

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre numéro magique et votre NOMA.

LPHYS1213	Nom - prénom :	Numéro magique
Juin 2023	Année d'étude :	
Partie 1	Noma	

Solution de similitude et freinage d'un bolide

On se propose d'estimer la température atteinte au point de contact entre des plaquettes de frein en carbone et des disques en acier inox, lors d'un freinage brutal effectué en $t = 0$. Les plaquettes et les disques sont supposés suffisamment grands par rapport à leur épaisseur afin de pouvoir négliger tous les effets de bord. En d'autres mots, on suppose que le problème n'a qu'une dimension spatiale perpendiculaire à l'interface plaquette-disque.

Considérons le cas du disque. Nous allons donc considérer un milieu semi-infini de température uniforme $T_e = 0^{\circ}C$ qui est brutalement soumis à un flux de chaleur constant $q \text{ Wm}^{-2}$ pendant la durée du freinage, sur la face $x = 0$. La distribution de température dans l'axe du disque satisfait la relation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$$

où α est un paramètre matériel de l'acier inox. Le problème est évidemment totalement semblable pour la plaquette. Lorsque le besoin s'en fera sentir, nous distinguerons α_d et α_p , ainsi qu'un q_d et q_p respectivement. Notre objectif final serait d'estimer la température atteinte à l'interface à la fin du freinage et de la comparer avec les températures limites d'utilisation de l'acier inox et du carbone.

1. Effectuer un dessin schématique du problème en esquissant le profil de température au sein des plaquettes et des disques à plusieurs temps distincts.
2. Définir et donner les unités du symbole α .
3. Donner les conditions aux limites nécessaires pour déterminer $T(x, t)$.
4. Démontrer que la fonction f dans l'expression de la température :

$$T(x, t) - T_e = \underbrace{\frac{q\sqrt{4\alpha t}}{k}}_{T_*(t)} f\left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}_{\eta}\right)$$

satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$2(f - \eta f') = f''$$

où η est la variable de similitude et $T_*(t)$ est une température caractéristique à l'instant t .

5. Démontrer que la fonction f est de la forme suivante

$$f(\eta) = A \exp(-\eta^2) + B \eta + A\sqrt{\pi} \eta \operatorname{erf}(\eta)$$

et trouver les valeurs des constantes A et B en termes de α et q .

6. Estimer la durée du freinage t_f , si nous considérons que la vitesse décroît de 360 Km/h à 180 Km/h sur une distance de 100 m. La masse totale de la voiture (y compris le pilote) est de 480 kg et la décélération est constante.
7. Donner un ordre de grandeur de la décélération subie par le pilote, mesurée comme un multiple de l'accélération de la gravité.
8. En supposant que la totalité de l'énergie cinétique est totalement convertie en énergie thermique par frottement sur les deux plaquettes de frein des quatre roues, estimer la valeur numérique (avec des unités !) de $q_d + q_p$. La surface de contact de chaque plaquette de frein est de 50 cm².
9. Démontrer que la température au point de contact peut s'écrire sous la forme

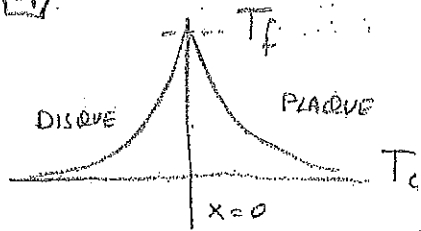
$$T(0, t) = T_e + 2q_d \sqrt{\frac{t}{k_d \rho_d c_d \pi}} = T_e + 2q_p \sqrt{\frac{t}{k_p \rho_p c_p \pi}}$$

10. Calculer le rapport $\frac{q_d}{q_p}$ et exprimer les flux q_d et q_p en fonction de q .

Valeurs numériques et indications diverses

k_d	20.0	$W m^{-1} K^{-1}$	Il peut aussi être utile de se rappeler que : $\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-s^2) ds.$ $\text{erf}(0) = 0$ $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{erf}(\eta) = 1$
c_d	500.0	$J kg^{-1} K^{-1}$	
ρ_d	8100.0	$kg m^{-3}$	
$T_{lim,d}$	1400.0	$^{\circ}C$	
k_p	60.0	$W m^{-1} K^{-1}$	
c_p	1350.0	$J kg^{-1} K^{-1}$	
ρ_p	2250.0	$kg m^{-3}$	
$T_{lim,p}$	2000.0	$^{\circ}C$	

1



$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad [W/mK]$$

$$[\text{kg}/m^3] \quad [J/kg/m]$$

DIFFUSIVITE THERMIQUE

CONDITIONS LIMITE

$$T(x,0) = T_e$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = q$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x,t) = T_e$$

2

3

$$T(x,t) - T_e = \sqrt{4\alpha t} f\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

3

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sqrt{4\alpha t} f' \frac{d\eta}{dx} + f \sqrt{4\alpha} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\alpha}{t}} (f - \eta f')$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = f' \frac{\sqrt{4\alpha t}}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f'' \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} (f - \eta f') = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} f''$$

4

$$2(f - \eta f') = f''$$

(1)

3

$$f = A \exp(-\eta^2) + B\eta + C \operatorname{erf}(\eta)$$

$$f' = -2\eta A \exp(-\eta^2) + B + C \operatorname{erf}'(\eta) + \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \eta$$

$$= \left(\frac{2C}{\sqrt{\pi}} - 2A\right) \eta \exp(-\eta^2) + B + C \operatorname{erf}'(\eta)$$

$$f'' = \left(\frac{2C}{\sqrt{\pi}} - 2A\right) (-2\eta^2) \exp(-\eta^2) + \left(\frac{4C}{\sqrt{\pi}} - 2A\right) \exp(-\eta^2)$$

$$(1) \Rightarrow \exp(-\eta^2) \left(\frac{4A}{\sqrt{\pi}} - \frac{4C}{\sqrt{\pi}}\right) + \eta (2B - 2B) + \eta \operatorname{erf}'(\eta) (2C - 2C) + 2\eta^2 \exp(-\eta^2) \left(-\left(\frac{2C}{\sqrt{\pi}} - 2A\right) + \left(\frac{2C}{\sqrt{\pi}} - 2A\right)\right) = 0$$

$$A = \frac{C}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{q}{k}$$

$$B = -q/k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T = T_e$$

$$C = -B$$

$$f(\eta) = \frac{q}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) - \eta + \eta \operatorname{erf}(\eta) \right)$$

(2)

3

5

$v_f = \frac{d}{t} + v_c$
 $\times L = \frac{d t^2}{2} + v_c t$

$360 \times 1000 / 3600 = 100 \text{ m/s}$
 $180 \times 1000 / 3600 = 50 \text{ m/s}$

$L = \frac{v_f - v_c}{2} t + v_c t$
 $= \frac{v_f + v_c}{2} t \Rightarrow$

$100 \text{ m} \quad \quad \quad 75 \text{ m/s}$

$t = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} \text{ s}$
[6]

$d = 50 \frac{3}{4} = 37,5 \text{ m}^2/\text{s}$
+/- 38'' g

[7]

$$E = \frac{1}{2} H (v_f^2 - v_c^2) = 24 \times 75 \cdot 10^3 = 18 \cdot 10^5$$

480
10000
2500

$q = \frac{18 \cdot 10^5}{8 \cdot 50 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{27}{8} \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$

3,375

[8]

$$T(0,t) = \sqrt{4 \alpha t} \frac{q}{k} \frac{1}{\sqrt{\pi}} + T_c \quad \leftarrow [9]$$

↑

$$q(2) = \sqrt{\frac{t}{k \rho c \pi}} 2q + T_c$$

$\frac{q_d}{q_p} = \frac{\sqrt{k_d \rho_d c_d}}{\sqrt{k_p \rho_p c_p}} = \frac{9 \cdot 10^3}{135 \cdot 10^3} = \frac{2}{3}$

$\sqrt{81 \cdot 10^6} = 9 \cdot 10^3$
 $\sqrt{1350 \times 135000} = 135 \cdot 10^3$

[10]

$$T_f = \frac{2}{5} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4}{3 \pi}} \frac{1}{9 \cdot 10^3} 33,75 \cdot 10^6$$

↓

$$= \frac{8 \times 33,75}{45 \sqrt{3 \pi}} \cdot 10^3$$

↓

$$= 1954 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$q = q_d + q_p = q_d + \frac{3}{2} q_d = \frac{5}{2} q_d$$

$q_d = \frac{2}{5} q$

[11]

→ REMPLACER L'ACIER PAR UN COU...

Eléments de solution

LPHYS1213 - Physique des fluides (2ème partie)

Examen du 21 juin 2023

Les étudiant-es sont invité-es à considérer les 3 problèmes ci-dessous.

Les réponses sont relativement courtes: s'engager dans de longs développements équivaut probablement à opter pour une piste de solution peu fructueuse.

Les étudiant-es ne pourront disposer d'aucun moyen de communication (téléphone portable, tablette, etc.) ni de documentation sous quelque forme que ce soit (notes de cours, ouvrage de référence, etc.) à l'exception d'un formulaire de leur cru dont la taille ne peut excéder les deux faces d'une feuille de format A4. Utiliser une calculatrice électronique est autorisé.

Il est instamment demandé aux étudiant-es d'indiquer lisiblement leur nom sur chacune des feuilles de réponses et d'écrire "néant" en guise de réponse à une question ou sous-question non traitée.

Nonante minutes devraient suffire pour résoudre les problèmes ci-dessous.

Bon travail!

Eléments de solution

1. [Evaluation d'un ordre de grandeur - 6 points] En première approximation, la Terre est une sphère dont le rayon vaut 6.4×10^3 km et dont la surface est 5.1×10^8 km². La pression atmosphérique et l'accélération gravitationnelle à la base de l'atmosphère sont respectivement de l'ordre 10^5 Pa et 10 ms^{-2} . L'atmosphère est à peu près en équilibre hydrostatique. Évaluez la masse de l'atmosphère.

Consider an air column whose cross-sectional area is δS , with $\delta S \ll S$, where $S \approx 5.1 \times 10^{14} \text{ m}^2$ is the Earth's surface area. Its lower (resp. upper) boundary is located at altitude $z = z^-$ and $z = z^+$, where z is the vertical coordinate, which increases upwards. Under the hydrostatic equilibrium, pressure p and air density ρ obey

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (\text{S1.1})$$

where constant g denotes the gravitational acceleration. Multiplying (S1.1) by δS and integrating it from altitude $z = z^-$ to $z = z^+$ (with $z^- < z^+$) yields

$$p^+ \delta S - p^- \delta S = g \underbrace{\int_{z^-}^{z^+} \rho dz \delta S}_{=\delta m} = g \delta m \quad (\text{S1.2})$$

with $p^\pm = [p]_{z=z^\pm}$; δm is the (elemental) mass of the air present in the air column under consideration.

Expression (S1.2) easily transforms to

$$p^- \delta S = g \delta m + p^+ \delta S \quad (\text{S1.3})$$

meaning that the (upward) pressure force at the bottom of the air column ($p^- \delta S$) balances the weight of the air ($g \delta m$) and the (downward) pressure force at the top of the air column ($p^+ \delta S$). If the air column stretches from the bottom of the atmosphere to its top, then p^+ is zero, so that (S1.3) yields

$$\delta m = \frac{p^-}{g} \delta S \quad (\text{S1.4})$$

with $p^- \approx 10^5$ Pa. The mass of the atmosphere (m) is then obtained by evaluating the sum of (S1.4) over the whole Earth surface, i.e.,

$$m = \sum_{\text{atmosphere}} \delta m = \sum_{\text{Earth surface}} \frac{p^-}{g} \delta S = \frac{p^-}{g} \underbrace{\sum_{\text{Earth surface}} \delta S}_{=S} = \frac{p^- S}{g} \quad (\text{S1.5})$$

eventually yielding

$$m = \frac{p^- S}{g} \approx \frac{(10^5 \text{ Pa}) \times (5.1 \times 10^{14} \text{ m}^2)}{10 \text{ ms}^{-2}} \approx 5.1 \times 10^{18} \text{ kg} \quad (\text{S1.6})$$

According to NASA¹'s Earth Fact Sheet², the total mass of the atmosphere of the Earth is

¹ NASA = National Aeronautics and Space Administration of the USA (<http://www.nasa.gov>)

² <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html> (last viewed on 28 April 2023)

Eléments de solution

approximately equal to 5.1×10^{18} kg , lending credence to the elementary calculations performed above.

Eléments de solution

2. [Bilan de masse dans un domaine isolé - 7 points] On étudie un lac dans lequel se développe un écoulement dont les variables d'état dépendent du temps et de la position. Par souci de simplification, on considère que le lac n'échange pas de matière avec son environnement. A l'instant $t = 0$, on déverse abruptement dans le lac une masse M d'une substance radioactive qui se dissout dans l'eau. La demi-vie du soluté vaut $t_{1/2}$. Évaluez la masse du soluté susmentionné contenue dans le lac à tout instant $t \geq 0$.

The solute under consideration does not cross the boundary of the lake. In other words, the solute is neither exported to nor imported from the lake's environment. Since radioactive decay proceeds at the same rate at any time and location, advective and diffusive transport processes taking place in the lake do not affect the total mass of the solute contained in the lake, $m(t)$ ³. Hence, this mass simply obeys first-order decay equation

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m \quad (\text{S2.1})$$

where positive constant λ denotes the rate of decay, which only depends on the nature of the radioactive element under study. Equation (S2.1) is to be dealt with under initial condition $[m(t)]_{t=0} = M$, so that its solution reads

$$m(t) = M e^{-\lambda t} \quad (\text{S2.2})$$

The half-life ($t_{1/2}$) is the time needed for the mass of the solute to be divided by two, leading to

$$m(t + t_{1/2}) = \frac{m(t)}{2} \Rightarrow M e^{-\lambda(t+t_{1/2})} = \frac{M e^{-\lambda t}}{2} \Rightarrow e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad (\text{S2.3})^4$$

so that

$$\lambda = \frac{\log 2}{t_{1/2}} \approx \frac{0.7}{t_{1/2}} \quad (\text{S2.4})^5$$

Finally, substituting (S2.4) into (S2.2) yields

$$m(t) = M \exp\left[-\frac{(\log 2) \times t}{t_{1/2}}\right] \approx M \exp\left(-\frac{0.7 \times t}{t_{1/2}}\right) \quad (\text{S2.5})$$

³ Clearly, the solute concentration is governed by both decay and (advective and diffusive) transport, but the total mass of the solute is not impacted by transport processes.

⁴ It is noteworthy that the half-life is time-independent.

⁵ The half-life and the mean life should not be confused with each-other. The latter is equal to $1/\lambda$.

Eléments de solution

3. [Propagation de la marée M2 - 7 points] On considère une région océanique où la marée M2 (marée semi-diurne lunaire principale) se propage à peu près comme une onde plane. Ainsi, dans la région concernée, l'élévation de l'interface air-mer s'écrit

$$\eta(t, x) \approx E \cos(\omega t - kx) \quad (3.1)$$

où t et x représentent le temps et une coordonnée spatiale appropriée; ω et k sont des constantes positives; l'amplitude vaut $E \approx 2$ m. La période de la marée M2 est de 12 heures et 25 minutes. Dans la région étudiée, elle se propage à la vitesse (de phase) $C_p \approx 100$ kilomètres / heure.

Evaluez le marnage, c'est-à-dire la différence entre le niveau de la mer à marée haute et celui qui prévaut à marée basse. Calculez $2\pi / \omega$ et ω / k ? Le 21 juin 2023, la marée est haute à 9 heures (du matin) au point $x = 0$. A quelle heure se produira la prochaine marée basse au même point? A quelle heure (dans le courant de l'après-midi du 21 juin 2023) la marée sera-t-elle haute au point $x = 500$ kilomètres? Quand se produira la marée basse subséquente au même point?

The tidal range, $R(x)$, is obtained as follows:

$$\begin{aligned} R(x) &= \max_t[\eta(t, x)] - \min_t[\eta(t, x)] \\ &= \underbrace{\max_t[E \cos(\omega t - kx)]}_{=E} - \underbrace{\min_t[E \cos(\omega t - kx)]}_{=-E} = 2E \approx 4 \text{ m} \end{aligned} \quad (S3.1)$$

The period characterizing the sea surface displacement, T , may be derived from the following developments:

$$\begin{aligned} \eta(t+T, x) = \eta(t, x) &\Rightarrow \cos[\omega(t+T) - kx] = \cos(\omega t - kx) \\ \Rightarrow \omega(t+T) - kx = \omega t - kx + 2\pi &\Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \quad (S3.2)$$

Accordingly, as is stipulated in the problem statement, the period of the M2 tidal constituent is

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 12 \text{ hours} + 25 \text{ minutes} \approx 12.42 \text{ hours} \approx 44.7 \times 10^3 \text{ seconds} \quad (S3.3)$$

A moving observer, whose position is denoted $X(t)$, will “see” a constant value of the sea surface elevation if

$$\omega t - kX(t) = \text{const.} \Rightarrow X(t) = -\frac{\text{const.}}{k} + \frac{\omega}{k}t \quad (S3.4)$$

implying that hisher velocity is

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\text{const.}}{k} + \frac{\omega}{k}t\right) = \frac{\omega}{k} \quad (S3.5)$$

Clearly, this is the velocity at which the tidal constituent under study propagates. This velocity is usually referred to as the “phase speed” and, according to the problem statement, its value is

$$C_p = \frac{\omega}{k} \approx 100 \text{ km/h} \approx 27.8 \text{ m/s} \quad (S3.6)$$

Eléments de solution

At $x = 0$, high tide occurs at 09:00 AM on 21 June 2023. Therefore, at the same point, the next low tide will take place a half tidal period later, i.e., approximately at 03:13 PM. Given that the tide propagates at 100 km/h, the tide will be high at $x = 500$ km five hours after the instant high tide took place at $x = 0$, i.e., at 02:00 PM. At this location, the low tide will take place a half tidal period later, i.e., approximately at 08:13 PM.
