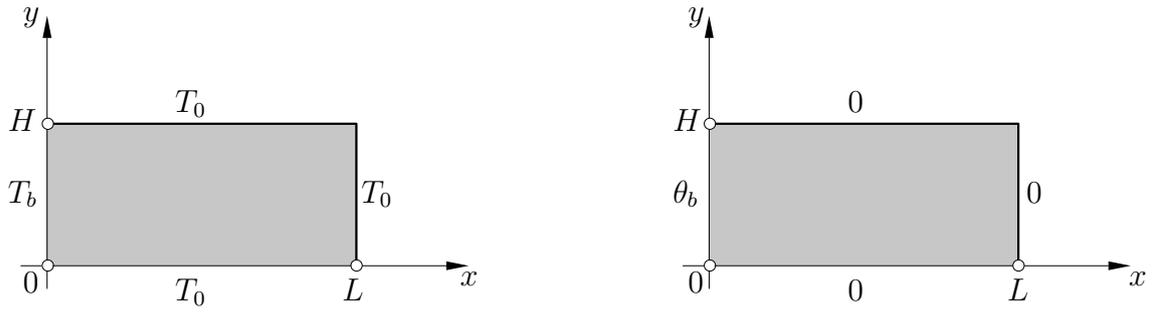


Figure 3.6: Domaine rectangulaire et conditions aux limites.

Les conditions aux limites sont mentionnées à la figure 3.6.

La solution de (3.28) s'obtient par séparation des variables. On pose :

$$\theta(x, y) = X(x) Y(y) \quad (3.29)$$

La substitution dans (3.28) donne :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (3.30)$$

Le premier rapport ne dépend que de la variable indépendante x , le second que de y . Les deux rapports doivent néanmoins demeurer égaux pour tout x et tout y : ils ne peuvent dès lors être égaux qu'à une constante. Par ailleurs, cette constante devra être positive afin d'obtenir des solutions à multiples racines en y , ce qui est nécessaire pour pouvoir satisfaire aux deux conditions homogènes imposées dans la direction y . On a donc :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2, \quad (3.31)$$

où λ est une constante réelle, non encore déterminée.

La solution du système est :

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sinh(\lambda x) + B \cosh(\lambda x) \\ Y(y) &= C \sin(\lambda y) + D \cos(\lambda y) \end{aligned} \quad (3.32)$$

La condition en $y = 0$ impose $D = 0$. La condition en $y = H$ conduit à :

$$C \sin(\lambda H) = 0 \quad (3.33)$$

Le problème différentiel en Y ne possédera de solution non identiquement nulle que pour certaines valeurs de λ :

$$\lambda_n = \frac{n \pi}{H}, \quad n \in Z \quad (3.34)$$

et les solutions s'écrivent:

$$Y_n(y) = C_n \sin(\lambda_n y). \quad (3.35)$$

La condition en $x = L$ donne une relation entre les constantes arbitraires d'intégration A et B , et $X(x)$ devient, pour chaque valeur de λ_n :

$$X_n(x) = \frac{A_n}{\cosh(\lambda_n L)} \sinh(\lambda_n(x - L)) \quad (3.36)$$

Il n'est possible de satisfaire à la condition aux limites non homogène en $x = 0$ qu'en adoptant pour solution une superposition des solutions précédemment obtenues:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh(\lambda_n(x - L)) \sin(\lambda_n y) \quad (3.37)$$

On se limite aux valeurs entières positives de n , afin que les solutions superposées soient linéairement indépendantes. En outre, on constate que le cas $n = 0$ n'apporte aucune contribution différente de zéro.

La condition en $x = 0$ impose :

$$\theta(0, y) = \theta_b = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh(\lambda_n L) \sin(\lambda_n y). \quad (3.38)$$

On observe, ici, que les solutions $\sin(\lambda_n y)$ sont orthogonales entre elles sur l'intervalle $[0, H]$, par rapport à la fonction poids unité pour le produit scalaire $\langle fg \rangle = \int_0^H fg dy$.

La fonction constante θ_b peut donc être développée en série de ces fonctions orthogonales. on trouve:

$$E_n \sinh(\lambda_n L) = \frac{\theta_b \int_0^H \sin(\lambda_n y) dy}{\int_0^H \sin^2(\lambda_n y) dy} \quad (3.39)$$

Les valeurs paires de n conduisent à des valeurs nulles de E_n . En posant:

$$n = 2m + 1, \quad \lambda_m = \frac{(2m + 1) \pi}{H}, \quad m \in N, \quad (3.40)$$

la solution s'écrit:

$$\theta(x, y) = \frac{4\theta_b}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sinh(\lambda_m(x-L)) \sin(\lambda_m y)}{\sinh(\lambda_m L) (2m+1)}. \quad (3.41)$$

Elle est représentée à la figure 3.7

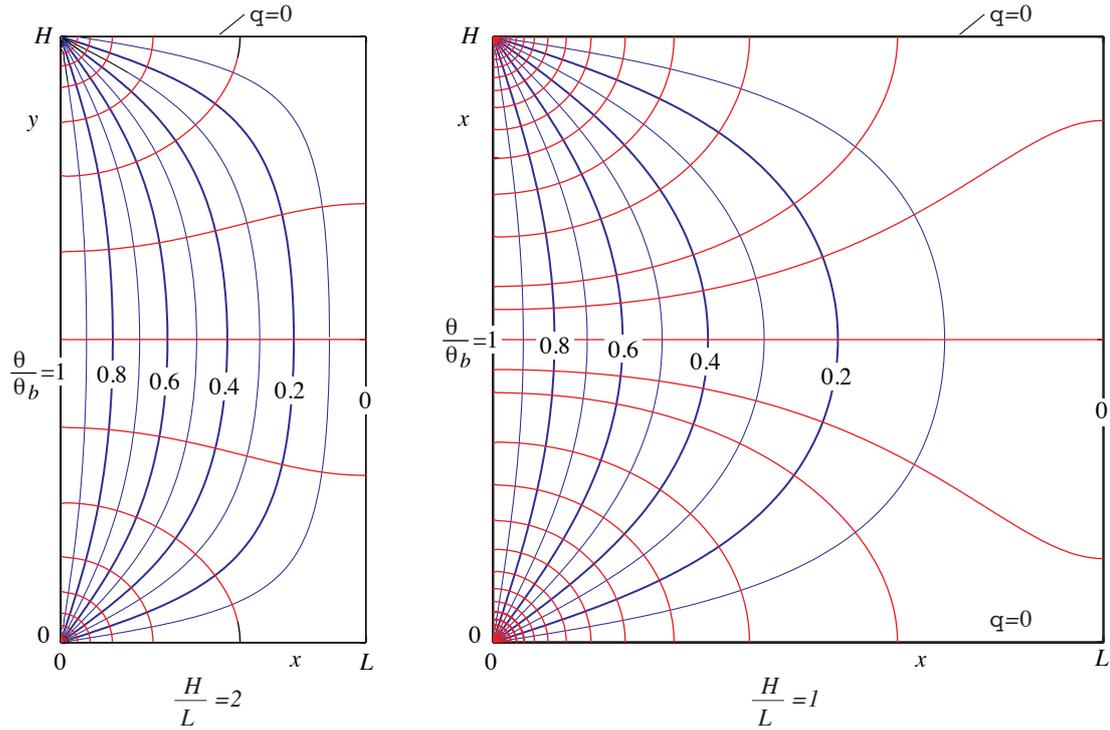


Figure 3.7: Isothermes et lignes de flux dans un domaine rectangulaire.

3.2 Transfert thermique en écoulement établi

On considère ici différents cas de transfert thermique en écoulement établi en conduite cylindrique circulaire. Le profil de vitesse est donc connu: c'est le profil de Poiseuille (avec la notation malheureuse, r au lieu de y , déjà utilisée auparavant).

En négligeant la conduction de chaleur dans la direction axiale,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3.42)$$

l'équation de l'énergie se réduit à:

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 . \quad (3.43)$$

avec $\frac{du}{dr}$ provenant du profil de vitesse:

$$\frac{du}{dr} = -4 \frac{u_m}{R} \frac{r}{R} . \quad (3.44)$$

Le transfert thermique est dit "établi" lorsque le profil de différence de température, $T - T_w$, avec T_w la température de paroi, ne dépend pas de x (i.e., n'est fonction que de r):

$$\frac{\partial}{\partial x} (T - T_w) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} . \quad (3.45)$$

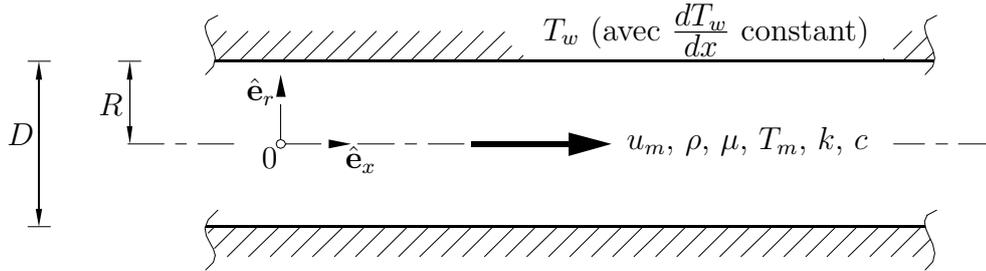


Figure 3.8: Transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire.

3.2.1 Transfert thermique établi avec température de paroi constante

On considère tout d'abord le cas du transfert thermique établi avec température de paroi, T_w , constante (i.e., $\frac{dT_w}{dx} = 0$). On a donc que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 . \quad (3.46)$$

Il n'y a donc pas de conduction de chaleur dans la direction axiale (i.e., pas besoin de faire l'hypothèse de la négliger: elle s'annule exactement).

L'équation de l'énergie se simplifie alors davantage:

$$0 = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 . \quad (3.47)$$

La dissipation visqueuse contrebalance donc exactement la conduction, ce qui conduit à:

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) = -16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 . \quad (3.48)$$

Par intégration, on obtient:

$$\frac{d}{dr} (T - T_w) = -4 \frac{\mu u_m^2}{k R} \left(\frac{r}{R} \right)^3 , \quad (3.49)$$

et donc, finalement, le profil de différence de température:

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) . \quad (3.50)$$

La différence de température maximale est obtenue au centre de la conduite:

$$T_c - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} . \quad (3.51)$$

Par exemple, pour de l'air à 20°C ($\mu = 1.81 \cdot 10^{-5}$ N s/m² et $k = 2.57 \cdot 10^{-2}$ W/(m K)) circulant en conduite avec une vitesse de débit, $u_m = 1$ m/s, on obtient $T_c - T_w = 0.00074^\circ\text{C}$, ce qui est faible. Pour de l'eau à 20°C ($\mu = 1.00 \cdot 10^{-3}$ N s/m² et $k = 0.603$ W/(m K)) circulant avec une vitesse de débit $u_m = 1$ m/s, on obtient $T_c - T_w = 0.0017^\circ\text{C}$, ce qui est aussi faible. Comme nous le verrons plus loin, la dissipation visqueuse est en fait souvent négligée dans les phénomènes de transfert de chaleur

La chaleur produite au sein de l'écoulement par la dissipation visqueuse est dégagée vers l'extérieur par conduction à la paroi. Comme le profil de température ne dépend pas de x , le transfert de chaleur ne dépend pas non plus de x : il s'agit bien d'un transfert thermique établi. On a, pour le transfert de chaleur à la paroi:

$$q_w = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} = 4 k \frac{(T_c - T_w)}{R} . \quad (3.52)$$

Le coefficient adimensionnel de transfert de chaleur est le nombre de Nusselt défini par

$$Nu = \frac{q_w}{k (T_c - T_w) / D} . \quad (3.53)$$

On a donc déterminé ici que le nombre de Nusselt en transfert thermique établi pour un écoulement de Poiseuille en conduite circulaire est $Nu = 8$.

En fait, la température maximale n'est pas la grandeur que l'on utilise en ingénierie pour définir un coefficient de transfert global. On utilise plutôt la température moyenne

représentative du flux énergétique thermique au sein de la conduite. A chaque tube de courant de section dA correspond un flux énergétique local égal à $cT\rho u dA$ (énergie thermique \times débit massique). La température de référence (“cup mixing temperature”) est définie par:

$$cT_m = \frac{\int_A cT\rho u dA}{\int_A \rho u dA}, \quad (3.54)$$

et donc, en incompressible, par:

$$T_m = \frac{\int_A T u dA}{\int_A u dA} = \frac{\int_A T u dA}{u_m A}, \quad (3.55)$$

Le flux énergétique thermique global de la conduite est donc, par définition de T_m , égal à $cT_m\rho u_m A$. De manière équivalente, on a, par soustraction de T_w , que

$$T_m - T_w = \frac{\int_A (T - T_w) u dA}{\int u dA}. \quad (3.56)$$

Pour le profil de différence de température ci-dessus, on obtient, par intégration (avec $dA = r d\theta dr$ et en utilisant $\eta = r/R$):

$$T_m - T_w = \frac{1}{u_m \pi R^2} \frac{\mu u_m^2}{k} 2 u_m 2\pi R^2 \int_0^1 (1 - \eta^4) (1 - \eta^2) \eta d\eta = \frac{5}{6} \frac{\mu u_m^2}{k}. \quad (3.57)$$

On peut donc aussi écrire, pour le profil de différence de température, voir Fig. 3.9:

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{6}{5} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right). \quad (3.58)$$

Le transfert de chaleur à la paroi est alors

$$q_w = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} = \frac{24}{5} k \frac{(T_m - T_w)}{R}, \quad (3.59)$$

de sorte que le nombre de Nusselt défini en utilisant $T_m - T_w$ vaut:

$$Nu = \frac{q_w}{k (T_m - T_w) / D} = \frac{48}{5} = 9.60. \quad (3.60)$$

3.2.2 Transfert thermique établi avec température de paroi linéaire

On considère ensuite le cas, plus complexe, du transfert thermique établi avec température de paroi, T_w , linéaire en x (i.e., $\frac{dT_w}{dx}$ constant). On a donc que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_w}{dx} = \text{constante} \quad \implies \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (3.61)$$

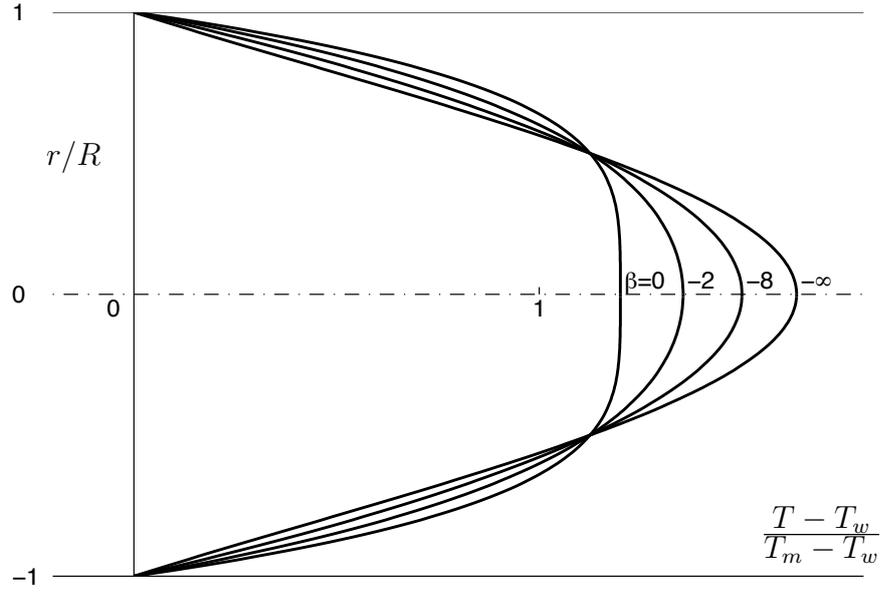


Figure 3.9: Profils de différence de température pour le transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire. Cas avec $\beta \leq 0$.

Il n'y a donc, de nouveau, pas de conduction de chaleur dans la direction axiale (i.e., pas besoin de faire l'hypothèse de la négliger: elle s'annule exactement). L'équation d'énergie devient ici:

$$\rho c \frac{dT_w}{dx} 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_w) \right) + 16 \mu \frac{u_m^2}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2. \quad (3.62)$$

Celle-ci s'intègre pour donner:

$$\frac{d}{dr} (T - T_w) = \frac{1}{2} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R \left(2 \frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right) - 4 \frac{\mu u_m^2}{k R} \left(\frac{r}{R} \right)^3, \quad (3.63)$$

et, finalement, le profil de différence de température:

$$T - T_w = \frac{\mu u_m^2}{k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right). \quad (3.64)$$

Le transfert de chaleur à la paroi est:

$$q_w = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} - \frac{1}{2} \rho c \frac{dT_w}{dx} u_m R. \quad (3.65)$$

On obtient aussi, par intégration, que:

$$T_m - T_w = \frac{5}{6} \frac{\mu u_m^2}{k} - \frac{11}{48} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2. \quad (3.66)$$

Les équations ci-dessus constituent la solution exacte du problème posé. Définissons le paramètre adimensionnel β :

$$\beta = \left(\frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \right) / \left(\frac{\mu u_m^2}{k} \right) = \rho c \frac{dT_w}{dx} \frac{R^2}{\mu u_m}. \quad (3.67)$$

On a alors:

$$\begin{aligned} T - T_w &= \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \beta \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \right], \\ T_m - T_w &= \frac{\mu u_m^2}{k} \left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right], \\ \frac{q_w}{k/D} &= \frac{\mu u_m^2}{k} [8 - \beta], \\ \frac{T - T_w}{T_m - T_w} &= \frac{\left[\left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) - \frac{1}{8} \beta \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \right]}{\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]}, \\ Nu &= \frac{q_w}{k (T_m - T_w) / D} = \frac{[8 - \beta]}{\left[\frac{5}{6} - \frac{11}{48} \beta \right]}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

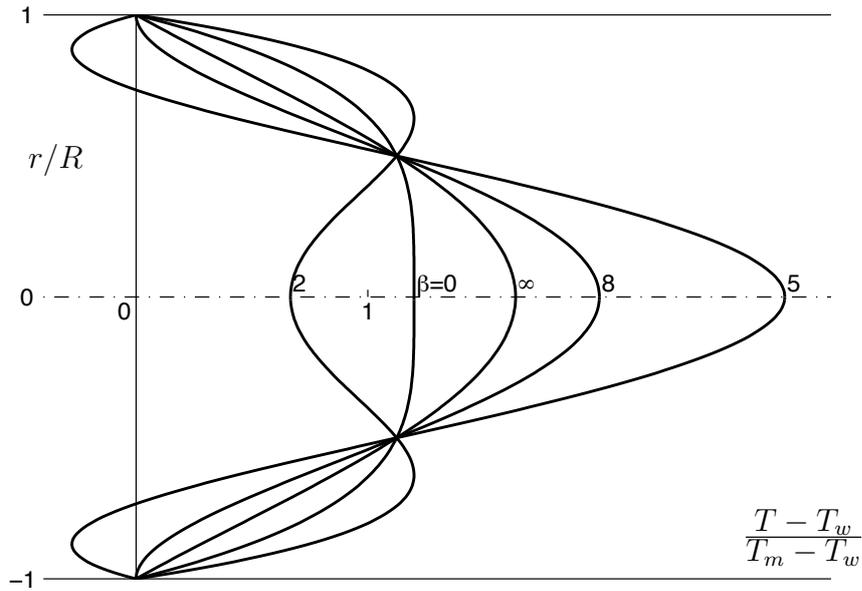


Figure 3.10: Profils de différence de température pour le transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire. Cas avec $\beta \geq 0$.

Les profils normalisés de différence de température, $\frac{T - T_w}{T_m - T_w}$, sont donnés aux Fig. 3.9 et Fig. 3.10 pour différentes valeurs du paramètre β . La variation du nombre de Nusselt en

fonction de β est présentée à la Fig. 3.11. Le cas $\beta = 0$ correspond au cas avec température de paroi constante: $Nu = \frac{48}{5} = 9.60$. Le cas $\beta = 8$ correspond au cas adiabatique: $q_w = 0$ (et donc $Nu = 0$) alors que $T_m - T_w \neq 0$! Le cas $\beta = \frac{40}{11} = 3.64$ correspond à $q_w \neq 0$ alors que $T_m - T_w = 0$!, et donc à $Nu \rightarrow \infty$.

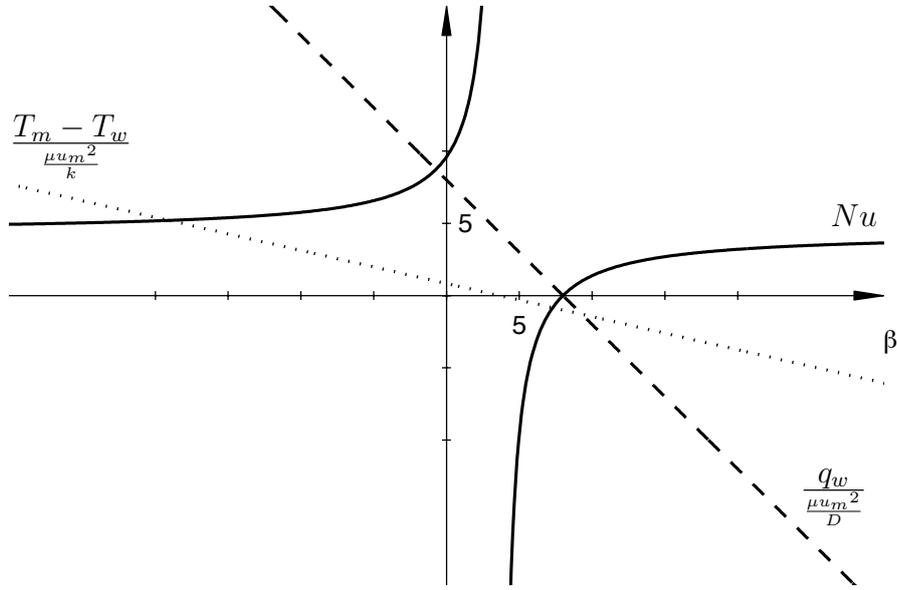


Figure 3.11: Variation du nombre de Nusselt en fonction de β pour le transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire.

Le cas avec $\beta \rightarrow \pm\infty$ (i.e., $\frac{1}{\beta} \rightarrow 0$) correspond au cas avec dT_w/dx non-nul mais avec dissipation visqueuse négligeable. On a alors simplement:

$$\begin{aligned}
 T - T_w &= -\frac{1}{8} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2 \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right), \\
 T_m - T_w &= -\frac{11}{48} \frac{\rho c}{k} \frac{dT_w}{dx} u_m R^2, \\
 q_w &= -\frac{1}{2} \rho c \frac{dT_w}{dx} u_m R, \\
 \frac{T - T_w}{T_m - T_w} &= \frac{6}{11} \left(3 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right), \\
 Nu &= \frac{q_w}{k (T_m - T_w) / D} = \frac{48}{11} = 4.36. \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

Finalement, on note une propriété remarquable de tous les profils de température:

quel que soit β , on a toujours

$$\frac{T - T_w}{T_m - T_w} = \frac{9}{8} \quad \text{en} \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}. \quad (3.70)$$

3.2.3 Entrée thermique: le problème de Grätz

Les cas considérés ci-avant sont les seuls avec écoulement de Poiseuille et avec transfert thermique établi. Considérons maintenant le problème plus complexe du développement d'un profil de température au sein d'un écoulement établi suite à un changement brusque de la température de paroi, voir Fig. 3.12. Pour $x < 0$, la température de paroi est égale à T_0 . Pour $x > 0$, elle est égale à $T_w \neq T_0$ mais constante.

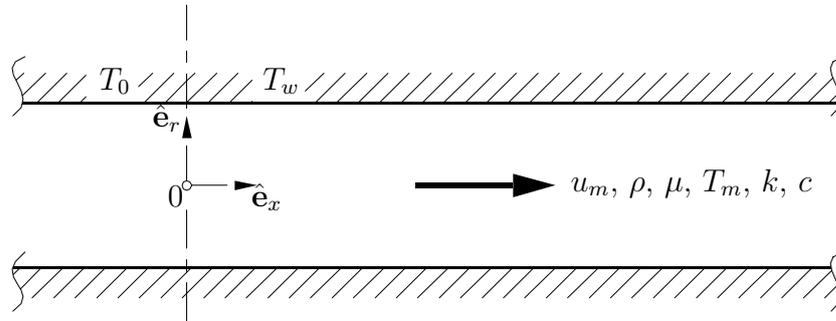


Figure 3.12: Entrée thermique avec écoulement de Poiseuille en conduite circulaire.

On simplifie le problème davantage en négligeant le terme de dissipation visqueuse. On a donc, pour l'équation d'énergie:

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3.71)$$

ou, avec la diffusivité thermique, $\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{\nu}{Pr}$,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.72)$$

Comme on a négligé la dissipation visqueuse, le profil de température pour $x < 0$ est tout à fait plat: $T = T_0$. (En effet, cela correspond au cas vu ci-avant avec dissipation visqueuse négligée et avec température de paroi constante.) Le fait que $T = T_0$ soit valable jusqu'en $x = 0$ provient du fait qu'on a aussi négligé la conduction axiale. De même, loin en aval de la discontinuité de température de paroi, on atteindra de nouveau

un profil plat: $T \rightarrow T_w$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Le problème à résoudre est, bien sûr, la zone de développement: problème de l'“entrée thermique”.

Avec l'écoulement de Poiseuille, $u = 2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$, on obtient:

$$2 u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) . \quad (3.73)$$

On travaille ici en variable adimensionnelle. On définit

$$T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{1}{Re_D Pr} \frac{x}{D} = \frac{1}{Pe_D} \frac{x}{D}, \quad (3.74)$$

avec $Pe_D = Re_D Pr$ le nombre de Peclet. L'équation se réduit alors à la forme générique:

$$(1 - \eta^2) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = \frac{2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) . \quad (3.75)$$

A noter que le choix de la normalisation de x a été dicté par le besoin d'obtenir cette forme générique indépendante des paramètres dimensionnels (à faire en exercice). Les conditions initiale et à la limite deviennent:

$$T^*(\eta, 0) = 1, \quad T^*(1, \zeta) = 0 . \quad (3.76)$$

Les variables sont clairement séparables. On cherche donc une solution de la forme:

$$T^*(\eta, \zeta) = f(\eta) g(\zeta) . \quad (3.77)$$

On obtient alors:

$$(1 - \eta^2) f \frac{dg}{d\zeta} = \frac{2}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) g , \quad (3.78)$$

et donc:

$$\frac{1}{2g} \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta (1 - \eta^2) f} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) = -\lambda^2 . \quad (3.79)$$

Cela donne:

$$\frac{dg}{d\zeta} + 2\lambda^2 g = 0 , \quad (3.80)$$

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta (1 - \eta^2) f = 0 . \quad (3.81)$$

La fonction g est de la forme $g = C e^{-2\lambda^2 \zeta}$. La solution du problème est donc obtenue comme:

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\eta) e^{-2\lambda_n^2 \zeta} \quad (3.82)$$

avec

$$\eta^2 \frac{d^2 f_n}{d\eta^2} + \eta \frac{df_n}{d\eta} + \lambda_n^2 \eta^2 (1 - \eta^2) f_n = 0 . \quad (3.83)$$

L'imposition de la condition à la limite, $T^*(1, \zeta) = 0$, implique que $f_n(1) = 0$: les λ_n (i.e., les valeurs propres) sont donc telles que les solutions $f_n(\eta)$ de l'équation différentielle s'annulent en $\eta = 1$. L'équation différentielle ci-dessus est fort complexe: à cause du terme $(1 - \eta^2)$, il ne s'agit pas d'une équation de Bessel. Le problème a cependant été résolu par Poiseuille en 1885.

Le problème plus simple résolu par Grätz en 1883 est celui où le profil de vitesse est simplifié: on considère un profil plat: $u = u_m$. C'est ce qu'on appelle un écoulement "bouchon" ("slug flow"). Dans ce cas, on obtient plus simplement:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = \frac{4}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right), \quad (3.84)$$

ce qui donne, avec $T^* = f(\eta) g(\zeta)$:

$$f \frac{dg}{d\zeta} = \frac{4}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) g, \quad (3.85)$$

et donc:

$$\frac{1}{4g} \frac{dg}{d\zeta} = \frac{1}{\eta f} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) = -\lambda^2, \quad (3.86)$$

ou encore:

$$\frac{dg}{d\zeta} + 4\lambda^2 g = 0, \quad (3.87)$$

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + \lambda^2 \eta f = 0. \quad (3.88)$$

La fonction g est donc de la forme $g = C e^{-4\lambda^2 \zeta}$, et la solution du problème est donc construite comme:

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(\eta) e^{-4\lambda_n^2 \zeta} \quad (3.89)$$

avec

$$\eta^2 \frac{d^2 f_n}{d\eta^2} + \eta \frac{df_n}{d\eta} + \lambda_n^2 \eta^2 f_n = 0, \quad (3.90)$$

ce qui constitue une équation de Bessel d'ordre 0. Les solutions en sont $J_0(\lambda_n \eta)$ et $Y_0(\lambda_n \eta)$. Comme Y_0 n'est pas borné à l'origine, il faut la rejeter. La solution du problème s'exprime donc sous la forme:

$$T^*(\eta, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta) e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.91)$$

L'imposition de la condition à la limite, $T^*(1, \zeta) = 0$, implique que $J_0(\lambda_n) = 0$: les λ_n (i.e., les valeurs propres) sont donc les zéros successifs de la fonction de Bessel J_0 . L'imposition de la condition initiale, $T^*(\eta, 0) = 1$ demande que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \eta). \quad (3.92)$$

Cette condition permet de déterminer les C_n . En effet, on se souvient que les fonctions de Bessel sont orthogonales avec la fonction de poids η . Plus précisément, pour tout $\alpha \neq \beta$, on a :

$$\int_0^1 \eta J_0(\alpha \eta) J_0(\beta \eta) d\eta = \frac{\beta J_1(\beta) J_0(\alpha) - \alpha J_1(\alpha) J_0(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}, \quad (3.93)$$

avec J_1 la fonction de Bessel régulière d'ordre 1 (Rappel: $\frac{d}{ds} J_0(s) = -J_1(s)$), et donc, pour tout $\lambda_n \neq \lambda_m$ zéros de la fonction J_0 , on obtient l'orthogonalité :

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_n \eta) J_0(\lambda_m \eta) d\eta = 0. \quad (3.94)$$

On se souvient aussi que :

$$\int_0^1 \eta (J_0(\alpha \eta))^2 d\eta = \frac{1}{2} (J_0(\alpha))^2 + \frac{1}{2} (J_1(\alpha))^2, \quad (3.95)$$

et donc, pour tout λ_n zéro de la fonction J_0 , on obtient la normalisation :

$$\int_0^1 \eta (J_0(\lambda_n \eta))^2 d\eta = \frac{1}{2} (J_1(\lambda_n))^2. \quad (3.96)$$

En multipliant Eq. (3.92) par $\eta J_0(\lambda_m \eta)$ et en intégrant, on obtient donc :

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) J_0(\lambda_n \eta) = C_m \frac{1}{2} (J_1(\lambda_m))^2. \quad (3.97)$$

Comme $\int s J_0(s) ds = s J_1(s)$, on a aussi que

$$\int_0^1 \eta J_0(\lambda_m \eta) d\eta = \frac{1}{\lambda_m} [\eta J_1(\lambda_m \eta)]_0^1 = \frac{1}{\lambda_m} J_1(\lambda_m). \quad (3.98)$$

On a donc, pour le coefficient C_m :

$$C_m = \frac{2}{\lambda_m J_1(\lambda_m)}. \quad (3.99)$$

Le champ de température est finalement obtenu :

$$T^*(\eta, \zeta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \eta)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.100)$$

Il est représenté à la Fig. 3.13.

On a aussi :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \eta} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \eta)}{J_1(\lambda_n)} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.101)$$

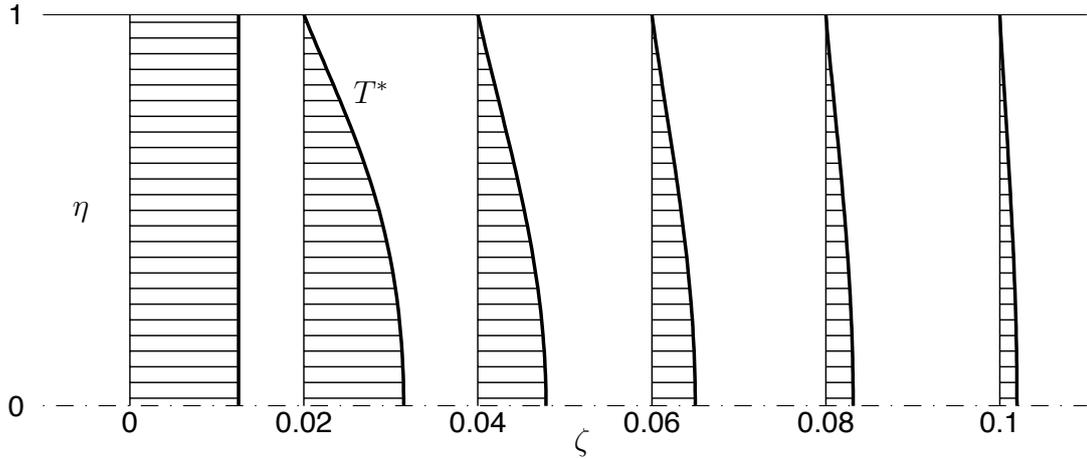


Figure 3.13: Entrée thermique avec écoulement bouchon en conduite circulaire: évolution spatiale du champ de température.

Le transfert de chaleur à la paroi est donc:

$$q_w(\zeta) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{k}{R} (T_0 - T_w) \left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{k}{R} (T_0 - T_w) 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}. \quad (3.102)$$

La température de référence pour définir le nombre de Nusselt est

$$T_m - T_w = \frac{\int (T - T_w) u dA}{\int u dA}, \quad (3.103)$$

ce qui conduit à

$$\frac{T_m - T_w}{T_0 - T_w} = T_m^*(\zeta) = \frac{\int T^* u dA}{u_m A} = \frac{\int T^* dA}{A} = 2 \int_0^1 T^*(\eta, \zeta) \eta d\eta = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-4\lambda_n^2 \zeta} \quad (3.104)$$

où on a utilisé le fait que $u = u_m$ dans ce problème simplifié d'écoulement bouchon. On a donc, finalement, pour le nombre de Nusselt:

$$Nu(\zeta) = \frac{q_w}{k(T_m - T_w)/D} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-4\lambda_n^2 \zeta}}. \quad (3.105)$$

Son évolution est donnée à la Fig. 3.14.

Quelle est la longueur de développement caractéristique d'une telle entrée thermique? Elle est essentiellement déterminée par le terme exponentiel qui décroît le moins vite,

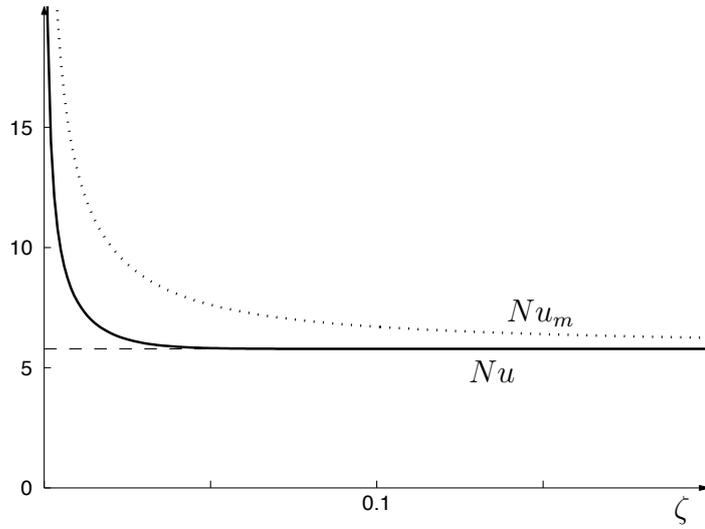


Figure 3.14: Entrée thermique avec écoulement bouchon en conduite circulaire: évolution des nombres de Nusselt Nu et Nu_m .

$e^{-4\lambda_1^2\zeta}$. On a donc, comme estimation de la longueur de développement (pour passer de 1 à e^{-1} dans le facteur exponentiel dominant):

$$\zeta_c \approx \frac{1}{4\lambda_1^2} = 0.043 . \quad (3.106)$$

Quel est le transfert de chaleur asymptotique? Pour $\zeta > \zeta_c$, on obtient:

$$Nu(\zeta > \zeta_c) \approx \lambda_1^2 = 5.78 . \quad (3.107)$$

(Pour comparaison: avec le profil de vitesse de Poiseuille, la longueur caractéristique obtenue est $\zeta_c \approx 0.068$ et le transfert de chaleur asymptotique est $Nu(\zeta > \zeta_c) \approx 3.66$.)

3.2.4 Nombre de Nusselt moyen

On définit le flux de chaleur moyen réalisé sur une distance x par:

$$q_{w,m}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x q_w(x') dx' . \quad (3.108)$$

A noter que, par définition, on a: $d(x q_{w,m}) = q_w dx$.

Le flux de transfert total réalisé sur une distance x est une grandeur importante car il correspond à l'énergie thermique globale perdue (gagnée) par le fluide sur la distance x .

Le bilan global donne:

$$2\pi R x q_{w,m}(x) = \pi R^2 \rho u_m c (T_m(0) - T_m(x)) \quad (3.109)$$

de sorte que $T_m(x)$ peut être calculé si $q_{w,m}(x)$ est connu. La forme différentielle de l'équation de bilan donne:

$$2\pi R d(x q_{w,m}) = 2\pi R q_w dx = -\pi R^2 \rho u_m c dT_m, \quad (3.110)$$

ce qui n'est rien d'autre que le bilan de puissance thermique perdue (acquise) par le fluide sur un élément de longueur dx , voir Fig. 3.15. On a donc:

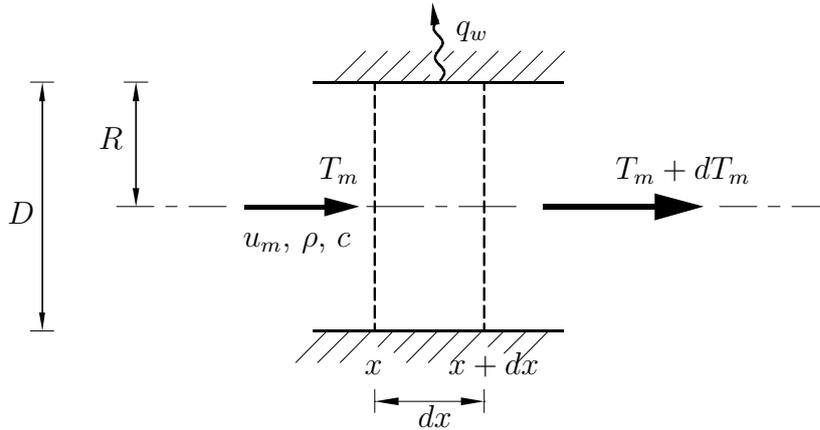


Figure 3.15: Bilan d'énergie thermique perdue (acquise) par l'écoulement établi sur un élément de longueur dx .

$$q_w(x) dx = -\frac{D}{4} \rho u_m c dT_m. \quad (3.111)$$

A noter que la forme différentielle s'intègre bien pour redonner le bilan global:

$$\begin{aligned} x q_{w,m}(x) &= -\frac{D}{4} \rho u_m c (T_m(x) - T_m(0)) = -\frac{1}{4} \frac{\rho u_m D}{\mu} \frac{\mu c}{k} (T_m(x) - T_m(0)) \\ &= \frac{1}{4} Re_D Pr k (T_m(0) - T_m(x)). \end{aligned} \quad (3.112)$$

L'équation différentielle de bilan s'exprime aussi en terme de Nu :

$$\begin{aligned} Nu(x) dx &= \frac{D q_w}{k (T_m - T_w)} dx = -\frac{R^2 \rho u_m c}{k} \frac{dT_m}{(T_m - T_w)} \\ &= -\frac{D \rho u_m D}{4 \mu} \frac{\mu c}{k} \frac{dT_m}{(T_m - T_w)} \\ &= -\frac{D}{4} Re_D Pr \frac{dT_m}{(T_m - T_w)}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

résultat différentiel général, qui est même valable lorsque T_w dépend de x . Dans le cas avec T_w constant (comme dans le problème de Grätz), on a $dT_m = d(T_m - T_w)$, et l'équation s'intègre aussi pour donner:

$$x Nu_m(x) = \frac{D}{4} Re_D Pr \log [(T_m(0) - T_w) / (T_m(x) - T_w)] . \quad (3.114)$$

A quoi correspond le nombre de Nusselt moyen, $Nu_m(x)$ défini ci-dessus? En comparant les résultats obtenus pour $q_{w,m}(x)$ et $Nu_m(x)$, on constate qu'il correspond au transfert de chaleur moyen normalisé,

$$Nu_m = \frac{q_{w,m}}{k \Delta T_m / D} , \quad (3.115)$$

avec, comme référence ΔT_m pour la différence globale de température, la moyenne logarithmique:

$$\Delta T_m = \frac{[(T_m(0) - T_w) - (T_m(x) - T_w)]}{\log [(T_m(0) - T_w) / (T_m(x) - T_w)]} . \quad (3.116)$$

Pour le problème de Grätz, on a, en termes adimensionnels,

$$\zeta Nu_m(\zeta) = -\frac{1}{4} \log (T_m^*(\zeta)) . \quad (3.117)$$

Avec l'écoulement bouchon, $u = u_m$, cela donne:

$$Nu_m(\zeta) = -\frac{1}{4\zeta} \log \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-4\lambda_n^2 \zeta} \right] , \quad (3.118)$$

résultat qui est aussi donné à la Fig. 3.14. Pour $\zeta \gg \zeta_c$, la valeur asymptotique de Nu_m est obtenue en considérant le terme dominant:

$$Nu_m(\zeta \gg \zeta_c) \approx -\frac{1}{4\zeta} \log \left[\frac{4}{\lambda_1^2} e^{-4\lambda_1^2 \zeta} \right] = -\frac{1}{4\zeta} \left(\log \left(\frac{4}{\lambda_1^2} \right) - 4\lambda_1^2 \zeta \right) \approx \lambda_1^2 = 5.78 , \quad (3.119)$$

ce qui est, bien sûr, la même valeur asymptotique que celle obtenue pour $Nu(\zeta > \zeta_c)$. A noter que Nu_m converge moins vite vers la valeur asymptotique que Nu .

Chapitre 4

Couches limites laminaires

4.1 Introduction

Bien que le modèle du fluide parfait (c-à-d non visqueux) en écoulement incompressible et irrotationnel produise des résultats utiles et fondamentaux, il a ses limites car il ne permet de calculer que des écoulements avec glissement du fluide le long de la paroi. Les fluides réels sont visqueux: ils ne glissent pas le long des parois; ils y adhèrent. La condition de non-glissement à la paroi est donc une caractéristique fondamentale des écoulements de fluides réels. Le fait que le fluide adhère à la paroi entraîne une production de tourbillon à celle-ci. Le tourbillon est produit à la paroi, diffuse de la paroi vers l'écoulement, et est transporté par ce même écoulement le long de la paroi. Il s'ensuit que l'écoulement au voisinage de la paroi n'est plus irrotationnel: il contient du tourbillon. La zone proche de la paroi qui contient ce tourbillon est appelée "couche limite" (de paroi).

La compétition entre les phénomènes de diffusion et de convection du tourbillon détermine l'épaisseur de la couche limite. Celle-ci est généralement mince, et d'autant plus mince que le nombre de Reynolds caractéristique global de l'écoulement est grand.

Considérons, par exemple, l'écoulement laminaire d'un fluide autour d'un profil de type aérodynamique et à faible angle d'attaque, voir Fig. 4.1. La vitesse caractéristique globale est la vitesse amont, U_∞ . La dimension caractéristique globale est la corde du profil, c . Le nombre de Reynolds caractéristique global est donc $Re = U_\infty c/\nu$. Le temps caractéristique global de convection (inertie, transport) est $T \sim c/U_\infty$. Au sein de la couche limite, les effets de la viscosité sont du même ordre de grandeur que les effets d'inertie. C'est en fait là une façon de définir la couche limite: la couche limite est la région proche de la paroi où les effets visqueux sont aussi importants que les effets d'inertie. On y reviendra dans la section suivante, lors du développement rigoureux des équations qui régissent la couche limite. Pour l'exemple du profil aérodynamique considéré ici, on a donc que le temps T est aussi le temps caractéristique global de diffusion du tourbillon au sein de la couche limite. Durant T , le processus de diffusion va couvrir une épaisseur

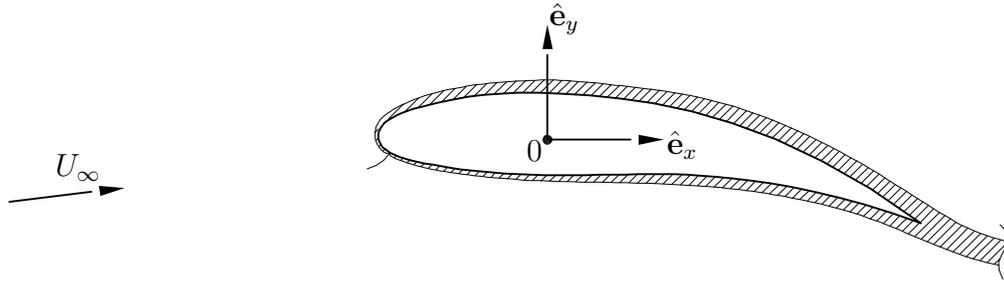


Figure 4.1: Profil aérodynamique en écoulement réel, avec couche limite le long de la paroi.

globale $\delta(c) = \mathcal{O}(\sqrt{\nu T})$. On en conclut que

$$T \sim \frac{\delta^2(c)}{\nu} \sim \frac{c}{U_\infty}, \quad (4.1)$$

ce qui conduit aux égalités :

$$\frac{\delta(c)}{c} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{U_\infty c/\nu}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right). \quad (4.2)$$

Comparée à la corde du profil, la couche limite laminaire est effectivement d'autant plus petite que le nombre de Reynolds global est grand. De plus, nous avons déjà obtenu la loi de variation. Nous verrons dans la suite que l'approche rigoureuse du problème confirme bien ce résultat préliminaire.

Que se passe-t-il en aval du profil? Le tourbillon de couche limite quitte la proximité de la paroi au bord de fuite et devient tourbillon de sillage. C'est le cas idéal de bon fonctionnement aérodynamique du profil. Si, par contre, on augmente trop l'angle d'attaque, la couche limite à l'extrados du profil quitte la paroi avant d'atteindre le bord de fuite. On a séparation de la couche limite avant le bord de fuite: c'est le cas de mauvais fonctionnement aérodynamique du profil. On parle alors de "décrochage" du profil. A noter que la séparation d'une couche limite est, en général, un phénomène instationnaire: le point de séparation ne demeure pas au même endroit, le tourbillon de couche limite quitte la paroi de façon non continue et de gros tourbillons de sillage sont produits de façon intermittente.

Ce chapitre a pour objet d'exposer la théorie de la couche limite pour des écoulements incompressibles et laminares. Le cas simple de l'écoulement le long d'une plaque plane et avec vitesse extérieure à la couche limite, $u_e(x)$, sera étudié en détail. La solution exacte de Blasius sera obtenue pour le cas u_e constant. Le transfert de chaleur en couche limite sera aussi étudié, ainsi que l'effet du nombre de Prandtl du fluide.

Les méthodes de solution pour les écoulements laminaires avec $u_e = u_e(x)$ sont étudiées en détail dans le cours *Aérodynamique*, de même que le cas des couches limites en écoulements turbulents.

4.2 Etablissement des équations de la couche limite laminaire

4.2.1 Approche physique

On considère l'écoulement laminaire bidimensionnel et stationnaire le long d'une plaque plane. La plaque commence en $x = 0$ et s'étend vers les $x > 0$. La couche limite commence donc aussi en $x = 0$.

En l'absence de couche limite, on a une vitesse de l'écoulement qui est connue (Par exemple, calculée en utilisant l'approximation en fluide parfait.) On suppose que la couche limite est assez mince pour que la vitesse en dehors de la couche limite, $u_e(x)$, puisse effectivement être approximée par la vitesse obtenue sans couche limite. Au sein de la couche limite, la vitesse passe d'une valeur nulle à la paroi (condition de non-glissement) à la valeur $u_e(x)$.

Au vu des constatations précédentes, il est logique de supposer que l'épaisseur locale de la couche limite, $\delta(x)$, à la distance x par rapport au début de la plaque est faible par rapport à cette distance: $\delta(x) \ll x$. Au sein de la couche limite, la vitesse $u(x, y)$ est de l'ordre de $u_e(x)$: $u = \mathcal{O}(u_e)$. La dérivée $\partial u / \partial y$ est donc $\mathcal{O}(u_e / \delta)$. Il est clair que la vitesse varie beaucoup moins vite en x qu'en y . La dérivée $\partial u / \partial x$ est $\mathcal{O}(u_e / x)$. On a donc:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x} \right) &\ll \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{\delta} \right) , \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x^2} \right) &\ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{\delta^2} \right) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Notons par V l'ordre de grandeur de $v(x, y)$ dans la couche limite: $v = \mathcal{O}(V)$. On peut donc écrire:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{V}{\delta} \right) . \quad (4.4)$$

D'autre part, l'équation de continuité, $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$, implique aussi que l'on ait:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \sim \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x} \right) . \quad (4.5)$$

On a donc:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| = \mathcal{O} \left(\frac{V}{\delta} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{u_e}{x} \right) , \quad (4.6)$$

ce qui, en fait, détermine l'ordre de grandeur de v pour la couche limite:

$$v = \mathcal{O}(V) = \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{x} u_e\right). \quad (4.7)$$

La vitesse v est donc effectivement beaucoup plus petite que la vitesse u .

L'équation de quantité de mouvement en x est:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (4.8)$$

Considérons d'abord les termes d'inertie. On obtient, pour les ordres de grandeur:

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{u_e^2}{x}\right), \quad \left| v \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{x} u_e \cdot \frac{u_e}{\delta}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{u_e^2}{x}\right). \quad (4.9)$$

Les deux termes d'inertie sont donc du même ordre de grandeur: on ne peut pas négliger l'un par rapport à l'autre. Pour les termes de diffusion visqueuse, l'équation (4.3) implique que la diffusion en x est négligeable par rapport à la diffusion en y . Cette dernière est donc la seule à considérer. Son ordre de grandeur est:

$$\left| \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O}\left(\nu \frac{u_e}{\delta^2}\right). \quad (4.10)$$

La couche limite étant la zone de l'écoulement proche de la paroi où les effets de viscosité sont aussi importants que les effets d'inertie (c'est en fait là une façon de la définir), il s'ensuit nécessairement que l'on ait:

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| \sim \left| v \frac{\partial u}{\partial y} \right| \sim \left| \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{u_e^2}{x}\right) = \mathcal{O}\left(\nu \frac{u_e}{\delta^2}\right), \quad (4.11)$$

et donc

$$\frac{\delta(x)}{x} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{-1/2}\right). \quad (4.12)$$

On a aussi obtenu, de façon plus formelle, la même expression que lors de l'introduction.

Qu'en est-il du terme $|\partial p/\partial x|/\rho$? Comme il constitue un des termes de l'équation de quantité de mouvement en x , il est nécessairement soit négligeable soit aussi $\mathcal{O}(u_e^2/x)$. En dehors de la couche limite, l'écoulement est irrotationnel: l'équation de Bernoulli y est donc satisfaite. La pression en dehors de la couche limite, $p = p_e(x)$, est donc régie par la relation:

$$\frac{p_e(x)}{\rho} + \frac{u_e^2(x)}{2} = B_0, \quad (4.13)$$

et donc, de façon équivalente, par:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx}(x) = u_e(x) \frac{du_e}{dx}(x). \quad (4.14)$$

Considérons maintenant l'équation de quantité de mouvement en y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (4.15)$$

Les termes d'inertie sont de nouveau du même ordre de grandeur:

$$\left| u \frac{\partial v}{\partial x} \right| \sim \left| v \frac{\partial v}{\partial y} \right| \sim \mathcal{O} \left(u_e \frac{V}{x} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{V^2}{\delta} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{x} \frac{u_e^2}{x} \right), \quad (4.16)$$

La diffusion en x est négligeable par rapport à la diffusion en y . Cette dernière est de l'ordre de

$$\left| \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| = \mathcal{O} \left(\nu \frac{V}{\delta^2} \right) = \mathcal{O} \left(\nu \frac{\delta}{x} \frac{u_e}{\delta^2} \right) \quad (4.17)$$

Par Eq. (4.12), on en déduit que les termes d'inertie et de diffusion en y sont de nouveau du même ordre de grandeur: ils sont $\mathcal{O}((\delta/x)(u_e^2/x))$. Le terme $|\partial p/\partial y|/\rho$ est donc aussi, au plus, $\mathcal{O}((\delta/x)(u_e^2/x))$. Par série de Taylor, la pression au sein de la couche limite est donc, au plus, de l'ordre de

$$p(x, y) = p_e(x) + (y - \delta) \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=\delta} + \dots, \quad (4.18)$$

ce qui donne, comme ordre de grandeur:

$$\begin{aligned} \frac{p(x, y)}{\rho} &= \frac{p_e(x)}{\rho} + \mathcal{O} \left(\delta \frac{\delta}{x} \frac{u_e^2}{x} \right) = \frac{p_e(x)}{\rho} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\delta}{x} \right)^2 u_e^2 \right) \\ &= B_0 - \left(1 - \mathcal{O} \left(\left(\frac{\delta}{x} \right)^2 \right) \right) \frac{u_e^2(x)}{2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le terme de correction étant en $(\delta/x)^2$, on peut donc certainement le négliger et considérer que la pression ne varie pas au travers de la couche limite. On prend donc $p(x, y) = p_e(x)$, ce qui donne:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx}(x) = u_e(x) \frac{du_e}{dx}(x). \quad (4.20)$$

Les équations de la couche limite (équations de Prandtl) sont donc finalement obtenues:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.22)$$

A noter, en passant, que le cas particulier u_e constant correspond à $dp_e/dx = 0$.

4.2.2 Approche mathématique

On considère ici une approche plus formelle et mathématique pour l'établissement des équations de la couche limite.

La couche limite se développe le long d'une plaque qui commence en $x = 0$. Pour simplifier, on considère que la plaque est plane, mais cette hypothèse n'est en fait pas limitative. On considère les équations de la couche limite au voisinage du point X fixé, et avec vitesse extérieure U_e fixée ($U_e = u_e(X)$).

En définitive, il y a alors deux "grandeurs caractéristiques" (X et U_e), et toutes deux constantes dans l'analyse. Le nombre de Reynolds est $Re = U_e X/\nu$. L'écoulement est fonction de X , U_e et ν seulement. On cherche à voir comment l'écoulement se comporte pour Re grand, en supposant cependant qu'il reste laminaire. Pour cela, on adimensionnalise les équations avec X et U_e , et on fait $Re \rightarrow \infty$.

On considère donc une famille d'écoulements fictifs, paramétrés par Re , qu'on fait tendre vers l'infini (similitude dynamique). L'écoulement asymptotique obtenu par le passage à la limite est une bonne approximation de l'écoulement réel, correspondant à une valeur précise de Re . La comparaison entre les divers écoulements (et donc le passage à la limite) n'est possible qu'en adimensionalisant les équations.

Une première adimensionalisation, élémentaire, fait apparaître les équations d'Euler pour $Re \rightarrow \infty$. c'est l'écoulement dit "externe", correspondant au modèle du fluide parfait. cet écoulement ne respecte pas les conditions sur la plaque.

Une seconde adimensionalisation est alors introduite pour faire apparaître la couche limite et les équations de Prandtl.

Définissons d'abord $\delta = X Re^{-1/2}$. Il est clair que la grandeur δ n'est pas exactement l'épaisseur de la couche limite. C'est un ordre de grandeur de cette épaisseur. (En fait, l'épaisseur de la couche limite est un concept peu précis et encore à définir: nous y reviendrons en temps opportun).

Considérons donc la mise sous forme adimensionnelle des équations de la couche limite en utilisant les variables "prime" suivantes adimensionnelles:

$$x = X x' , \quad y = \delta y' , \quad u = U_e u' , \quad v = V v' , \quad \text{et} \quad p = \rho U_e^2 p' , \quad (4.23)$$

où V est encore à déterminer.

L'équation de continuité devient:

$$\frac{U_e}{X} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 , \quad (4.24)$$

et donc:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{V}{U_e} \frac{X}{\delta} \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{V}{U_e} Re^{1/2} \frac{\partial v'}{\partial y'} . \quad (4.25)$$

On considère la similitude dynamique avec $Re \rightarrow \infty$. Pour que l'équation ne dégénère pas lorsque $Re \rightarrow \infty$ (principe de moindre dégénérescence), on doit donc prendre:

$$V = U_e Re^{-1/2} . \quad (4.26)$$

On obtient alors:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 . \quad (4.27)$$

Considérons ensuite l'équation de quantité de mouvement en x . On obtient:

$$\begin{aligned} \frac{U_e^2}{X} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) &= -\frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U_e}{X^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\nu U_e}{\delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} . \\ &= -\frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U_e}{\delta^2} \left(\left(\frac{\delta}{X} \right)^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) . \\ &= -\frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{U_e^2}{X} \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) . \end{aligned} \quad (4.28)$$

On a donc:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) , \quad (4.29)$$

qui, lorsque $Re \rightarrow \infty$, se réduit à:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} . \quad (4.30)$$

Pour l'équation de quantité de mouvement en y , on obtient:

$$\frac{U_e V}{X} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{U_e^2}{\delta} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \frac{V}{\delta^2} \left(\left(\frac{\delta}{X} \right)^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) . \quad (4.31)$$

On a $U_e^2/\delta = Re^{1/2} U_e^2/X$. Comme $V = Re^{-1/2} U_e$, on a aussi $U_e V/X = Re^{-1/2} U_e^2/X$ et $\nu V/\delta^2 = Re^{-1/2} \nu U_e/\delta^2 = Re^{-1/2} U_e^2/X$. Ceci permet d'écrire:

$$Re^{-1/2} \frac{U_e^2}{X} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -Re^{1/2} \frac{U_e^2}{X} \frac{\partial p'}{\partial y'} + Re^{-1/2} \frac{U_e^2}{X} \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) . \quad (4.32)$$

On a donc, finalement:

$$Re^{-1} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + Re^{-1} \left(Re^{-1} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) , \quad (4.33)$$

qui, lorsque $Re \rightarrow \infty$, se réduit à:

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0 . \quad (4.34)$$

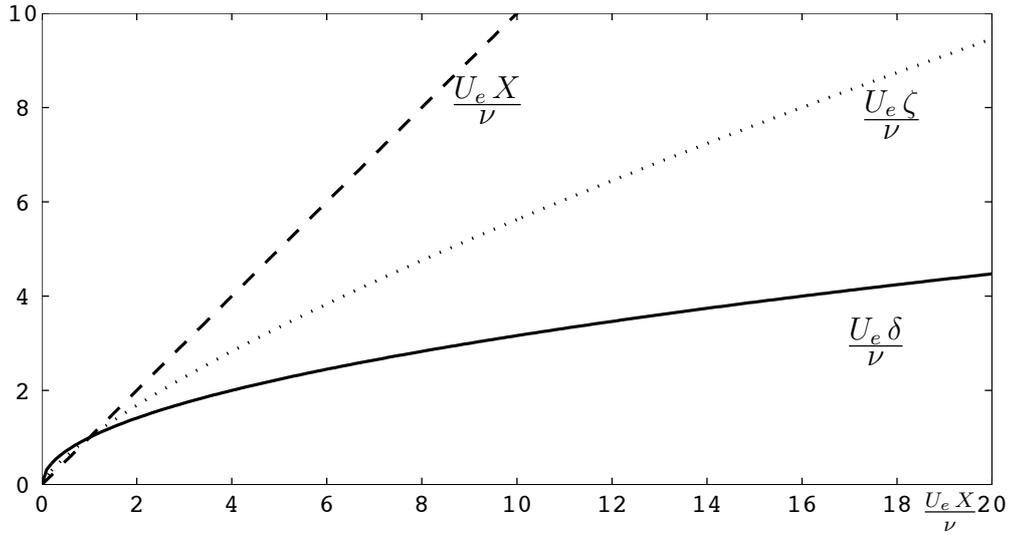


Figure 4.2: Schéma des échelles: échelle d'épaisseur de la couche limite, δ , échelle intermédiaire (de raccordement), ζ , et échelle de longueur le long de la plaque, X .

La pression ne varie donc pas au travers de la couche limite.

Les conditions à la paroi sont: $u = v = 0$ en $y = 0$. Les conditions loin de la paroi sont les conditions de raccordement entre l'écoulement "Prandtl" et l'écoulement "Euler". Pour fixer les idées, considérons la grandeur ζ définie par $\zeta = X Re^{-1/4}$. Clairement, dès que $Re \gg 1$, on a:

$$\frac{\delta}{\zeta} = Re^{-1/4} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\zeta}{X} = Re^{-1/4} \ll 1. \quad (4.35)$$

ζ est donc une échelle intermédiaire entre δ et X : dès que $Re \gg 1$, on a que $\delta \ll \zeta \ll X$, voir Fig. 4.2. Le raccordement Prandtl-Euler se fait dans une zone à hauteur $\mathcal{O}(\zeta)$.

Pour les valeurs de Re de plus en plus grand, la solution adimensionnelle a une valeur unique au raccordement (en notant que cette solution adimensionnelle ne dépend que de Re et que les adimensionalisations de u et de p sont les mêmes hors couche limite et dans la couche limite). Cependant, l'ordonnée adimensionnelle de raccordement est $\hat{y} = \zeta/X$ pour la zone externe et $y' = \zeta/\delta$ pour la zone interne (zone de couche limite). En faisant tendre Re vers $l'infini$, cette ordonnée de raccordement tend vers 0 pour la zone externe et vers $l'infini$ pour la zone interne.

Revenant aux variables dimensionnelles, puisque le facteur de proportionnalité est le

même, on a donc comme conditions de raccordement asymptotiques:

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} u_e(x, y) = u_e(x, 0) , \\ \lim_{y \rightarrow \infty} p(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} p_e(x, y) = p_e(x, 0) .\end{aligned}\quad (4.36)$$

De plus, comme $\partial p / \partial y = 0$ dans la couche limite, la pression y vaut partout $p_e(x, 0)$. Le problème de Prandtl s'écrit donc finalement:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (4.37)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x}(x, 0) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.38)$$

et

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 , \quad (4.39)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x, 0) . \quad (4.40)$$

Finalement, et comme l'écoulement hors couche limite satisfait l'équation de Bernoulli, le terme $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x}(x, 0)$ peut aussi s'écrire $u_e(x, 0) \frac{\partial u_e}{\partial x}(x, 0)$.

4.3 Solution pour le cas avec u_e constant (Blasius)

On considère ici le cas simple avec $u_e(x, 0)$ constant:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (4.41)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (4.42)$$

C'est le problème dont la solution a été obtenue par Blasius. Comme l'écoulement est incompressible, le champ de vitesse est déterminé par une fonction de courant, ψ , telle que $u = \partial \psi / \partial y$ et $v = -\partial \psi / \partial x$. L'équation de continuité est alors satisfaite. La similitude de la solution requiert que:

$$\frac{u}{u_e} = g\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) = g(\eta) , \quad (4.43)$$

avec $\eta = y/\delta(x)$, la variable de similitude où:

$$\delta(x) = \frac{x}{\left(\frac{u_e x}{2\nu}\right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2} x}{Re^{1/2}} = \left(\frac{2\nu x}{u_e}\right)^{1/2} . \quad (4.44)$$

Le facteur “2” n’est pas nécessaire (Blasius ne l’avait pas utilisé). Cependant, il permet d’éviter un autre facteur “2” par la suite. Pour les dérivées partielles de η , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{y}{\delta^2(x)} \delta'(x) = -\eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{\delta(x)},\end{aligned}\quad (4.45)$$

avec

$$\delta'(x) = \frac{1}{\sqrt{2} Re^{1/2}}. \quad (4.46)$$

La fonction de courant est nécessairement de la forme

$$\psi = u_e \delta(x) f(\eta). \quad (4.47)$$

En effet, cette forme conduit à:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e \delta(x) f'(\eta) \frac{1}{\delta(x)} = u_e f'(\eta). \quad (4.48)$$

Le profil de vitesse, $g(\eta)$, est donc $g(\eta) = f'(\eta)$. La fonction de courant donne aussi la vitesse v :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(u_e \delta'(x) f(\eta) - u_e \delta(x) f'(\eta) \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \right) = u_e \delta'(x) (\eta f'(\eta) - f(\eta)). \quad (4.49)$$

Pour les dérivées du champ de vitesse, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -u_e f''(\eta) \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e f''(\eta) \frac{1}{\delta(x)}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_e f'''(\eta) \frac{1}{\delta^2(x)}.\end{aligned}\quad (4.50)$$

Les termes d’inertie sont donc:

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} &= -u_e^2 f'(\eta) f''(\eta) \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}, \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e^2 f''(\eta) (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \frac{\delta'(x)}{\delta(x)}.\end{aligned}\quad (4.51)$$

Nous avons finalement tous les termes à introduire dans l’équation de quantité de mouvement en x ,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.52)$$

soit:

$$\begin{aligned} -u_e^2 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} f(\eta) f''(\eta) &= \nu u_e \frac{1}{\delta^2(x)} f'''(\eta) , \\ f'''(\eta) + \frac{u_e}{\nu} \delta(x) \delta'(x) f(\eta) f''(\eta) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Finalement, comme on a $\delta(x)\delta'(x) = \frac{x}{Re}$, on obtient bien une équation différentielle ordinaire (EDO) pour $f(\eta)$:

$$f'''(\eta) + f(\eta) f''(\eta) = 0 . \quad (4.54)$$

Il s'agit d'une EDO non-linéaire et du 3ème ordre. (Remarquons, en passant, que si nous n'avions pas utilisé le facteur "2" dans la définition de δ , nous aurions obtenu un facteur "2" dans l'EDO: $f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$, forme moins "canonique" que celle ci-dessus, mais tout aussi valable.) L'EDO obtenue requiert trois conditions aux limites. On a: $u = 0$ à la paroi, ce qui requiert d'avoir $f'(0) = 0$. On a aussi: $v = 0$ à la paroi, ce qui requiert $f(0) = 0$. La paroi est donc une ligne de courant: $\psi = 0$ à la paroi. Finalement, le raccordement avec l'écoulement Euler requiert d'avoir: $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$. On a donc:

$$f(0) = 0 , \quad f'(0) = 0 , \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 . \quad (4.55)$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. Elle doit donc être résolue par intégration numérique. Pour ce faire, on la réécrit sous forme d'un système de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre:

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= g(\eta) , \\ g'(\eta) &= h(\eta) , \\ h'(\eta) &= -f(\eta) h(\eta) . \end{aligned} \quad (4.56)$$

Le système est donc de la forme $ds/d\eta = \mathbf{F}(\mathbf{s})$ avec $\mathbf{s} = (f, g, h)^T$ et $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (g, h, -fh)$. Pour l'intégrer numériquement, on utilise, par exemple, un schéma de Runge-Kutta. On débute l'intégration en $\eta = 0$, avec $f(0) = 0$, $g(0) = f'(0) = 0$ et $h(0) = f''(0)$ deviné (méthode de "tir", "shooting" method). On intègre numériquement jusqu'au grandes valeurs de η , et on examine alors $f'(\eta)$. On itère la procédure sur le choix de $f''(0)$ jusqu'à ce que l'on obtienne bien que $f'(\eta) \rightarrow 1$ lorsque $\eta \rightarrow \infty$. On obtient ainsi $f''(0) = 0.4696$.

Le profil de contrainte de cisaillement est

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{u_e}{\delta} f''(\eta) . \quad (4.57)$$

On a aussi, pour la vitesse v :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) = 1.22 . \quad (4.58)$$

Etant donné qu'il y a le terme multiplicatif $\delta'(x)$, la vitesse v à la frontière de la couche limite est effectivement petite; mais néanmoins non nulle. Ceci provient du fait que,

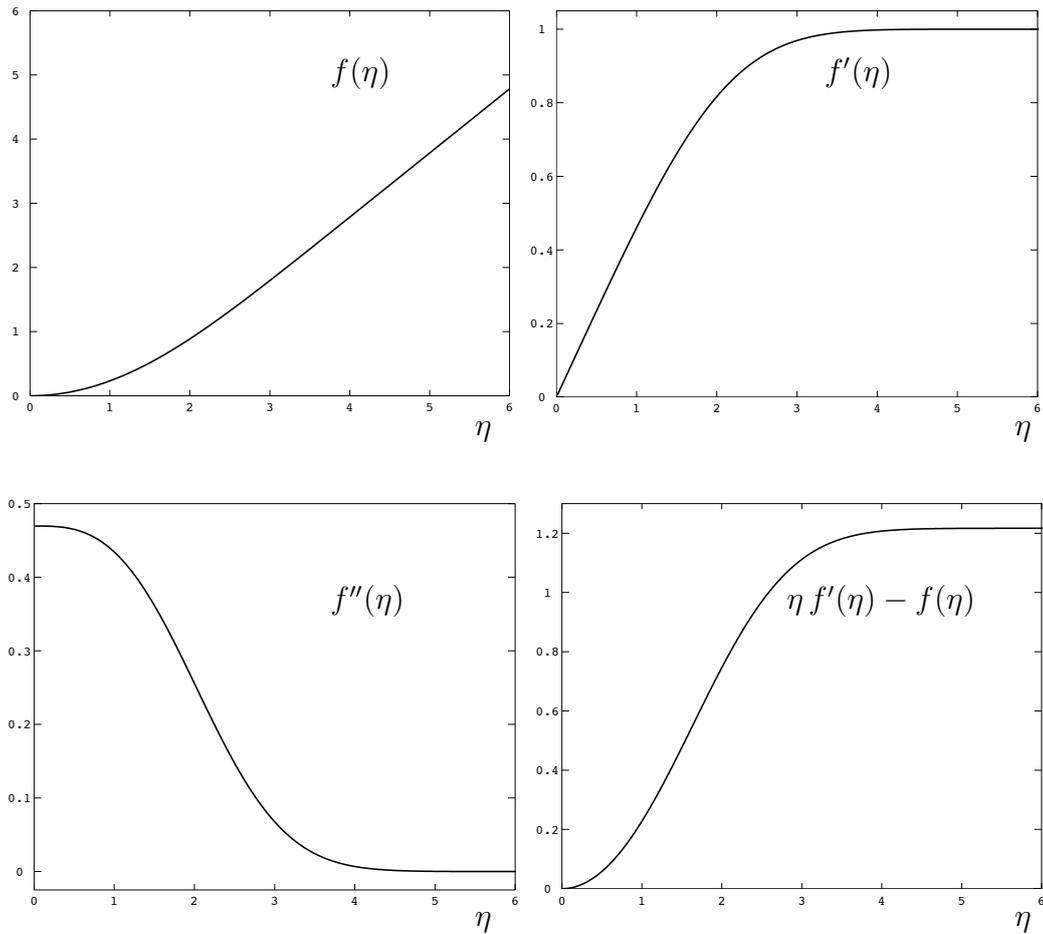


Figure 4.3: Solution de Blasius pour la couche limite avec u_e constant: profils de fonction de courant, $\psi/(u_e \delta) = f(\eta)$, de vitesse, $u/u_e = f'(\eta)$, de contrainte de cisaillement, $\tau \delta/(\mu u_e) = f''(\eta)$ et de vitesse $v/(u_e \delta') = \eta f'(\eta) - f(\eta)$.

comme la couche limite grandit lentement en x , il faut bien, par conservation de la masse, qu'il y ait un petit "débit de fuite".

Les profils de fonction de courant, $\psi/(u_e \delta) = f(\eta)$, de vitesse, $u/u_e = f'(\eta) = g(\eta)$, de contrainte de cisaillement, $\tau \delta/(\mu u_e) = f''(\eta) = g'(\eta) = h(\eta)$ et de vitesse $v/(u_e \delta') = \eta f'(\eta) - f(\eta)$ ainsi obtenus sont présentés à la Fig. 4.3.

Qu'en est-il du frottement à la paroi? La contrainte de cisaillement à la paroi, τ_w , est:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \nu \frac{u_e}{\delta} f''(0) = \frac{u_e^2}{2} f''(0) \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2}. \quad (4.59)$$

Le coefficient adimensionnel de frottement local, $C_f(x)$, est donc:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2/2} = f''(0) \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 0.664 \left(\frac{u_e x}{\nu} \right)^{-1/2} = 0.664 Re^{-1/2} . \quad (4.60)$$

La force D , par unité de largeur, exercée par l'écoulement sur la plaque (i.e., la force de traînée: "Drag" en anglais), et correspondant à la partie de la plaque entre $x = 0$ à $x = X$ est obtenue par intégration:

$$D(X) = \int_0^X \tau_w(x) dx = \frac{\rho u_e^2}{2} f''(0) \int_0^X \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} dx = \frac{u_e^2}{2} 2 f''(0) X \left(\frac{u_e X}{2\nu} \right)^{-1/2} . \quad (4.61)$$

Le coefficient de frottement moyen est donc:

$$C_{f,m}(X) = \frac{D(X)}{X \rho u_e^2/2} = 2 f''(0) \left(\frac{u_e X}{2\nu} \right)^{-1/2} = 1.328 \left(\frac{u_e X}{\nu} \right)^{-1/2} = 1.328 Re^{-1/2} . \quad (4.62)$$

Il est clair qu'on a aussi, par définition de la moyenne, que

$$C_{f,m}(X) = \frac{1}{X} \int_0^X C_f(x) dx . \quad (4.63)$$

Finalement, on note aussi que, dans le cas de la couche limite avec u_e constant, $C_{f,m} = 2 C_f$.

4.4 Epaisseurs de la couche limite

Comme expliqué précédemment, la grandeur δ n'est pas l'épaisseur de la couche limite. C'est un ordre de grandeur de cette épaisseur. Il est difficile de "définir" l'épaisseur de la couche limite: en effet, le profil de vitesse est une fonction continue qui tend asymptotiquement vers u_e . On parle souvent d'épaisseur à 99% . C'est simplement la distance à la paroi telle que $u = 0.99 u_e$, pour laquelle on a: $\eta = 3.47$. On a donc

$$\frac{\delta_{0.99}}{x} = 3.47 \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 4.91 Re^{-1/2} . \quad (4.64)$$

Si on considère plutôt $u = 0.95 u_e$ comme mesure de l'épaisseur de la couche limite, on obtient $\eta = 2.77$ et donc

$$\frac{\delta_{0.95}}{x} = 2.77 \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 3.92 Re^{-1/2} . \quad (4.65)$$

Par contre, si on considère $u = 0.999 u_e$, on obtient $\eta = 4.25$ et donc

$$\frac{\delta_{0.999}}{x} = 4.25 \left(\frac{u_e x}{2\nu} \right)^{-1/2} = 6.02 Re^{-1/2} . \quad (4.66)$$

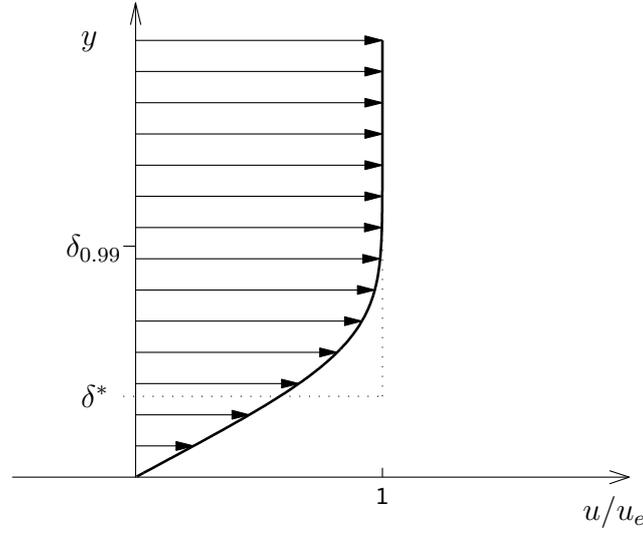


Figure 4.4: Concept d'épaisseur de déplacement, δ^* , pour une couche limite.

Le concept d'épaisseur de couche limite est donc fort peu précis. Un concept beaucoup plus précis est le concept d'épaisseur de déplacement, δ^* . C'est la distance à la paroi telle que le débit du profil de vitesse incluant la couche limite soit le même que le débit sans couche limite pour une paroi "déplacée" de l'épaisseur δ^* , voir Fig. 4.4.

On a donc, pour tout $\zeta \gg \delta$:

$$\int_0^\zeta u \, dy = (\zeta - \delta^*) u_e = u_e \int_0^\zeta dy - u_e \delta^* , \quad (4.67)$$

et donc:

$$\delta^* = \int_0^\zeta \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy . \quad (4.68)$$

Ecrire sous cette forme, l'intégrale est clairement rapidement convergente. On écrit en fait souvent:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (4.69)$$

où l'infini sous-entend toute grandeur $\zeta \gg \delta$. Pour la couche limite avec u_e constant, on obtient:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) \frac{dy}{\delta} = \int_0^\infty (1 - f'(\eta)) \, d\eta = 1.217 , \quad (4.70)$$

et donc:

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.721 \left(\frac{u_e x}{\nu} \right)^{-1/2} = 1.721 Re^{-1/2} . \quad (4.71)$$

Finalement, pour les couches limites, on définit aussi l'épaisseur de quantité de mouvement, θ (qui s'avérera très utile dans la formulation intégrale des équations de la couche limite, voir plus loin):

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy . \quad (4.72)$$

Pour la couche limite avec u_e constant, on obtient:

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \frac{dy}{\delta} = \int_0^\infty f'(\eta) (1 - f'(\eta)) d\eta = 0.470 , \quad (4.73)$$

et donc:

$$\frac{\theta}{x} = 0.664 \left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{-1/2} = 0.664 Re^{-1/2} . \quad (4.74)$$

Pour la couche limite avec u_e constant, on a donc:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{C_{f,m}}{2} . \quad (4.75)$$

On a en fait obtenu ici la signification "physique" de l'épaisseur de quantité de mouvement dans le cas avec u_e constant. En effet la relation,

$$C_{f,m}(X) = \frac{D(X)}{X \rho u_e^2 / 2} = 2 \frac{\theta(X)}{X} \quad (4.76)$$

entraîne l'égalité:

$$D(X) = \rho u_e^2 \theta(X) . \quad (4.77)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement, $\theta(X)$, correspond donc à la force de traînée normalisée, $D/(\rho u_e^2)$, exercée par la plaque sur le fluide entre $x = 0$ et $x = X$. De même, pour tout couple (X_1, X_2) , la différence, $\theta(X_2) - \theta(X_1)$, correspond à la force de traînée normalisée exercée par la plaque sur le fluide entre $x = X_1$ et $x = X_2$. Le déficit de quantité de mouvement de la couche limite entre X_1 et X_2 est donc $\theta(X_2) - \theta(X_1)$, et ce déficit correspond à la force exercée par le milieu extérieur (ici, la plaque) sur le système (ici le fluide).

4.5 Approche intégrale pour le cas général

Pour les couches limites laminares, il y a peu de solutions exactes, i.e., de solutions de similitude de la forme $u/u_e = g(\eta)$ avec $\eta = y/\delta(x)$ et $\delta(x) = x (u_e(x) x/\nu)^{-1/2}$. En fait, il y a (1) la solution de Blasius développée ci-dessus pour le cas u_e uniforme, et (2) la solution de Falkner-Skan pour le cas $u_e = C x^\alpha$ (voir cours *Aérodynamique*) et dont la solution de Blasius n'est en fait que le cas particulier $\alpha = 0$. Comme il n'y a pas de solution exacte pour les autres cas (que l'on rencontre pourtant dans la réalité), il est

nécessaire de développer une approche simplifiée et qui permette encore d'obtenir des grandeurs globales telles que δ^* , θ , C_f , $C_{f,m}$.

L'approche intégrale de von Karman constitue une telle approche. Elle peut s'obtenir, soit par intégration des équations de la couche limite en y , de la paroi jusqu'à la zone de raccordement avec l'écoulement irrotationnel extérieur, soit à partir de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement appliquée à un volume de contrôle différentiel tel que présenté à la Fig. 4.5. Nous considérons ici la seconde approche car on peut l'aborder de manière plus physique et plus simple. Nous considérons le cas général des écoulements incompressibles ou compressibles.

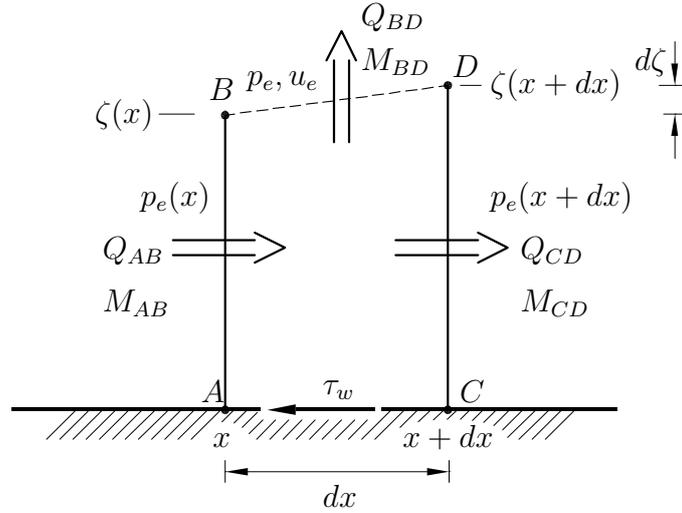


Figure 4.5: Approche intégrale de von Karman: volume de contrôle différentiel.

La conservation de la masse demande que le débit sortant soit égal au débit entrant:

$$Q_{CD} + Q_{BD} - Q_{AB} = 0 . \quad (4.78)$$

On a:

$$Q_{AB} = \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x \quad (4.79)$$

et:

$$Q_{CD} = \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_{x+dx} = \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x + dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x . \quad (4.80)$$

On obtient dès lors, pour le débit sortant de la couche limite par sa "frontière" extérieure:

$$Q_{BD} = -dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u dy \right) \Big|_x . \quad (4.81)$$

La conservation de quantité de mouvement demande que la différence entre le flux sortant et le flux entrant soit égale à la somme des forces subies par le fluide. On considère la composante en x de la quantité de mouvement. On doit donc avoir l'égalité:

$$M_{CD} + M_{BD} - M_{AB} = F_{AB} - F_{CD} + F_{BD} - F_{AC} . \quad (4.82)$$

Pour les intégrales de flux, on obtient:

$$M_{AB} = \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x , \quad (4.83)$$

$$M_{CD} = \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_{x+dx} = \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x + dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x , \quad (4.84)$$

$$M_{BD} = u_e Q_{BD} = -u_e dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \Big|_x . \quad (4.85)$$

Pour les forces agissant sur le volume de contrôle, on obtient:

$$F_{AB} = (p_e \zeta) \Big|_x , \quad (4.86)$$

$$F_{CD} = (p_e \zeta) \Big|_{x+dx} = (p_e \zeta) \Big|_x + dx \frac{d}{dx} (p_e \zeta) \Big|_x . \quad (4.87)$$

$$F_{BD} = p_e d\zeta \Big|_x = p_e dx \frac{d\zeta}{dx} \Big|_x \quad (4.88)$$

$$F_{AC} = dx \tau_w \Big|_x . \quad (4.89)$$

Finalement, il vient:

$$\begin{aligned} dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) \Big|_x - u_e dx \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \Big|_x &= -dx \frac{d}{dx} (p_e \zeta) \Big|_x + p_e dx \frac{d\zeta}{dx} \Big|_x - dx \tau_w \Big|_x , \\ &= -dx \zeta \frac{dp_e}{dx} \Big|_x - dx \tau_w \Big|_x . \end{aligned} \quad (4.90)$$

On a donc établi que, pour tout x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u^2 dy \right) &= u_e \frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) - \zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w ; , \\ &= \frac{d}{dx} \left(u_e \int_0^\zeta \rho u dy \right) - \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \frac{du_e}{dx} - \zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w , \end{aligned} \quad (4.91)$$

résultat que l'on réécrit sous la forme:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\zeta \rho u (u - u_e) dy \right) + \left(\int_0^\zeta \rho u dy \right) \frac{du_e}{dx} = -\zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w . \quad (4.92)$$

Dans le cas général (écoulements incompressibles ou compressibles), l'épaisseur de déplacement est définie à partir de la relation:

$$\int_0^{\zeta} \rho u dy = \rho_e u_e (\zeta - \delta^*) , \quad (4.93)$$

qui donne:

$$\delta^* = \int_0^{\zeta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy . \quad (4.94)$$

L'équation (4.92) devient donc:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u (u - u_e) dy \right) + \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} (\zeta - \delta^*) = -\zeta \frac{dp_e}{dx} - \tau_w . \quad (4.95)$$

Comme $dp_e/dx + \rho_e u_e du_e/dx = 0$ en dehors de la couche limite (Euler), les termes en ζ se simplifient. Il reste:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\zeta} \rho u (u - u_e) dy \right) - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \delta^* = -\tau_w . \quad (4.96)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement est définie, dans le cas général, par:

$$\theta = \int_0^{\zeta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy . \quad (4.97)$$

L'équation intégrale de von Karman est finalement obtenue comme:

$$\frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2 \theta) + \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} \delta^* = \tau_w . \quad (4.98)$$

Le coefficient de frottement étant défini par l'égalité:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2 / 2} , \quad (4.99)$$

la forme adimensionnelle de l'équation intégrale de von Karman s'écrit, pour le cas général, sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{\rho_e u_e^2} \frac{d}{dx} (\rho_e u_e^2) \theta + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta^* &= \frac{C_f}{2} , \\ \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} \theta + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2\theta + \delta^*) &= \frac{C_f}{2} . \end{aligned} \quad (4.100)$$

Le rapport $H \stackrel{\text{def}}{=} \delta^* / \theta$ constitue ce que l'on appelle le facteur de forme de la couche limite. On écrit donc aussi:

$$\frac{d\theta}{dx} + \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + (2 + H) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right) \theta = \frac{C_f}{2} . \quad (4.101)$$

Le cas des écoulements incompressibles est obtenu en prenant $\rho_e = \rho$ constant. On a alors, plus simplement:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2\theta + \delta^*) &= \frac{C_f}{2}, \\ \frac{d\theta}{dx} + (2 + H) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \theta &= \frac{C_f}{2}.\end{aligned}\quad (4.102)$$

Dans le cas de la couche limite avec u_e constant, l'équation intégrale se réduit simplement à $d\theta/dx = C_f/2$: le taux d'augmentation de l'épaisseur de quantité de mouvement est alors directement proportionnel au coefficient de frottement. L'intégration de l'équation de von Karman donne alors aussi: $\theta/x = C_{f,m}/2$ (exercice).

4.6 Couches limites thermiques

Considérons le cas général en écoulements incompressible. L'équation de l'énergie s'exprime alors en terme d'énergie interne, U , avec $dU = c(T) dT$:

$$\begin{aligned}\rho \frac{DU}{Dt} &= \tau_{ji} d_{ij} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \\ &= 2\mu d_{ji} d_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right).\end{aligned}\quad (4.103)$$

Au sein de la couche limite, celle-ci se réduit à

$$\rho \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right).\quad (4.104)$$

En toute généralité, μ , k et c sont fonctions de la température, T . Si on multiplie l'équation de quantité de mouvement,

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right),\quad (4.105)$$

par u , on obtient:

$$\rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) = -u \frac{dp_e}{dx} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).\quad (4.106)$$

Si on additionne cette équation avec celle de l'énergie interne, on obtient l'équation pour l'énergie interne totale, $U_0 = U + u^2/2$:

$$\begin{aligned}
\rho \left(u \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) &= -u \frac{dp_e}{dx} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\
&= -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\
&= -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\
&= -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{k}{\mu c} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right). \tag{4.107}
\end{aligned}$$

On se souvient du nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\mu c}{k}$. Le coefficient de diffusivité thermique, $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ est donc aussi $\alpha = \frac{\nu}{Pr}$. Bien que μ , k et c sont tous fonctions de T , le nombre de Prandtl l'est relativement peu pour les gaz: en effet, c varie peu avec la température, μ et k varient significativement (ils croissent) mais presque en proportion. Par exemple, à pression atmosphérique, l'air a $Pr = 0.71$ à 20°C et $Pr = 0.69$ à 100°C . Par contre, pour les liquides, le nombre de Prandtl varie rapidement avec la température: en effet, c varie peu, la viscosité μ décroît rapidement et k croît lentement. Par exemple, l'eau a $Pr = 6.9$ à 20°C , $Pr = 3.5$ à 50°C et $Pr = 2.2$ à 80°C . L'approximation consistant à considérer que Pr n'est pas fonction de T est donc souvent très bonne pour les gaz. Elle l'est beaucoup moins pour les liquides, sauf, bien sûr, lorsque les variations de température pour le problème considéré sont faibles.

Pour la suite, on considère uniquement les cas avec u_e constant, et donc:

$$\rho \left(u \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{Pr} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right). \tag{4.108}$$

4.6.1 cas $Pr = 1$ et u_e constant

Nous examinons ici plus en détail le cas avec u_e constant et $Pr = 1$. L'équation (4.108) se simplifie alors en:

$$\rho \left(u \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U_0}{\partial y} \right). \tag{4.109}$$

En comparant l'équation (4.105) avec $u_e = 0$ et l'équation (4.109), on constate que les grandeurs u et U_0 satisfont la même équation. Il s'ensuit qu'il doit y avoir une relation linéaire entre les deux profils:

$$U_0 = Au + B. \tag{4.110}$$

Cette constatation constitue la relation de Crocco en couche limite incompressible. A noter que, tant que $Pr = 1$, elle est même valable pour des fluides à grandeurs non constantes. Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Considérons d'abord le cas d'une couche limite avec paroi à température constante: $T|_{y=0} = T_w = \text{constante}$. On obtient alors que $B = U_w$. Le raccordement avec l'écoulement hors couche limite donne aussi:

$$U_{0e} = A u_e + B = A u_e + U_w, \quad (4.111)$$

et donc:

$$A = \frac{(U_{0e} - U_w)}{u_e} = \frac{(U_e - U_w) + u_e^2/2}{u_e}. \quad (4.112)$$

La relation de Crocco devient donc, finalement:

$$\begin{aligned} U_0 - U_w &= (U_{0e} - U_w) \frac{u}{u_e}, \\ (U - U_w) + \frac{u^2}{2} &= \left((U_e - U_w) + \frac{u_e^2}{2} \right) \frac{u}{u_e}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

La signification physique de la constante A est facilement obtenue. En effet, par différentiation de la relation de Crocco, on obtient:

$$\frac{\partial U}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} = c \frac{\partial T}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} = A \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.114)$$

A la paroi, cette relation donne:

$$c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = A \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (4.115)$$

et donc, puisque $Pr = 1$,

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} &= A \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \\ -q_w &= A \tau_w. \end{aligned} \quad (4.116)$$

La constante A constitue donc le rapport entre le flux de chaleur à la paroi et la contrainte de cisaillement à la paroi.

Dans le cas où les grandeurs caractéristiques du fluide, μ , k et c sont constantes, l'écoulement est donné par la solution de similitude exacte de Blasius, $u/u_e = f'(\eta)$. Puisque $dU = c dT$ dans ce cas, la relation de Crocco devient:

$$c (T - T_w) + \frac{u^2}{2} = \left(c (T_e - T_w) + \frac{u_e^2}{2} \right) \frac{u}{u_e}. \quad (4.117)$$

En divisant par $u_e^2/2$, on obtient

$$\frac{c (T - T_w)}{u_e^2/2} + \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 = \left(\frac{c (T_e - T_w)}{u_e^2/2} + 1 \right) \frac{u}{u_e}. \quad (4.118)$$

Le profil de température est donc obtenu comme:

$$\frac{c (T - T_w)}{u_e^2/2} = \left(\frac{c (T_e - T_w)}{u_e^2/2} + 1 \right) f'(\eta) - (f'(\eta))^2 . \quad (4.119)$$

Un autre cas est le cas d'une couche limite sans transfert de chaleur à la paroi (cas adiabatique): $q_w = 0$ et donc $A = 0$, et donc $U_0 = \text{constante}$. L'énergie interne totale est constante au travers de la couche limite. Ce cas correspond effectivement à une solution particulière de l'équation 4.109. On a donc

$$U + \frac{u^2}{2} = U_e + \frac{u_e^2}{2} , \quad (4.120)$$

et donc

$$U - U_e = \frac{u_e^2}{2} \left(1 - \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 \right) . \quad (4.121)$$

Dans le cas avec c constant, cette relation fournit le profil de température:

$$\frac{c (T - T_e)}{u_e^2/2} = 1 - (f'(\eta))^2 . \quad (4.122)$$

En particulier, la température de paroi est telle que:

$$\frac{c (T_w - T_e)}{u_e^2/2} = 1 . \quad (4.123)$$

4.6.2 cas Pr général, dissipation négligeable, u_e et T_w constants

On considère ici les fluides dont le nombre de Prandtl est différent de l'unité. La relation de Crocco n'est donc plus satisfaite. Cependant, si on considère les écoulements pour lesquels le terme de dissipation visqueuse au sein de la couche limite est négligeable par rapport au terme de conduction de chaleur, on peut encore obtenir des solutions exactes.

L'ordre de grandeur des termes de dissipation visqueuse et de conduction de chaleur est:

$$\mu \left(\frac{u_e}{\delta} \right)^2 \quad \text{et} \quad k \frac{|T_e - T_w|}{\delta_T^2} \quad (4.124)$$

avec δ_T l'épaisseur caractéristique de la couche limite thermique. Pour que la dissipation visqueuse soit négligeable par rapport à la conduction de chaleur, il faut donc que:

$$\mu \left(\frac{u_e}{\delta} \right)^2 \ll k \frac{|T_e - T_w|}{\delta_T^2} , \quad (4.125)$$

ou encore:

$$\frac{\mu u_e^2}{k |T_e - T_w|} \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 = \frac{\mu c}{k} \frac{u_e^2}{c |T_e - T_w|} \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 = Pr Ec \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 \ll 1 , \quad (4.126)$$

avec Ec le nombre de Eckert. On a aussi déjà obtenu, par considérations physiques (comparaison entre les termes de convection et de diffusion de u), que $\delta(x)$ varie comme $x / \left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{1/2}$. De la même manière, on obtient, par comparaison entre les termes de convection et de diffusion de T , que $\delta_T(x)$ varie comme $x / \left(\frac{u_e x}{\alpha}\right)^{1/2}$. On obtient donc que

$$\frac{\delta_T}{\delta} \approx \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{1/2} = \frac{1}{Pr^{1/2}}. \quad (4.127)$$

La condition adimensionnelle pour que le terme de dissipation visqueuse soit négligeable par rapport au terme de conduction de chaleur est donc, finalement, que $Ec \ll 1$.

Dans ce cas, l'équation de l'énergie se réduit à:

$$\rho \left(u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (4.128)$$

Dans le cas d'un fluide avec propriétés constantes, cette équation devient:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (4.129)$$

Dans le cas d'une couche limite avec température de paroi, T_w , constante, on peut espérer obtenir une solution de similitude de la forme:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \Theta(\eta). \quad (4.130)$$

En développant les différents termes (à faire en exercice), l'équation de l'énergie se réduit à l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\Theta''(\eta) + Pr f(\eta) \Theta'(\eta) = 0. \quad (4.131)$$

Puisque la fonction $f(\eta)$ est une fonction connue (Blasius), il s'agit en fait d'une EDO du premier ordre pour $G(\eta) = \Theta'(\eta)$. Les conditions aux limites sont $\Theta(0) = 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 1$. Cette équation s'écrit aussi, en utilisant un facteur d'intégration:

$$\left(G(\eta) \exp \left(Pr \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta \right) \right)' = 0, \quad (4.132)$$

dont la solution est

$$G(\eta) \exp \left(Pr \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta \right) = C. \quad (4.133)$$

Intégrée une fois de plus, cette relation nous donne:

$$\Theta(\eta) = C \int_0^\eta \exp \left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta \right) d\xi + D. \quad (4.134)$$

Les conditions aux limites déterminent les constantes d'intégration. Le profil de température finalement obtenu est:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \Theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta\right) d\xi}{\int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta\right) d\xi}. \quad (4.135)$$

La figure 4.6 montre les profils de température obtenus pour différentes valeurs de Pr . On vérifie bien que, au plus le nombre de Prandtl est grand, au plus l'épaisseur de la couche limite thermique, δ_T , est petite par rapport à l'épaisseur de la couche limite de vitesse, δ . On peut aussi vérifier, a posteriori, le résultat attendu que $\delta_T/\delta \approx 1/\sqrt{Pr}$.

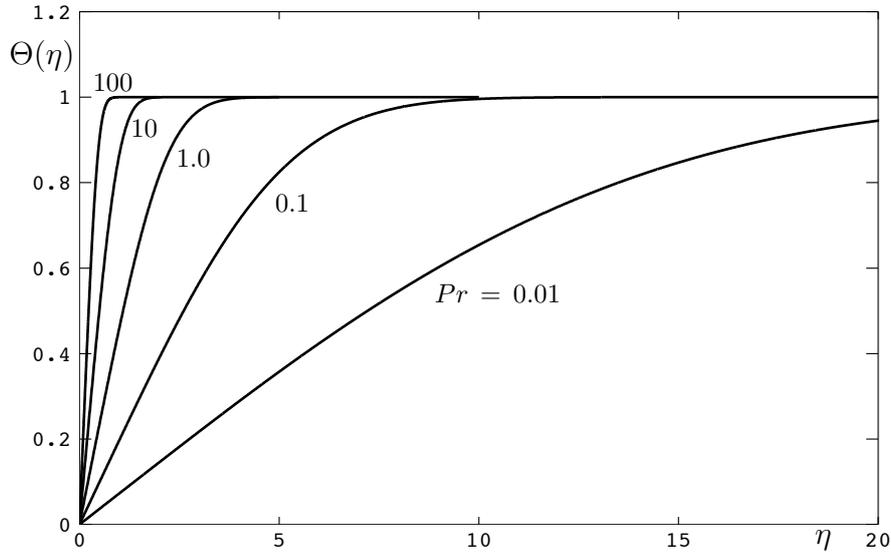


Figure 4.6: Profils de température pour le cas Pr général, dissipation négligeable, u_e et T_w constants.

Comme elles sont valables pour tout Pr avec $Ec \ll 1$, on peut réexaminer le cas $Pr = 1$ et le comparer avec la solution exacte de Crocco (qui, elle, ne néglige pas la dissipation visqueuse et est donc aussi valable pour de grandes valeurs de Ec). Avec $Pr = 1$, l'équation différentielle 4.131 se réduit à

$$\Theta''(\eta) + f(\eta) \Theta'(\eta) = 0. \quad (4.136)$$

En comparant cette équation différentielle avec celle qui a été écrite pour $f(\eta)$, Eq. (4.54), dont les conditions aux limites sont $f'(0) = 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$, on obtient immédiatement la solution: $\Theta(\eta) = f'(\eta)$ (car même EDO et même conditions aux limites). On obtient donc:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \frac{u}{u_e} = f'(\eta). \quad (4.137)$$

Ce résultat est à comparer avec le résultat exact de Crocco pour $Pr = 1$, Eq. (4.117). Cette concordance est logique: en effet, lorsque $Ec \ll 1$, on a $u_e^2 \ll c (T_e - T_w)$ et la relation de Crocco devient essentiellement:

$$c (T - T_w) \approx c (T_e - T_w) \frac{u}{u_e}, \quad (4.138)$$

qui correspond bien au résultat (4.137).

Retournons au cas Pr général et $Ec \ll 1$. Le flux de chaleur à la paroi est aussi obtenu:

$$q_w = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -k (T_e - T_w) \Theta'(0) \frac{1}{\delta(x)} = -k (T_e - T_w) \Theta'(0) \left(\frac{u_e}{2\nu x} \right)^{1/2}. \quad (4.139)$$

En terme adimensionnel, on définit le nombre de Nusselt:

$$Nu = \frac{q_w x}{k (T_w - T_e)} = \Theta'(0) \frac{x}{\delta(x)} = \frac{\Theta'(0)}{\sqrt{2}} \left(\frac{u_e x}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{\Theta'(0)}{\sqrt{2}} Re^{1/2}. \quad (4.140)$$

Le profil de température donne aussi:

$$\Theta'(0) = \frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta\right) d\xi}. \quad (4.141)$$

Certaines valeurs numériques sont reprises dans le tableau ci-dessous. Une approximation, également rapportée dans le tableau pour comparaison, est donnée par la relation:

$$\frac{\Theta'(0)}{\sqrt{2}} \approx 0.332 Pr^{1/3}. \quad (4.142)$$

L'approximation donne alors:

$$Nu \approx 0.332 Pr^{1/3} Re^{1/2} \quad (4.143)$$

A noter que cette approximation n'est pas si bonne que cela pour les fluides avec $Pr < 0.1$.

Pr	$\Theta'(0)/\sqrt{2}$	$0.332 Pr^{1/3}$
0.01	0.0516	0.0715
0.1	0.140	0.154
1.0	0.332	0.332
10	0.728	0.715
100	1.57	1.54

Au lieu du nombre de Nusselt, on utilise souvent le nombre de Stanton:

$$St = \frac{q_w}{\rho u_e c (T_w - T_e)}. \quad (4.144)$$

Ces nombres sont liés. En effet:

$$St = \frac{q_w x}{k (T_w - T_e)} \frac{\mu}{\rho u_e x} \frac{k}{\mu c} = Nu Re^{-1} Pr^{-1} . \quad (4.145)$$

Avec l'approximation ci-dessus, on obtient:

$$St \approx 0.332 Pr^{-2/3} Re^{-1/2} . \quad (4.146)$$

Si on compare ce résultat avec celui obtenu pour le coefficient de frottement, Eq. (4.60), on obtient:

$$St \approx Pr^{-2/3} \frac{C_f}{2} . \quad (4.147)$$

Cette égalité constitue "l'analogie de Reynolds": pour les couches limites avec u_e constant, Pr général (mais $Ec \ll 1$) et T_w constant, le coefficient de transfert de chaleur exprimé en nombre de Stanton et le coefficient de frottement sont dans un rapport bien déterminé, et qui ne dépend que du nombre de Prandtl du fluide. Cette analogie s'avère très utile en ingénierie. Elle permet, par exemple, de calculer le transfert de quantité de mouvement à la paroi (i.e., le frottement) à partir d'une mesure du transfert de chaleur à la paroi. Elle peut aussi être utilisée de façon inverse. Bien que l'analogie ne soit strictement valable qu'en couche limite avec u_e constant, on l'utilise aussi souvent, en ingénierie, comme "approximation" dans le cas de couches limites avec u_e non constant.

Chapitre 5

Convection naturelle

L'étude de la convection le long d'une plaque chaude suspendue verticalement dans l'air retient ici notre intérêt, elle met en jeu la théorie de couche limite pour un écoulement laminaire permanent. L'élévation de l'air le long des parois d'un radiateur est un exemple typique de convection naturelle sous l'effet de la poussée d'Archimède, qui s'oppose à la gravité.

Tout d'abord, nous allons supposer que la pression est globalement hydrostatique en tout point de la plaque

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = -\rho_0 g \quad (5.1)$$

ou encore

$$p(x, y) = -\rho_0 g y \quad (5.2)$$

Il s'agit d'une hypothèse équivalente à l'approximation de Boussinesq (1903), qui revient à ne considérer les variations de densité du fluide que lorsqu'elles multiplient la gravité, soit dans le terme de la poussée d'Archimède, dans le cas présent. En effet, comme l'a parfaitement exprimé Boussinesq, la variation de masse volumique est précisément la cause du phénomène de convection observé. Par la suite, nous verrons qu'il n'est pas nécessaire d'introduire une telle hypothèse et que la pression hydrostatique dans la couche mince le long de la plaque chaude se déduit directement de l'hypothèse que la convection se fait sur une couche mince le long de la plaque.

Suite à un développement en série de Taylor de $\rho(p, T)\rho_0^{-1}$, la conservation de la quantité de mouvement le long de la plaque verticale est donnée par

$$\rho_0(1 - \underbrace{\beta(T - T_0)}_{\ll 1}) \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\rho_0 g} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho_0(1 - \beta(T - T_0))g$$

$$\rho_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_0 \beta(T - T_0)g$$

où $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ est le coefficient de dilatation thermique du fluide.

Le champ de pression est donc fixé par un champ de pression hydrostatique.

5.1 Une étape préliminaire : la convection forcée...

Une propriété intéressante de la convection forcée est qu'il est possible de découpler le problème de l'écoulement, du problème thermique. C'est pourquoi nous l'abordons avant de considérer la convection naturelle.

Alors qu'à une grande distance de la paroi les effets visqueux sont supposés négligeables (écoulement irrotationnel), à proximité de celle-ci, il n'en est rien. Le mouvement relatif entre la plaque et le fluide engendre l'existence d'un tourbillon. Les effets visqueux peuvent même être dominants par rapport aux termes non linéaires d'inertie dans un voisinage proche de la paroi. On définit ainsi la frontière de la couche limite de vitesse comme le lieu géométrique pour lequel les ordres de grandeur des effets d'inertie et des effets visqueux sont identiques. Négliger les effets visqueux près de la plaque est incompatible avec le modèle du fluide visqueux qui stipule que le fluide colle à la paroi.

L'épaisseur caractéristique de la couche limite, d'un ordre de grandeur supposé constant dans une zone suffisamment éloignée du bord d'attaque ($y = 0$) et des turbulences, est largement inférieure à la longueur verticale caractéristique. Le modèle de la couche limite est ainsi basé sur l'hypothèse $\delta \ll Y$ (Fig. 5.1).

En réalité, l'épaisseur de la couche limite augmente de manière monotone (et non linéaire) dans la direction verticale, d'où l'intérêt de l'analyse dans la zone locale. Le frottement visqueux au niveau de la paroi contribue, en effet, au ralentissement de l'écoulement du fluide. Il est de plus en plus important au fur et à mesure que la portion de la paroi longée augmente, la couche limite est ainsi de moins en moins fine.

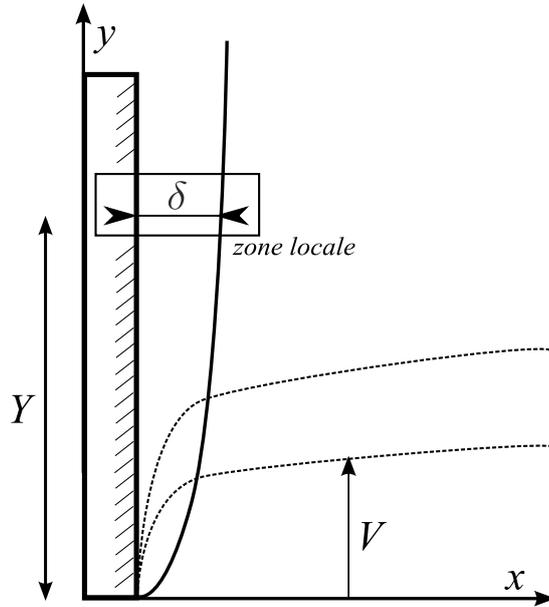


Figure 5.1: Couche limite et écoulement externe incompressible et irrotationnel.

Par égalisation des ordres de grandeur des termes d'inertie et visqueux, on montre que l'hypothèse de la couche limite est vérifiée si le nombre de Reynolds Re_Y , basé sur la longueur verticale caractéristique, est grand. On impose en effet, en terme d'ordres de grandeur

$$\rho \frac{V^2}{Y} = \mu \frac{V}{\delta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta^2}{Y^2} = \frac{\mu}{\rho V Y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{Y} = Re_Y^{-1/2} \quad (5.3)$$

Ce qui signifie que, plus on avance dans la direction verticale, plus le rapport entre la couche la limite et la longueur de la plaque diminue. Notons, au passage, que Re_Y doit être suffisamment grand pour que δ/Y soit petit, mais pas trop pour que l'écoulement ne devienne pas turbulent. Nous trouvons ainsi une valeur pour l'épaisseur de la couche limite de vitesse. Cette valeur n'est qu'une approximation (assez bonne) basée sur les ordres de grandeur. Notons aussi que dans la couche limite, l'un des deux termes de forces visqueuses de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est négligeable devant l'autre: $\mathcal{O}(\mu V/\delta^2) \gg \mathcal{O}(\mu V/Y^2)$.

Nous pouvons alors, avec l'hypothèse de la couche limite, valider l'approximation de Boussinesq

$$p(x, y) - p_0 = \underbrace{p(\delta, y) - p_0}_{\mathcal{O}(\rho V^2)} + \underbrace{(x - \delta) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=\delta}}_{\mathcal{O}\left(\rho \frac{V^2 \delta^2}{Y^2}\right) \ll \mathcal{O}(p(\delta, y))} \quad (5.4)$$

Suite aux simplifications de l'équation verticale de conservation de la quantité de mouvement, on observe que la variation de pression en y doit être d'un ordre de grandeur identique aux termes d'inertie (pour ne pas être négligée). Aussi, la variation de pression horizontale dans la couche limite est négligeable devant la pression hors de la couche limite.

Les équations de Prandtl (1904) sont applicables au sein de la couche limite, avec, en convection forcée, un gradient de pression vertical nul si l'écoulement extérieur est uniforme. A l'extérieur de la couche limite en revanche, les équations d'Euler (terme visqueux négligé) font légion.

Les grandeurs de références de ces deux modèles, x/δ pour Prandtl et x/Y pour Euler sont, conformément à la théorie de la couche limite, forts différentes. L'introduction d'une astuce mathématique est nécessaire au raccord des deux modèles, et donc à l'expression mathématique de l'écoulement au niveau de la couche limite. La variable ζ est introduite afin que

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{\zeta}{Y} = \frac{1}{Re^\alpha} \quad \text{avec } 0 < \alpha < 0.5 \quad , \text{ typiquement } 0.25 \quad (5.5)$$

Cette variable est donc d'un ordre de grandeur intermédiaire entre les distances verticale et horizontale et permet ainsi l'obtention de conditions limites identiques pour les deux modèles au lieu de raccord de ceux-ci

$$\lim_{x/\delta \rightarrow \infty} v\left(\frac{x}{\delta}, y\right) = \lim_{x/Y \rightarrow 0} v_e\left(\frac{x}{Y}, y\right) = v_e(0, y)$$

$$\lim_{x/\delta \rightarrow \infty} p\left(\frac{x}{\delta}, y\right) = \lim_{x/Y \rightarrow 0} p_e\left(\frac{x}{Y}, y\right) = p_e(0, y)$$

Cela permet de résoudre le problème de l'écoulement du fluide. La démarche est similaire pour le problème thermique; les effets conductifs sont négligeables devant les effets convectifs loin de la paroi alors qu'ils faut en tenir compte dans son voisinage immédiat. On définit la couche limite thermique δ_T comme le lieu géométrique où la conduction (diffusion de l'énergie) et la convection (transport de l'énergie) possèdent un ordre de grandeur identique. Remarquons que le terme de dissipations visqueuses ne joue aucun rôle dans la présente analyse dimensionnelle.

Par un raisonnement semblable à celui effectué antérieurement, mais sur la base de l'équation de la conservation de l'énergie cette fois, on trouve, après égalisation des ordres de grandeur des termes de transport et de diffusion de l'énergie,

$$\frac{\delta_T}{Y} = (Pr Re_Y)^{-1/2} \quad \text{et donc} \quad \frac{\delta_T}{\delta} = Pr^{-1/2} \quad (5.6)$$

On comprend alors aisément la raison pour laquelle l'huile est privilégiée comme lubrifiant pour de nombreuses applications. Le nombre de Prandtl de l'huile étant relativement

élevé ($\gg 1$), l'épaisseur de la couche limite thermique est faible, permettant uniquement à une petite fraction de l'huile, dont la viscosité diminue avec la température, de chauffer.

5.2 Nombre de Grashof

Revenons au problème de convection forcée. Nous n'imposons cette fois plus le déplacement du fluide, mais bien une force de volume, la gravité. Cet apport naturel se traduit, conformément à l'hypothèse (vérifiée) de Boussinesq, en un gradient de pression $-dp/dy = \beta g(T - T_0)$. On ne dispose dès lors plus de la vitesse caractéristique V , auparavant imposée.

Deux approches différentes permettent d'obtenir l'ordre de grandeur de cette vitesse verticale. La première consiste à dire que la flottabilité (poussée d'Archimède) est compensée par la friction. On se place dans la couche limite (δ petit), où le terme des frottements visqueux est non négligeable contrairement au terme d'inertie, conséquence de l'approche suivie.

$$\underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\ll V/\delta^2} = \beta g(T - T_0) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (5.7)$$

$$V = \frac{\beta g \Delta T \delta_T^2}{\nu} \quad (5.8)$$

L'épaisseur de la couche limite thermique est obtenue par égalisation des termes de conduction et de convection présents dans l'équation de l'énergie :

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} = \left(\frac{\nu \alpha}{\beta g \Delta T Y \delta_T^2} \right)^{1/2} = (Gr)^{-1/4} (Pr)^{-1/4} \quad (5.9)$$

$$\frac{\delta}{Y} = (Gr)^{-1/4} (Pr)^{1/4} \quad (5.10)$$

où Gr représente le nombre de Grashof (1822-1893), qui caractérise une convection libre, ce paramètre est identique pour deux convections libres dynamiquement identiques. Ce nombre est défini comme le produit des forces d'inertie par la force d'Archimède, divisé par le carré des forces visqueuses

$$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3}{\nu^2} \quad (5.11)$$

Dans une seconde approche, on considère que la flottabilité est compensée par l'inertie du fluide. Cela revient à dire que l'action de la flottabilité s'exerce dans une zone où

le terme visqueux est négligeable (hors couche limite, δ théoriquement, pour l'analyse dimensionnelle, très grand). On obtient

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \beta g (T - T_0) + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\ll V^2/Y} \quad (5.12)$$

$$V = \sqrt{\beta g \Delta T Y} \quad (5.13)$$

Définie ainsi, la vitesse caractéristique n'est pas du même ordre de grandeur que celui obtenu auparavant. L'épaisseur de la couche limite thermique est, elle aussi, différente

$$\frac{\delta_T}{Y} = \sqrt{\frac{\alpha}{VY}} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta g \Delta T Y^3} \right)^{1/4} = (Gr)^{-1/4} (Pr)^{-1/2} \quad (5.14)$$

$$\frac{\delta}{Y} = (Gr)^{-1/4} \quad (5.15)$$

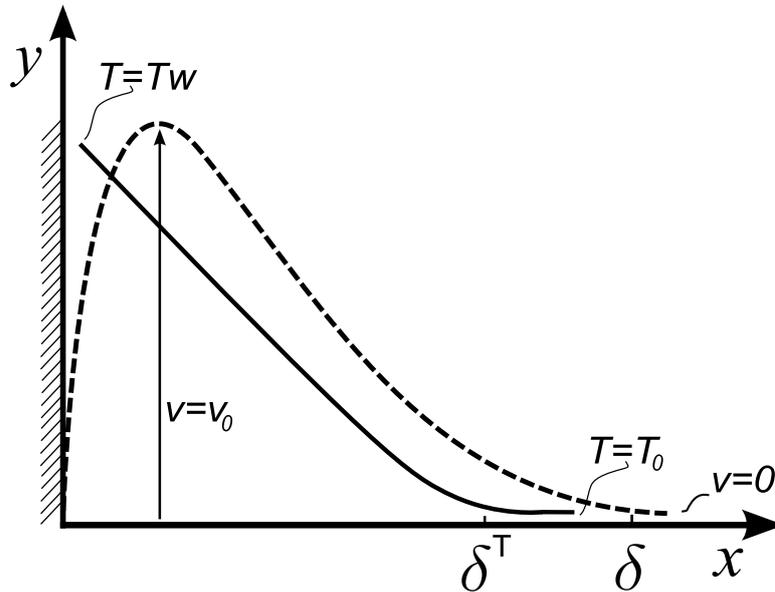


Figure 5.2: Couches limites de vitesse et thermique en convection forcée. (a) la flottabilité est compensée par la friction ($Pr \geq 1$): la couche de vitesse est plus épaisse (b) la flottabilité est compensée par l'inertie ($Pr < 1$): couche thermique plus épaisse..

Remarquons que dans ce deuxième cas, nous avons l'égalité $\sqrt{Gr_Y} = Re_Y$. De plus, dans les deux cas, le rapport des deux couches limites $\delta_T/\delta = Pr^{-1/2}$, ce qui signifie que la couche limite de vitesse est plus épaisse que la couche limite thermique lorsque $Pr \geq 1$, et inversement si le $Pr < 1$ (Fig. 5.2).

5.3 Une solution approchée pour le problème de la convection naturelle

En raison du couplage des problèmes thermique et de l'écoulement, nous allons tenter de construire une solution approchée pour la couche limite. Il n'est pas tout à fait exact de travailler avec des profils δ_T et δ semblables, mais cela simplifie grandement la solution et c'est acceptable si on suppose que le nombre de Prandtl n'est pas trop différent de l'unité.

On recherche une solution telle que les conditions sommaires suivantes soient respectées

$$v(0, y) = 0 \quad v(\delta, y) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\delta, y) = 0 \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, y) = -\rho\beta g(T_w - T_0) \quad (5.16)$$

$$T(0, y) = T_w \quad T(\delta, y) = T_0 \quad \frac{\partial T}{\partial x}(\delta, y) = 0 \quad (5.17)$$

Sur base d'une intuition purement phénoménologique, nous allons -par exemple- proposer les profils suivants.

$$v(x, y) = v_0(y) \frac{x}{\delta(y)} \left(1 - \frac{x}{\delta(y)}\right)^2 \quad (5.18)$$

$$\frac{T(x, y) - T_0}{T_w - T_0} = \left(1 - \frac{x}{\delta(y)}\right)^2 \quad (5.19)$$

Ces deux équations traduisent de manière simple la décroissance monotone et non linéaire du champ de température et la décroissance, elle aussi monotone, précédée par une forte croissance, à proximité de la paroi, du champs de vitesse (Fig 2.33).

Ces expressions sont toutes deux fonctions de $v_0(y)$, la vitesse maximale et de δ , l'épaisseur de la couche limite (thermique ou de vitesse). A l'aide des formes présumées des champs de vitesse et de température et suite à l'intégration des équations de conservation, nous allons obtenir des équations que doivent satisfaire v_0 et δ .

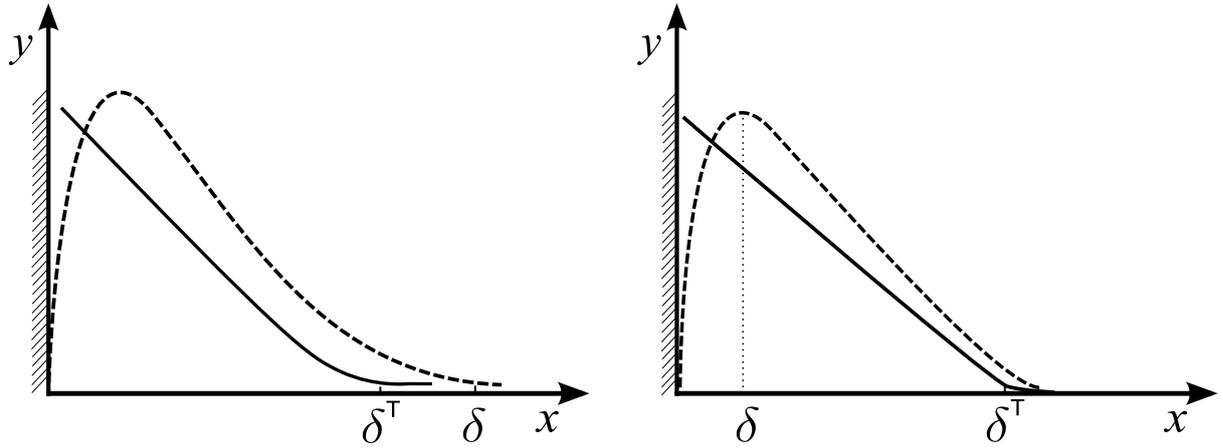


Figure 5.3: Couche limites thermique et de vitesse pour la construction de la solution approchée.

$$\int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} dx = \beta g \int_0^\delta (T(x, y) - T_0) dx + \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (2.294)$$

l'intégration par partie du terme de gauche donne

$$[uv]_0^\delta - \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^\delta v \frac{\partial v}{\partial y} dx = \beta g \int_0^\delta (T(x, y) - T_0) dx + \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (2.295)$$

en utilisant l'incompressibilité du fluide, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

et avec la condition de raccord (2.290c) pour le terme de droite

$$\frac{d}{dy} \int_0^\delta v^2(x, y) dx = \beta g \int_0^\delta (T(x, y) - T_0) dx - \nu \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (2.296)$$

Identiquement, pour l'équation de conservation de l'énergie avec, en plus, $u(0, y) =$

$u(y, \delta) = 0$, nécessaire dans ce cas

$$\int_0^\delta u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} dx = \alpha \int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (2.297)$$

$$[uT]_0^\delta - \int_0^\delta T \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^\delta v \frac{\partial T}{\partial y} dx = \alpha \int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (2.298)$$

$$\frac{d}{dy} \int_0^\delta v(x, y) T(x, y) dx = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (2.299)$$

Si l'on substitue les expressions 2.292 et 2.293 de $v(x, y)$ et $T(x, y)$, on obtient deux équations différentielles ordinaires du premier ordre.

$$\begin{cases} \frac{1}{105} \frac{d}{dy} \left(v_0^2(y) \delta(y) \right) = \frac{\beta g \Delta T}{3} \frac{\delta(y)}{\delta(y)} + \nu \frac{v_0(y)}{\delta(y)} \\ \frac{1}{30} \frac{d}{dy} \left(v_0(y) \delta(y) \right) = \frac{2\alpha}{\delta(y)} \end{cases} \quad (2.300)$$

Equations satisfaites pour des champs $v_0(y)$ et $\delta(y)$ de la forme

$$\begin{aligned} v_0(y) &= V y^m \\ \delta(y) &= D y^n \end{aligned} \quad (2.301)$$

avec $m = 1/2$ et $n = 1/4$:

$$\begin{cases} \frac{1}{105} V^2 D (2m + n) y^{2m+n-1} = \frac{\beta g \Delta T D}{3} y^n + \nu \frac{V}{D} y^{m-n} \\ \frac{1}{30} V D (m + n) y^{m+n-1} = \frac{2\alpha}{D} y^{-n} \end{cases} \quad (2.302)$$

Les valeurs de V et D peuvent alors être retrouvées, pour obtenir l'expression finale de l'épaisseur de la couche limite

$$\frac{\delta_T(y)}{y} = 3,936 (Pr)^{-1/2} (Gr(y))^{-1/4} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{1/4} \quad (2.303)$$

Notons, au passage, que cette solution possède un ordre de grandeur tout à fait raisonnable vis-à-vis de l'estimation que nous en avons faite précédemment (2.284). On vérifie en effet que

$$\mathcal{O}\left(3,936(Pr)^{-1/2}\left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{1/4}\right) = \mathcal{O}\left(Pr^{1/4}\right) \text{ pour } Pr \geq 1 \quad (2.304)$$