Séance 1

Représentations eulériennes et lagrangiennes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \\
\mathbf{v} &= \mathbf{v}_L(\boldsymbol{\xi}, t) \;=\; \mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t) \\
\mathbf{a} &= \mathbf{a}_L(\boldsymbol{\xi}, t) \;=\; \mathbf{a}_E(\mathbf{x}, t) \\
\mathbf{a}_E &= \frac{D\mathbf{v}_E}{Dt} \;=\; \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}_E
\end{aligned}
$$

1 Considérons un écoulement défini sur un intervalle $x \in [0, L]$ et caractérisé par le champ de vitesse unidimensionnel :

$$u(x,t) = U\left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

où U et L sont des constantes positives.

1. Est-ce que l'écoulement est stationnaire ?
2. Est-ce une représentation eulérienne ou lagrangienne du champ de vitesse ?
3. Dessiner le champ de vitesse :-)
4. Interpréter physiquement cet écoulement si on suppose que l'écoulement est incompressible.
5. Calculer l'expression eulérienne $a_E(x,t)$ de l'accélération.

2 Considérons le mouvement d'un milieu continu défini par :

$$
\begin{aligned}
x(\boldsymbol{\xi}, t) &= \tfrac{1}{2}\Big(\xi + \eta\Big)\exp(t) + \tfrac{1}{2}\Big(\xi - \eta\Big)\exp(-t) \\
y(\boldsymbol{\xi}, t) &= \tfrac{1}{2}\Big(\xi + \eta\Big)\exp(t) - \tfrac{1}{2}\Big(\xi - \eta\Big)\exp(-t) \\
z(\boldsymbol{\xi}, t) &= \zeta
\end{aligned}
$$

où (ξ, η, ζ) sont les trois composantes de $\boldsymbol{\xi}$.

1. Est-ce une représentation eulérienne ou lagrangienne du mouvement ?
2. Donner l'expression lagrangienne ou matérielle des composantes de vitesses.
3. Donner l'expression eulérienne ou spatiale des composantes de vitesses.

Lignes de courant et d'émission

Une **ligne de courant** est une courbe de l'espace décrivant l'écoulement d'un fluide en mouvement. A tout instant, une ligne de courant possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des points matériels ou particules du fluide.

Une **ligne d'émission** est une courbe de l'espace décrivant la position à un instant donné de l'ensemble des points matériels ou particules d'un fluide qui sont passées antérieurement en un même point donné.

3 Considérons un écoulement bidimensionnel défini par le champ de vitesse suivant $\mathbf{v} = (u, v)$:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \alpha t \\ v(\mathbf{x}, t) &= \beta x \end{aligned}$$

où α et β sont des constantes positives.

1. Est-ce une représentation eulérienne ou lagrangienne du champs de vitesse ?
2. Quelles sont les unités des constantes α et β ?
3. Déterminer la représentation paramétrique de la trajectoire $x(t), y(t)$ de la particule se trouvant à l'origine $[0, 0]$ à l'instant $t = 0$.
4. Donner la description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en l'instant $t = 0$.
5. Donner une représentation paramétrique des lignes de courant à un instant t.
6. Quand les lignes de courant et les trajectoires des points matériel coïncident-elles ?
7. Donner l'équation de la ligne d'émission issue de l'origine $[0, 0]$ à un instant t.
8. Dessiner la trajectoire, la ligne d'émission et la ligne de courant obtenues pour l'origine :-)