Séance 6

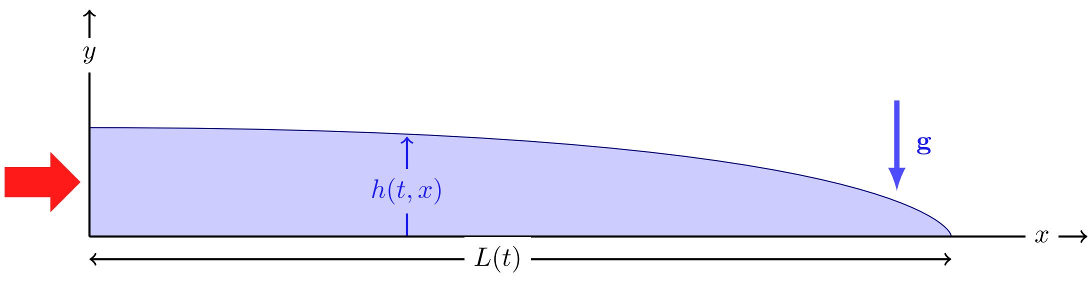
Ecoulement gravitationnel d'une nappe de boue

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\
-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g &= 0
\end{aligned}
$$

12 On étudie l'écoulement bidimensionnel instationnaire d'une nappe d'un liquide dense et visqueux sous l'effet de la gravité. Ce problème correspond approximativement à la modélisation de l'écoulement continu d'une nappe d'eau chargée en boue. La nappe s'écoule dans la direction Ox. Le champ de vitesse s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = u(x, y, t)\ \mathbf{e}_x + v(x, y, t)\ \mathbf{e}_y$$

L'épaisseur et la longueur de la nappe dans les directions verticale et horizontale sont notées $h(x, t)$ et $L(t)$. On effectue l'analyse lorsque $h \ll L$.



La pression extérieure est p_0. La viscosité et la masse volumique du fluide sont μ et ρ. L'accélération de la nappe de fluide est supposée négligeable. Le milieu ambiant dans lequel s'écoule la nappe est de l'air dont la masse volumique et la viscosité sont négligeables par rapport à celles de la nappe. Le fluide colle à la paroi inférieure ($y = 0$) et on impose une condition de symétrie sur la surface libre ($y = h$).

La nappe est alimentée en fluide par le plan $x = 0$ avec un débit linéique[1] constant Q_0.

[1] Il s'agit d'un débit par unité de longueur dans la direction Oz. Les unités de Q_0 sont donc m^2/s et non des m^3/s !

1. Esquisser le profil de vitesse horizontale en une section quelconque de la nappe.
2. Est-ce que nous supposons que l'écoulement est rampant ?
3. Est-ce que nous supposons que l'écoulement est hydrostatique ?
4. Obtenir le profil de pression $p(x, y, t)$ en fonction de l'épaisseur $h(x, t)$.
5. Obtenir le profil de vitesse horizontale $u(x, y, t)$ en fonction de l'épaisseur $h(x, t)$ et de ses dérivées.
6. En définissant un volume de contrôle, montrer que le débit linéique

$$Q(x,t) = \int_0^{h(x,t)} u(x,y,t)\ dy$$

satisfait une équation du type :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = A \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Donner l'expression de la constante A.

7. Montrer que l'épaisseur $h(x, t)$ satisfait une équation du type :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x}\right) = B \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Obtenir l'expression de la constante B en fonction de μ, ρ et g.

8. Donner les deux conditions aux limites afin de pouvoir obtenir l'épaisseur $h(x, t)$.
D'une part, il faut imposer le fait que la nappe est alimentée par un débit Q_0 en $x = 0$.
D'autre part, il suffit d'écrire la définition de la longueur $L(t)$.
9. Il subsiste toutefois un problème : $L(t)$ est inconnu !
Pour déterminer $L(t)$, écrire la conservation globale de la masse pour l'ensemble de la nappe.
C'est la dernière relation nécessaire pour obtenir la solution de notre problème.
10. A chaque instant, il existe une solution de similitude à ce problème définie par :

$$h(x,t) = t^{\alpha} f(\underbrace{t^{\beta} x}_{\eta})$$

où $\eta(t, x) = t^{\beta} x$ est la variable de similitude en choisissant judicieusement les deux exposants.
Obtenir l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire $f(\eta)$.
Donner les deux valeurs fractionnaires des exposants α et β.

11. La résolution numérique par la méthode du tir du problème de similitude permet de conclure que la longueur $L(t)$ de la nappe grandit avec l'ordre suivant $\mathcal{O}\left(t^{-\beta}\right)$.