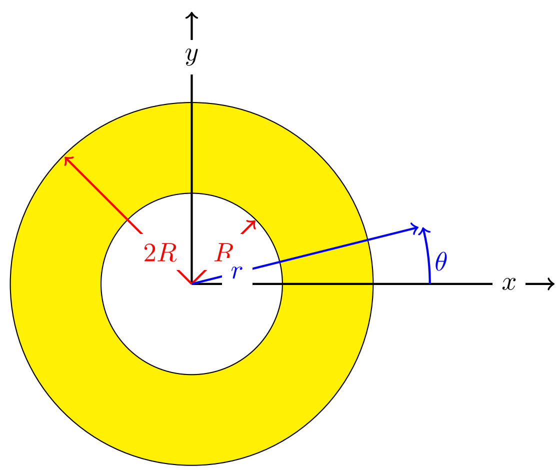
PHYS1213 : solution de l'examen de juin 2019

1 Ecoulement entre deux cylindres : *(50 %)*

On considère l'écoulement stationnaire incompressible d'huile entre deux cylindres de longueur infinie. Le cylindre extérieur est fixe et a un rayon $R_e = 2R$. Le cylindre intérieur tourne avec une vitesse angulaire Ω et a un rayon $R_i = R$. On utilise un système d'axe (r, θ). Dans cet écoulement, il n'y a qu'une seule composante non-nulle de vitesse $u_\theta = u(r)$. Il s'ensuit que la pression et la température ne dépendent que de r.

Les équations que nous allons utiliser sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\rho\dfrac{u^2}{r} &=& -\dfrac{dp}{dr} \\[2ex] 0 &=& \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du}{dr}\right) - \dfrac{u}{r^2}\right) \\[2ex] 0 &=& \dfrac{k}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) + \mu\left(\dfrac{du}{dr} - \dfrac{u}{r}\right)^2 \end{array}\right.$$



On va s'intéresser au couple et au flux de chaleur q_w (par unité de longueur des cylindres) entre le fluide et les deux cylindres, lorsque les températures de deux cylindres sont maintenues à T_e et T_i respectivement. La longueur et la vitesse caractéristiques seront définies comme R et $U = \Omega R$.

1. Donner un ordre de grandeur pour la viscosité d'une huile de lubrification (avec les unités !).

Il suffit tout juste d'écrire : $\boxed{\mu \;=\; 10^{-2} \cdots 10^{2}\,\dfrac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}}$

Comme la viscosité de l'huile de lubrification varie fortement avec la température : toute valeur raisonnable était admise ! Fournir la viscosité cinématique était admis :-)

Un nombre beaucoup trop élevé d'étudiants n'arrivent pas à obtenir les unités de la viscosité :-(C'est évidemment idiot de perdre le premier point cadeau de l'enseignant (Pondération : 1/20)

2. Simplifier adéquatement les équations ci-dessus lorsqu'on suppose que $R_e - R_i \ll R_e$.
   Quelle sera la forme des profils de vitesse et de température dans ce cas ?

   Dans une telle situation, on peut approximer l'écoulement et le transfert de chaleur comme un problème unidimensionnel plan entre deux plaques (en remplaçant r par y et en supprimant tous les termes liés à la formulation en coordonnées cylindriques.

   Il suffit tout juste d'écrire :
$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= \mu \frac{d^2u}{dy^2} \\ 0 &= k\frac{d^2T}{dy^2} + \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \end{aligned}}$$

   Il ne faut faire aucun développement et il ne faut pas résoudre l'écoulement de Couette ! Faire un petit dessin avec une droite pour la vitesse et une parabole pour la température (qui n'est pas linéaire puisqu'il y a un terme source constant dû à la dissipation visqueuse) était une façon rapide et admise de répondre à la question ! (Pondération : 1/20)

3. Donner l'expression du nombre de Reynolds Re pour ce problème.
   En donner l'interprétation physique usuelle.

   Il suffti d'écrire :
$$\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\textit{Effets d'inertie}}{\textit{Effets visqueux}}}$$

   Le choix de la longueur caractéristique n'est pas sans ambiguïté : elle pourrait être R_e, R_i, même si ce qui semble le plus naturel serait de prendre $R_e - R_i$. Il est judicieux de le mentionner !

   L'interprétation physique doit faire apparaître impérativement. Cette question est une simple restitution de ce qui a été expliqué longuement au cours magistral: il n'y a strictement aucune astuce ! (Pondération : 1/20)

4. Donner l'expression du nombre de Nusselt Nu.
   En donner l'interprétation physique usuelle.

   If suffit d'écrire :
$$\boxed{Nu = \frac{q_w L}{k \Delta T} = \frac{\textit{Flux à la paroi}}{\textit{Flux conductif dans l'écoulement}}}$$

   A nouveau, le choix de la longueur caractéristique n'est pas sans ambiguïté. En outre, on peut définir ce nombre pour le flux à la paroi pour le cylindre intérieur ou extérieur : il n'y a donc pas une unique valeur pertinente pour aucun des deux nombres dimensionnels demandés :-)

   C'est à nouveau une simple restitution ! (Pondération : 1/20)

5. Dans le cas général, le profil de vitesse s'écrit :

$$u(r) = Ar^n + Br^m.$$

Déterminer les deux constantes A, B et les deux exposants n, m.

Pour trouver les deux exposants de la solution, il suffit d'introduire Cr^n dans l'équation qui exprime la conservation de la quantité de mouvement en θ.

$$0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) - \frac{u}{r^2}$$

$$0 = C\underbrace{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\underbrace{\frac{d}{dr}(r^n)}_{nr^n}\right)}_{n^2r^{n-2}} - C\,\frac{r^n}{r^2}$$

$$\downarrow$$

$$0 = C\,(n^2-1)\,r^{n-2}$$

$$n = \pm 1$$

La solution générale s'écrit donc sous la forme : $\boxed{u(r) = Ar + \frac{B}{r}}$

Pour obtenir les deux constantes, on utilise les deux conditions[1] *aux limites :*

$$u(R) = U \qquad\qquad u(2R) = 0$$

$$AR + \frac{B}{R} = U \qquad\qquad 2AR + \frac{B}{2R} = 0$$

$$AR + \frac{B}{R} = U \qquad\qquad B = -4AR^2$$

$$AR - 4AR = U \qquad\qquad B = -4AR^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$A = -\frac{U}{3}R \qquad\qquad B = \frac{4UR}{3}$$

On conclut donc : $\boxed{\frac{u(r)}{U} = \frac{4R}{3r} - \frac{r}{3R}}$

C'est la partie essentielle de la question : il faut donc y consacrer du temps et faire l'algèbre avec soin ! On pouvait bien avoir l'intuition que le terme linéaire devait être présent. Certains estiment de manière un présomptueuse que le second exposant sera quadratique : fatale intuition. Bien

[1] Ici, il faut utiliser les valeurs particulières des deux rayons pour alléger les notations, il est stérile et inutile de conserver R_e et R_i dans les développements algébriques :-(

observer que tous les termes dans l'expression finale sont adimensionnels. Beaucoup d'étudiants introduisent une solution $Ar^n + Br^m$ et font une très longue discussion pour savoir si $n = m = 1$ est une solution acceptable.... C'est totalement inutile et stérile : l'enseignant n'aime pas ce genre de trucs débiles. (Pondération : 4/20)

6. Fournir l'expression de la force F et du couple C (par unité de longueur du cylindre) exercé par le fluide sur le cylindre intérieur sachant que les uniques composantes non-nulles du tenseur des extra-contraintes sont :

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right)$$

On commence par calculer la composante $\tau_{r\theta}$:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= \mu \left(\frac{d}{dr} \left(Ar + \frac{B}{r} \right) - A - \frac{B}{r^2} \right) \\
\tau_{r\theta} &= \mu \left(Ar - \frac{B}{r^2} - A - \frac{B}{r^2} \right) \\
\tau_{r\theta} &= -2\mu \, \frac{B}{r^2} \;=\; -\,\frac{8\mu U R}{3r^2}
\end{aligned}$$

La contrainte pariétale sur le cylindre intérieur vaut donc :

$$-\,\frac{8\mu U}{3R}$$

Attention, attention ! Cette contrainte constante est tangente au cylindre, lorsqu'on intègre un vecteur tangent constant le long d'un cercle, le résultat est toujours immédiatement nul, contrairement au couple qui lui est non nul !

On conclut donc :
$$\boxed{\begin{aligned} F &= 0 \\ C &= 2\pi R^2 \tau_{r\theta} \;=\; \frac{16\mu\pi U R}{3} \end{aligned}}$$

Quasiment tous les étudiants (y-compris les plus brillants) écrivent que $F = 2\pi R \tau_{r\theta}$ et puis obtiennent un bon couple avec $C = RF$. Mais qu'avez-vous retenu du cours de mécanique de milieux continus, les gaminets ! C'est vraiment une horreur d'écrire que $F \neq 0$: une simple intuition physique devait vous permettre d'écrire immédiatement que $F = 0$. Et c'est ainsi que deux points que l'enseignant pensait naïvement comme étant des cadeaux se sont révélés les deux points les plus difficiles à obtenir dans cette question. (Pondération : 3/20)

7. Obtenir le profil de pression $p(r)$ si on suppose que la pression moyenne est p_0.

La pression s'obtient directement en utiisant la conservation de la quantité de mouvement en r.

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr} &= \rho \frac{u^2}{r} \\
\frac{dp}{dr} &= \rho \left(A^2 r^2 + \frac{B^2}{r^2} + 2AB \right) \frac{1}{r} \;=\; \rho A^2 r + \frac{\rho B^2}{r^3} + \frac{2AB\rho}{r}
\end{aligned}$$

$$\Big\downarrow \; \textit{En intégrant,}$$

$$p(r) = \frac{\rho A^2 r^2}{2} - \frac{\rho B^2}{2r^2} + 2\rho AB \ln(r) + C$$

En définissant $\eta = \dfrac{r}{R}$, *on conclut*[2] *donc :* $\boxed{\; p(\eta) \;=\; \dfrac{\rho U^2}{9}\left(\dfrac{\eta^2}{2} - \dfrac{8}{\eta^2} - 8\ln(\eta) + D\right) \;}$

Ensuite, la constante D *peut être obtenue en imposant :*

$$
\begin{aligned}
p_0 \pi (4R^2 - R^2) &= 2\pi \int_R^{2R} p(r) r dr \\
3p_0 &= 2\int_1^2 p(\eta)\eta d\eta \\
\frac{27 p_0}{2\rho U^2} &= \int_1^2 \frac{\eta^3}{2} - \frac{8}{\eta} - 8\eta\ln(\eta) + D\eta \; d\eta
\end{aligned}
$$

Attention, cela n'est pas équivalent à écrire que $C = p_0$ *! Calculer cette intégrale est purement calculatoire et donc, je ne l'ai pas fait :-) En outre, il faut utiliser une intégrale par parties pour le terme en logarithme. Il était donc inutile, téméraire et assez stupide de se lancer dans un tel calcul ! Si un étudiant m'apporte une jolie solution pendant les mois de juillet ou août, il bénéficiera d'un bonus spécial pour l'examen de septembre :-)*

C'est une question où il ne faut développer l'algèbre que si on a obtenu le profil de vitesse ! Exprimer correctement la condition pour obtenir p_0 *était essentiel pour ne pas être pénalisé. Beaucoup d'étudiants intègrent l'expression générale de* $u(r)$ *donné dans l'énoncé avec* n *et* m *quelconques : c'est de l'algèbre stérile qui vous fait perdre votre temps et ne vous rapporte strictement aucun point. Stratégie perdant à éviter ! Il vaut mieux réfléchir que remplir une série inutile de feuillets (Pondération : 3/20)*

8. Quel est le critère pour que la dissipation visqueuse soit négligeable ?
   Quels sont (le ou) les nombres adimensionnels qui apparaissent dans ce critère *pour ce problème.*

   Analysons les ordres de grandeur des deux termes de l'équation d'énergie

$$
\begin{aligned}
\mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)^2 &\ll \frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) \\
\frac{\mu U^2}{R^2} &\ll \frac{k\Delta T}{R^2} \\
\frac{\mu U^2}{k\Delta t} &\ll 1 \\
\underbrace{\frac{\mu c}{k}}_{Pr}\;\underbrace{\frac{U^2}{c\Delta t}}_{Ec} &\ll 1
\end{aligned}
$$

Le critère est donc : $\boxed{\; Pr\; Ec \;\ll\; 1 \;}$

[2]Les esprits subtils noteront que la constante d'intégration D intègre maintenant le terme constant $\ln(-R)$ qui a été ajouté pour pouvoir travailler facilement avec $\eta = r/R$, ainsi que le facteur multiplicatif commun :-)

Cette question est une restitution immédiate d'un développement fait au cours magistral pour les transferts établis. Il faut bien re-dériver la condition et écrire uniquement $Ec \ll 1$ n'est pas une réponse correcte. Noter aussi que cette question pouvait être faite de manière totalement indépendante et a plutôt été bien faite par pas mal d'étudiants, tout comme les deux sous-questions suivantes (assez simples aussi !). Conclusion : lisez bien l'énoncé et n'hésitez pas à commencer éventuellement par la fin ! de trucs débiles. (Pondération : 2/20)

9. Obtenir le profil de température $T(r)$ si on néglige la dissipation visqueuse.

   Il suffit d'intéger le terme conductif de l'équation d'energie :

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) &= 0 \\
r\frac{dT}{dr} &= A \\
T(r) &= A\ln(r) + B
\end{aligned}
$$

   Comme les deux constantes sont fixées par les conditions aux limites, on peut obtenir immédiatement l'expression demandée :

$$\text{On conclut : } \boxed{\frac{T(r)-T_i}{T_e-T_i} = \frac{\ln(r)-\ln(R)}{\ln(2)}}$$

Cette question est assez élémentaire et a plutôt été bien faite par la plupart des étudiants. Observer bien que l'imposition des conditions frontières peut se faire très rapidement en évitant pas mal d'algèbre, si on procède de manière astucieuse ! (Pondération : 2/20)

10. Obtenir le flux de chaleur q_w (par unité de longueur du cylindre) en $r = R_e$, toujours lorsqu'on néglige la dissipation visqueuse.

    Il suffit de calculer l'expression suivante :

$$q_w = (2\pi)(2R)\left(-k\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=2R}\right)$$

$$\text{On conclut donc : } \boxed{q_w = \frac{2\pi k(T_i-T_e)}{\ln(2)}}$$

C'est vraiment un calcul élémentaire lorsqu'on a obtenu $T(r)$. Le corrrecteur a été vraiment très indulgent lorsque l'étudiant donne un densité de surface au lieu d'une densité linéïque.
(Pondération : 2/20)

11. Pour les plus doués[3], obtenir le profil de température $T(r)$ dans le cas général.

Il faut maintenant intégrer toute l'équation d'energie :

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) &= -\frac{64\mu U^2 R^2}{r^4} \\
\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) &= -\frac{64\mu U^2 R^2}{kr^3} \\
r\frac{dT}{dr} &= A + \frac{32\mu U^2 R^2}{kr^2} \\
\frac{dT}{dr} &= \frac{A}{r} + \frac{32\mu U^2 R^2}{kr^3} \\
T(r) &= A\ln(r) - \frac{16\mu U^2 R^2}{kr^2} + B
\end{aligned}
$$

Il reste à trouver les deux constantes avec les deux conditions aux limites :-)
C'est vraiment un peu calculatoire et cela n'a aucun intérêt : donc, j'ai pas envie de le faire et personne va s'en plaindre, j'espère :-)

A nouveau, faire l'intégration n'était pas un job impossible. Toutefois, il ne fallait vous lancer dans ceci que si vous aviez vraiment bien fait tout le reste de l'examen. (Pondération : 2/20)

[3] C'est un peu calculatoire, mais tout-à-fait faisable !